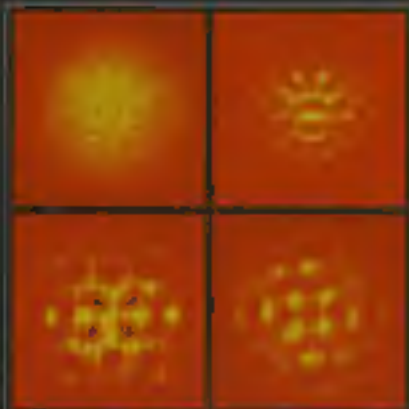


КВАНТОВОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Под редакцией М. П. Козубова



Quantum Imaging

Квантовое изображение

Morten Bache

Optical Fiber Group
Research Center COM
Technical University of Denmark
DK-2800 Lyngby
Denmark

Hans A. Bachor

Department of Physics
Australian National University
Building 38
Canberra ACT 0200
Australia

Stephen M. Barnett

Department of Physics
University of Strathclyde
107 Rottenrow
Glasgow G4 0NG
United Kingdom

Enrico Brambilla

INFM
Università dell'Insubria
Via Valleggio 11
22100 Como
Italy

Pere Colet

Instituto Mediterraneo
des Estudios Avanzados
Campus Universitat
de les Illes Balears
E-07122 Palma de Mallorca
Spain

Claude Fabre

Laboratoire Kastler Brossel
Université Pierre et Marie Curie
Case 74
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Alessandra Gatti

INFM
Università dell'Insubria
Via Valleggio 11
22100 Como
Italy

Adrian Jacobo

Instituto Mediterraneo
des Estudios Avanzados
Campus Universitat
de les Illes Balears
E-07122 Palma de Mallorca
Spain

Ottavia Jedrkiewicz

INFM
Università dell'Insubria
Via Valleggio 11
22100 Como
Italy

John Jeffers

Department of Physics
University of Strathclyde
107 Rottenrow
Glasgow G4 0NG
United Kingdom

Mikhail I. Kolobov

Laboratoire PhLAM
Université de Lille 1
Cité Scientifique, Bât P5
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

Ping Koy Lam

Department of Physics
Australian National University
Building 38
Canberra ACT 0200
Australia

Eric Lantz
Laboratoire d'Optique
P. M. Duffieux
Université de Franche Comté
Route de Gray
25030 Besançon Cedex
France

Luigi A. Lugiato
INFM
Università dell'Insubria
Via Valleggio 11
22100 Como
Italy

Agnès Maître
Laboratoire Kastler Brossel
Université Pierre et Marie Curie
Case 74
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Gian-Luca Oppo
Department of Physics
University of Strathclyde
107 Rottenrow
Glasgow G4 0NG
United Kingdom

Maxi San Miguel
Instituto Mediterraneo
des Estudios Avanzados
Campus Universitat

de les Illes Balears
E-07122 Palma de Mallorca
Spain

Pierre Scotto
Instituto Mediterraneo
des Estudios Avanzados
Campus Universitat
de les Illes Balears
E-07122 Palma de Mallorca
Spain

Иван В. Соколов
Институт физики им. В. А. Фока
Санкт-Петербургский
государственный университет
198504 Ульяновская ул., 1
Санкт-Петербург
Россия

Nicolas Treps
Laboratoire Kastler Brossel
Université Pierre et Marie Curie
Case 74
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Roberta Zambrini
Department of Physics
University of Strathclyde
107 Rottenrow
Glasgow G4 0NG
United Kingdom

КВАНТОВЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Луджи А. Луджиато, Алессандра Гатти, Энрико Брамбилла

1.1. Введение

Важная часть исследований в области квантовых изображений связана с оптическим параметрическим преобразованием частоты вниз. Основные особенности этого явления описаны в данной главе книги, где рассмотрен режим усиления с большим числом фотонов сигнального и холостого полей; этот режим характерен для работы оптических параметрических усилителей (ОПУ) при среднем или большом коэффициенте параметрического усиления, а также для параметрических генераторов света (ПГС). В таком режиме поведение системы наиболее естественно описывать на языке непрерывных переменных, т. е. в терминах напряженности поля или квадратурных компонент поля. С другой стороны, в режиме низкого (или очень низкого) усиления ОПУ можно детектировать совпадения между сигнальным и холостым фотонами; значительная часть литературы по квантовым изображениям, как можно видеть из обзора [1], посвящена именно этому случаю.

Первая часть данной главы написана по материалам лекции, прочитанной профессором Луджиато на семинаре в Каргезе (Корсика)¹⁾, и вводит ключевые понятия описания в непрерывных переменных, такие как сжатие квадратурных компонент и разностного числа фотонов, перепутывание между квадратурами, связь между перепутыванием и сжатием. Рассмотрение будет проведено на основе двух существенно различных моделей сжатия — одномодовой и двухмодовой. Вторая часть этой главы посвящена пространственно многомодовой конфигурации, которая встречается, например, в ОПУ или вырожденных ПГС. Мы обсудим вопросы пространственного многомодового сжатия (или иначе, локального сжатия) и пространственных корреляций в ближней и дальней зоне в приложении к квантовым изображениям, и будем интересоваться детектированием слабо контрастных амплитудных и фазовых объектов с помощью ОПУ или ПГС. Затем мы рассмотрим еще два вопроса: прямое детектирование ниже уровня стандартного квантового предела и усиление изображений с помощью параметрического преобразования частоты вниз. Результаты, представленные в данной главе (в отличие от новых ре-

¹⁾ «Imaging at the Limits», ESF/PESC Exploratory Workshop, Cargèse (Corsica), France, September 5–11, 2004.

зультатов, представленных в главах 2 и 5), были получены до начала работы в рамках проекта QUANTIM.

1.2. Концепции сжатия и перепутывания в случае непрерывных переменных и их связь

1.2.1. Модель I. Рассмотрим устройство, изображенное на рис. 1.1 в виде «черного ящика»; моды на входе и на выходе этого устройства ассоциируются с операторами рождения и уничтожения фотонов $\hat{a}_{\text{in}}$, $\hat{a}_{\text{in}}^\dagger$, $\hat{a}_{\text{out}}$ и $\hat{a}_{\text{out}}^\dagger$, соответственно с:

$$[\hat{a}_{\text{in}}, \hat{a}_{\text{in}}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_{\text{out}}, \hat{a}_{\text{out}}^\dagger] = 1. \quad (1.1)$$



Рис. 1.1. Устройство, осуществляющее преобразование вход-выход для ОПУ (или ПГС ниже порога генерации) в вырожденной одномодовой конфигурации поля

Предположим, что входные и выходные операторы связаны следующим преобразованием (преобразование вход-выход)¹⁾:

$$\hat{a}_{\text{out}} = U\hat{a}_{\text{in}} + V\hat{a}_{\text{in}}^\dagger, \quad (1.2)$$

где коэффициенты U и V удовлетворяют условию:

$$|U|^2 - |V|^2 = 1, \quad (1.3)$$

обеспечивающему унитарность преобразования (1.2). Пусть для определенности

$$U = \cosh g, \quad V = \sinh g. \quad (1.4)$$

Примером конкретной реализации (1.2) может служить излучение вырожденного ОПУ (или ПГС ниже порога генерации) в одномодовой конфигурации поля.

Вариант 1. Если входная мода $\hat{a}_{\text{in}}$ представляет собой поле в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, так что среднее значение оператора $\hat{a}_{\text{in}}$ равно $\langle\hat{a}_{\text{in}}\rangle = \alpha$, то согласно выражению (1.2)

$$\langle\hat{a}_{\text{out}}\rangle = U\alpha + V\alpha^*. \quad (1.5)$$

Таким образом, система проявляет себя как фазово-чувствительный усилитель или аттенюатор входного излучения; например, для вещественных значений α имеет место усиление:

$$|\langle\hat{a}_{\text{out}}\rangle|^2 = |U + V|^2|\alpha|^2 = e^{2g}|\langle\hat{a}_{\text{in}}\rangle|^2, \quad (1.6)$$

¹⁾ Такое преобразование принято называть преобразованием Н. Н. Боголюбова.

в то время как для мнимых α получим ослабление входного излучения:

$$|\langle \hat{a}_{\text{out}} \rangle|^2 = |U - V|^2 |\alpha|^2 = e^{-2g} |\langle \hat{a}_{\text{in}} \rangle|^2. \quad (1.7)$$

Вариант 2. Рассмотрим теперь случай, когда входное поле $\hat{a}_{\text{in}}$ находится в вакуумном состоянии $|0\rangle$. Запишем квадратурные компоненты входной и выходной мод:

$$\hat{X}_{\text{in}} = \frac{\hat{a}_{\text{in}} + \hat{a}_{\text{in}}^\dagger}{2}, \quad \hat{Y}_{\text{in}} = \frac{\hat{a}_{\text{in}} - \hat{a}_{\text{in}}^\dagger}{2i}, \quad (1.8)$$

$$\hat{X}_{\text{out}} = \frac{\hat{a}_{\text{out}} + \hat{a}_{\text{out}}^\dagger}{2}, \quad \hat{Y}_{\text{out}} = \frac{\hat{a}_{\text{out}} - \hat{a}_{\text{out}}^\dagger}{2i}, \quad (1.9)$$

Тогда преобразование вход-выход (1.2) может быть переформулировано в виде:

$$\hat{X}_{\text{out}} = e^g \hat{X}_{\text{in}}, \quad \hat{Y}_{\text{out}} = e^{-g} \hat{Y}_{\text{in}}, \quad (1.10)$$

Следовательно, квадратурная компонента $\hat{X}$ оказывается усиленной, а $\hat{Y}$ — ослабленной, и, как видно из рис. 1.2, вакуумное состояние на входе превращается в сжатое вакуумное состояние со сжатием в $\hat{Y}$ квадратуре. Варьируя фазу коэффициентов U и V относительно выбора (1.4), можно получить сжатие произвольной квадратурной компоненты $\hat{X}_\theta = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta})$ для любых значений θ .

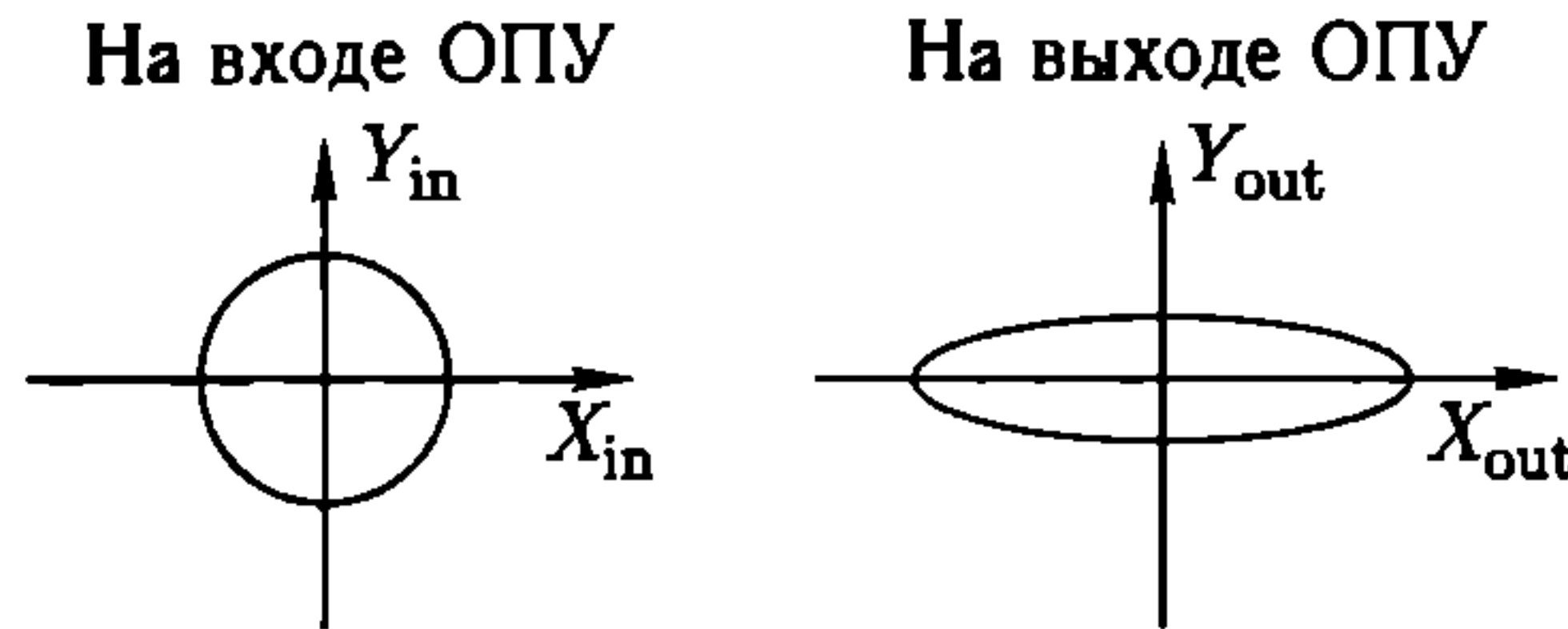


Рис. 1.2. Преобразование вход-выход (1.2) с учетом (1.4); преобразование превращает вакуумное состояние в сжатое вакуумное состояние со сжатием в квадратурной компоненте $\hat{Y}$

1.2.2. Модель II. Теперь рассмотрим «черный ящик», изображенный на рис. 1.3 с двумя входными и двумя выходными модами такими, что

$$[\hat{a}_{i,\text{in}}, \hat{a}_{j,\text{in}}^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_{i,\text{out}}, \hat{a}_{j,\text{out}}^\dagger] = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.11)$$

Пусть моды удовлетворяют соотношению вход-выход:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1\text{out}} &= U_1 \hat{a}_{1\text{in}} + V_1 \hat{a}_{2\text{in}}^\dagger, \\ \hat{a}_{2\text{out}} &= U_2 \hat{a}_{2\text{in}} + V_2 \hat{a}_{1\text{in}}^\dagger, \end{aligned} \quad (1.12)$$

а коэффициенты подчиняются условию унитарности:

$$|U_i|^2 - |V_i|^2 = 1, \quad U_1 V_2 = U_2 V_1. \quad (1.13)$$



Рис. 1.3. Устройство, осуществляющее преобразование вход-выход для ОПУ (или ПГС ниже порога генерации) в невырожденной двухмодовой конфигурации поля

Далее для определенности будем полагать, что

$$U_1 = U_2 = U = \cosh g, \quad V_1 = V_2 = V = \sinh g. \quad (1.14)$$

Реализация (1.14) дается невырожденным ОПУ (или ПГС ниже порога генерации) в двухмодовой конфигурации поля.

Вариант 1. Рассмотрим сначала случай, когда мода $\hat{a}_{1in}$ находится в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, в то время как мода $\hat{a}_{2in}$ — в вакуумном состоянии $|0\rangle$. Тогда согласно (1.12) получим:

$$\langle \hat{a}_{1out} \rangle = U_1 \alpha, \quad \langle \hat{a}_{2out} \rangle = V_2 \alpha^*, \quad (1.15)$$

откуда следует, что

$$|\langle \hat{a}_{1out} \rangle|^2 = (\cosh^2 g) |\alpha|^2 = (\cosh^2 g) |\langle \hat{a}_{1in} \rangle|^2, \quad (1.16)$$

$$|\langle \hat{a}_{2out} \rangle|^2 = (\sinh^2 g) |\alpha|^2 = (\sinh^2 g) |\langle \hat{a}_{2in} \rangle|^2. \quad (1.17)$$

Таким образом, мода 1 оказывается усиленной фазово-нечувствительным образом, а мода 2 генерируется из вакуумного состояния и, в пределе большого усиления, $g \rightarrow \infty$, становится столь же сильной, как и мода 1.

Вариант 1'. Предположим, что обе моды $\hat{a}_{1in}$ и $\hat{a}_{2in}$ находятся в одинаковом когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Тогда из выражений (1.12) и (1.14) следует, что

$$\langle \hat{a}_{1out} \rangle = \langle \hat{a}_{2out} \rangle = \cosh g \alpha + \sinh g \alpha^*, \quad (1.18)$$

то есть получим фазово-чувствительное усиление/ослабление входных полей, аналогично формуле (1.5). Нетрудно показать в общем случае, что фазово-нечувствительное усиление ухудшает соотношение сигнал/шум как минимум в 2 раза, в то время как при фазово-чувствительном усилении возможно сохранить отношение сигнал/шум неизменным (поэтому такой тип усиления называют еще бесшумовым усилением) [1].

Вариант 2. Рассмотрим теперь случай, когда обе моды $\hat{a}_{1in}$ и $\hat{a}_{2in}$ находятся в вакуумном состоянии. Наиболее интересным представляется результат в пределе больших значений g , при котором $U_i \approx V_i \approx e^g/2 (i = 1, 2)$. Тогда, положив $U = e^g/2$, можно переписать выражения (1.12) в виде:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1out} &= U \hat{a}_{1in} + U \hat{a}_{2in}^\dagger, \\ \hat{a}_{2out} &= U \hat{a}_{2in} + U \hat{a}_{1in}^\dagger. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Определяя квадратурные компоненты входных и выходных мод,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{j,\text{in}} &= \frac{\hat{a}_{j,\text{in}} + \hat{a}_{j,\text{in}}^\dagger}{2}, & \hat{Y}_{j,\text{in}} &= \frac{\hat{a}_{j,\text{in}} - \hat{a}_{j,\text{in}}^\dagger}{2i}, & j &= 1, 2, \\ \hat{X}_{j,\text{out}} &= \frac{\hat{a}_{j,\text{out}} + \hat{a}_{j,\text{out}}^\dagger}{2}, & \hat{Y}_{j,\text{out}} &= \frac{\hat{a}_{j,\text{out}} - \hat{a}_{j,\text{out}}^\dagger}{2i}, & j &= 1, 2,\end{aligned}\quad (1.20)$$

получим следующие соотношения:

$$\hat{X}_{2\text{out}} = \hat{X}_{1\text{out}}, \quad \hat{Y}_{2\text{out}} = -\hat{Y}_{1\text{out}}. \quad (1.21)$$

Таким образом, если измерить, к примеру, средние значения операторов $\hat{X}_{1\text{out}}$ и $\hat{Y}_{1\text{out}}$, то можно одновременно сделать заключение и о значениях квадратурных компонент $\hat{X}_{2\text{out}}$ и $\hat{Y}_{2\text{out}}$. Это явление называют *квантовым перепутыванием*, и оно в точности идентично исходному определению парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена [2], сформулированного для координаты x и импульса p двух частиц. Данная формулировка парадокса ЭПР для непрерывных переменных $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ (квадратурных компонент) для двух излучаемых мод была введена в работе [3] на основании анализа неопределенностей в измерении $\hat{X}$ и $\hat{Y}$. Это явление впервые было подтверждено экспериментально в работах [4].

1.3. Взаимосвязь сжатия и перепутывания

В этом разделе мы продемонстрируем фундаментальные соотношения между двумя базовыми моделями, рассмотренными выше, выявляющие взаимосвязь между перепутыванием и сжатием.

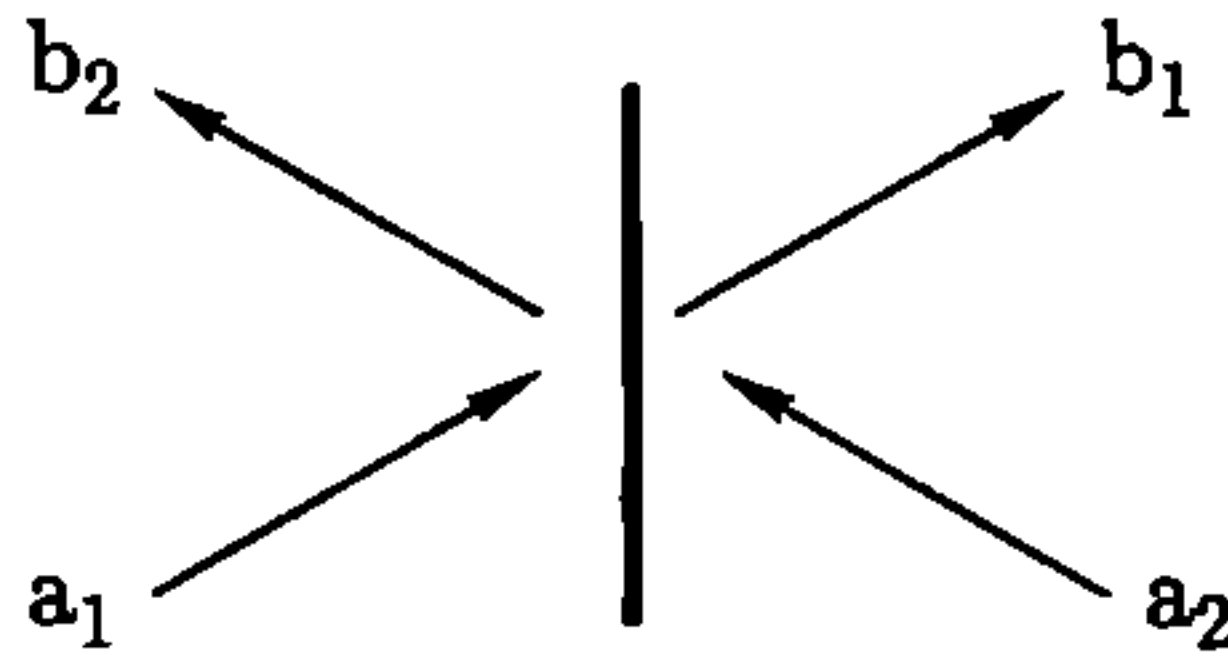


Рис. 1.4. Симметричная (50/50) светоделительная пластина, преобразующая моды a_1 и a_2 в моды b_1 и b_2

Рассмотрим прохождение излучения через симметричную (50/50) светоделительную пластину (рис. 1.4). Покажем, что

- если операторы $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ описывают пару перепутанных световых пучков (в смысле определения, приведенного выше), то пучок $\hat{b}_1$ является сжатым по квадратуре $\hat{Y}$, а пучок $\hat{b}_2$ — сжатым по квадратуре $\hat{X}$;
- обратное утверждение также верно.

Доказательство. Запишем соотношение вход-выход для нашей светоделительной пластины:

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_2 = \frac{\hat{a}_2 - \hat{a}_1}{\sqrt{2}}. \quad (1.22)$$

Теперь положим, что $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ — это две выходные моды $\hat{a}_{1\text{out}}$ и $\hat{a}_{2\text{out}}$ модели II, находящиеся в перепутанном состоянии, так что для них можно записать:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= U\hat{a}_{1\text{in}} + V\hat{a}_{2\text{in}}^\dagger, \\ \hat{a}_2 &= U\hat{a}_{2\text{in}} + V\hat{a}_{1\text{in}}^\dagger,\end{aligned}\tag{1.23}$$

где $\hat{a}_{1\text{in}}$ и $\hat{a}_{2\text{in}}$ — моды в вакуумном состоянии. Подставляя (1.23) в (1.22), получим:

$$\hat{b}_1 = U\hat{f}_1 + V\hat{f}_1^\dagger,\tag{1.24}$$

$$\hat{b}_2 = U\hat{f}_2 - V\hat{f}_2^\dagger.\tag{1.25}$$

Здесь моды $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$ определены как

$$\hat{f}_1 = \frac{\hat{a}_{1\text{in}} + \hat{a}_{2\text{in}}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{f}_2 = \frac{\hat{a}_{2\text{in}} - \hat{a}_{1\text{in}}}{\sqrt{2}}.\tag{1.26}$$

Так как $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ находятся в вакуумном состоянии, то тоже самое справедливо и для полей $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$. Нетрудно заметить, что выражение (1.24) идентично выражению (1.2), описывающему модель I, исходя из чего мы можем заключить, что поле $\hat{b}_1$ находится в сжатом состоянии по отношению к квадратуре $\hat{Y}$. С другой стороны, можно заметить, что и выражение (1.25) имеет ту же форму, что (1.2), с точностью до замены V на $-V$. Из этого следует, что поле $\hat{b}_2$ является сжатым в квадратуре $\hat{X}$.

1.4. Пространственно многомодовое параметрическое преобразование: некоторые аспекты обработки квантовых изображений

1.4.1. Пространственно многомодовое сжатие в сравнении с одномодовым: спонтанное параметрическое преобразование типа I. Почти во всей литературе, посвященной анализу сжатия, рассматривается одномодовое сжатие. При этом для детектирования сколько-нибудь хорошего уровня сжатия необходимо, чтобы пространственное распределение поля гетеродина совпадало с таковым для сжатой моды. Кроме того, необходимо детектировать весь пучок света, так как при измерении только некоторой части пучка сжатие немедленно разрушается, поскольку любая часть моды по необходимости содержит моды более высоких порядков, в которых сжатие отсутствует. Эффект, который мы будем называть *локальным сжатием* (т.е. сжатием в малой области поперечного сечения пучка), может быть получен, только если поле обладает свойством *пространственно многомодового сжатия* (т.е. сжатия в наборе пространственных мод). Это явление было предсказано теоретически Соколовым и Колобовым для случая оптического параметрического усилителя (ОПУ) бегущей волны [6, 7] и нашей группой для случая параметрического генератора света (ПГС) [8, 9]. Здесь мы хотим

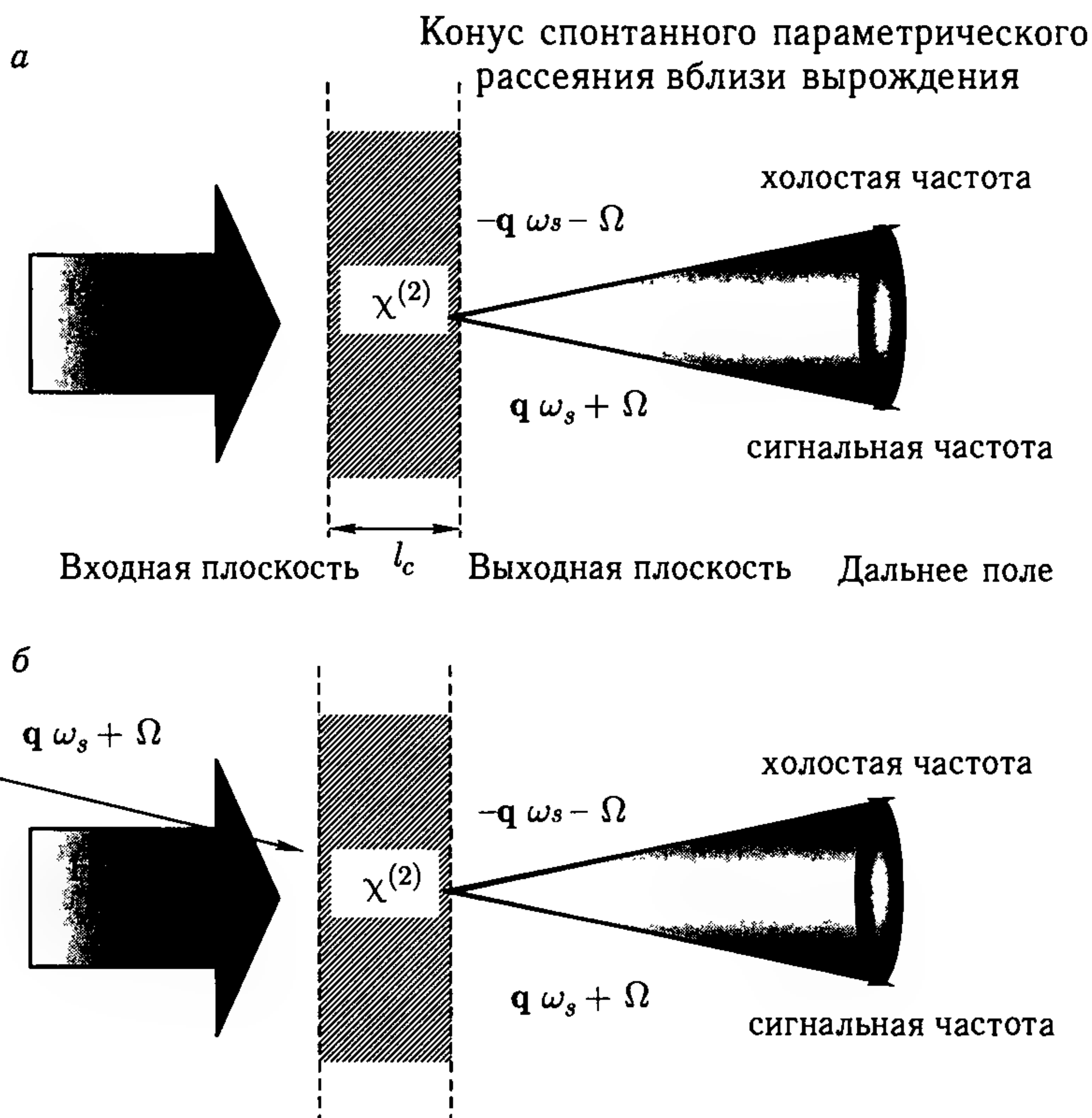


Рис. 1.5. а) Схема параметрического преобразования частоты вниз типа I. б) Параметрическое усиление плоской волны; $\mathbf{q}$ — компоненты волнового вектора в плоскости, ортогональной направлению распространения пучка накачки

в качестве примера рассмотреть схему ОПУ первого типа ¹⁾ (рис. 1.5, а), в которой кристалл с квадратичной нелинейной восприимчивостью $\chi^{(2)}$ облучается когерентной плоской волной на частоте $2\omega_s$. Часть фотонов накачки параметрически преобразуются в пары сигнальных и холостых фотонов, которые распределены в широком диапазоне частот в окрестности частоты вырождения ω_s . На каждой конкретной частоте пары фотонов распределены в некотором диапазоне пространственных частот, обозначаемых поперечной компонентой $\mathbf{q}$ волнового вектора.

Если в дополнение к полю накачки мы облучаем кристалл еще одной плоской когерентной волной — с частотой $\omega_s + \Omega$ и поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$ (рис. 1.5, б), то на выходе кристалла мы получим сигнальную волну, являющуюся усиленной по отношению к входной волне; именно поэтому описываемая система называется оптическим параметрическим усилителем. Благодаря парному характеру излучения фотонов, кроме сигнальной имеется

¹⁾ В трехчастотных нелинейно-оптических процессах различают два типа фазового синхронизма. В отрицательных нелинейно-оптических кристаллах при *синхронизме первого типа* волна накачки соответствует необыкновенной волне, а сигнальная и холостая волны — обыкновенные. При *синхронизме второго типа* одна из усиливаемых волн — необыкновенная.

также холостая волна, которая имеет частоту, отстроенную от вырожденной частоты на то же значение, что и сигнальная волна, но в противоположную сторону (симметричная частота). Обращаясь снова к случаю, когда на вход кристалла подается только волна накачки, можно рассмотреть два различных режима. Первый соответствует чисто спонтанному параметрическому рассеянию света. Такой режим может иметь место в случае очень тонкого кристалла и наблюдается по совпадению фотонов в каждой из излученных пар. Другой режим связан с доминированием процессов стимулированного параметрического рассеяния, при котором одновременно наблюдается большое число фотонных пар. В этой главе мы остановимся на обсуждении второго режима, а первый будет рассмотрен в главе 2.

Рассмотрим процесс параметрического рождения сигнального и холостого полей, близких по частоте к частоте вырождения ω_s на более формальном уровне. Обозначим через $\hat{a}_{in}(\mathbf{x}, t)$ оператор медленно меняющейся комплексной амплитуды сигнального (холостого) поля на входной грани кристалла, и через $\hat{a}_{out}(\mathbf{x}, t)$ оператор медленно меняющейся амплитуды на выходе кристалла, где t — время, $\mathbf{x} \equiv (x, y)$ — радиус-вектор пространственной точки, лежащей в поперечном сечении кристалла. Выполним преобразование Фурье полей $\hat{a}_{in}$ и $\hat{a}_{out}$ по пространственным координатам и по времени:

$$\hat{a}_{in}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{q} \int d\Omega \hat{a}_{in}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - i\Omega t}, \quad (1.27)$$

$$\hat{a}_{out}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{q} \int d\Omega \hat{a}_{out}(\mathbf{q}, \Omega) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - i\Omega t}. \quad (1.28)$$

Нетрудно показать, что в линейном режиме неистощающейся накачки¹⁾ справедливы следующие соотношения между полями на входе и на выходе кристалла [9]:

$$\hat{a}_{out}(\mathbf{q}, \Omega) = U(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_{in}(\mathbf{q}, \Omega) + V(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_{in}^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega), \quad (1.29)$$

$$\hat{a}_{out}(-\mathbf{q}, -\Omega) = U(-\mathbf{q}, -\Omega) \hat{a}_{in}(-\mathbf{q}, -\Omega) + V(-\mathbf{q}, -\Omega) \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{q}, \Omega). \quad (1.30)$$

Выражения для функций $U(\mathbf{q}, \Omega)$ и $V(\mathbf{q}, \Omega)$ приведены в работе [9]. Отметим, что для каждой фиксированной пары значений $\mathbf{q}$ и Ω , выражение (1.29) принимает вид (1.12), описывающего модель II. Таким образом, результаты, полученные в подразд. 1.2.2, остаются справедливыми и для данного случая. В частности, рис. 1.5, б иллюстрирует вариант 1 подразд. 1.2.2. Процесс параметрического взаимодействия второго типа будет рассмотрен в главе 5.

1.4.2. Дуализм полей в ближней и дальней зонах в оптическом параметрическом усилителе типа I. Мы хотим продемонстрировать здесь ключевые пространственные квантовые свойства поля, излучаемого ОПУ первого типа в линейном режиме усиления (когда эффектами истощения накачки можно пренебречь) или ПГС ниже порога генерации.

¹⁾ Этот режим усиления соответствует приближению заданного поля накачки. — Прим. редактора перевода.

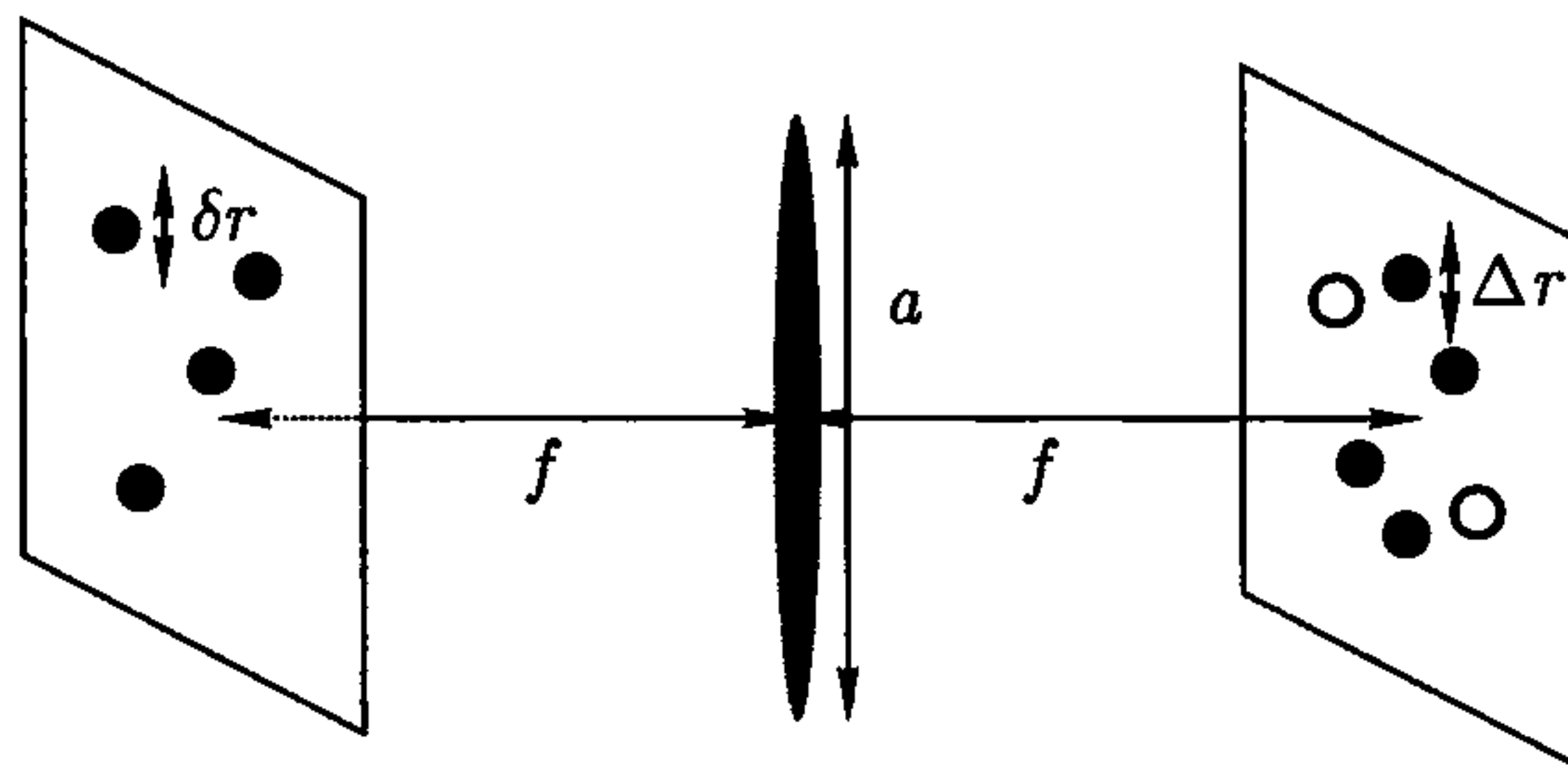


Рис. 1.6. Иллюстрация дуализма полей в ближней и дальней зонах; f — фокусное расстояние линзы. Поле накачки с частотой $2\omega_s$ и нелинейный кристалл на рисунке не показаны

В ближней зоне (см. рис. 1.6) наблюдается явление пространственного многомодового сжатия или локального сжатия, обсуждавшегося в п. 1.4.1. Хорошая степень сжатия наблюдается, если область детектирования имеет линейный размер не меньше, чем обратная ширина полосы пространственных частот излучения. С другой стороны, если посмотреть на поле в дальней зоне (что обычно достигается использованием линзы в конфигурации, изображенной на рис. 1.6), то можно обнаружить явление *пространственного перепутывания* между небольшими областями, локализованными симметрично относительно оси пучка. Говоря точнее, если рассмотреть два симметрично

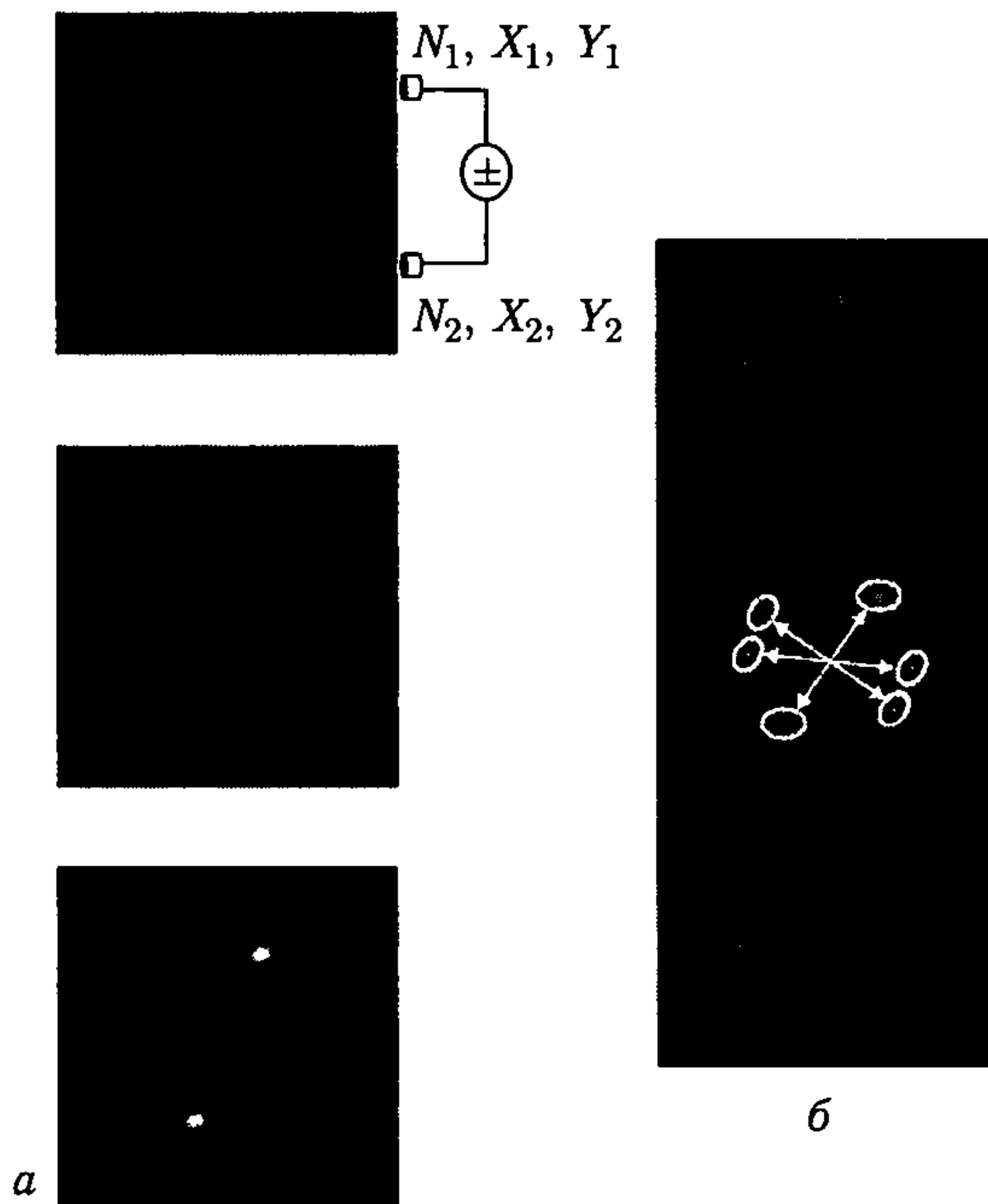


Рис. 1.7. Распределение интенсивности в дальней зоне при одиночном импульсе поля накачки. а) Численное моделирование. Значение перетяжки пучка накачки выбрано равным 1000, 300 и 150 мкм на трех рисунках (сверху вниз соответственно). N_i, X_i, Y_i ($i = 1, 2$) — измеряемые числа фотонов и квадратурные компоненты на пикселах 1 и 2, соответственно. б) Экспериментальные наблюдения, выполненные Дево и Ланцем в Университете Безансона (см. [13])

расположенных пиксела 1 и 2 (рис. 1.7, *a*), то флуктуации интенсивности на них окажутся очень хорошо скоррелированными, или, что то же самое, флуктуации разности интенсивностей между двумя пикселями окажутся много ниже уровня дробового шума [10, 11].

Обозначим как $\hat{N}_1$ и $\hat{N}_2$ операторы чисел фотонов на пикселях 1 и 2 соответственно, тогда $\delta\hat{N}_i = \hat{N}_i - \langle\hat{N}_i\rangle$ ($i = 1, 2$) описывают флуктуации чисел фотонов. Из соображений симметрии следует, что $\langle\hat{N}_1\rangle = \langle\hat{N}_2\rangle$, $\langle(\delta\hat{N}_1)^2\rangle = \langle(\delta\hat{N}_2)^2\rangle$. В пределе плоской волны накачки разность чисел фотонов $\hat{N}_- = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ оказывается не флуктуирующей ¹⁾ [10]:

$$\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle = 0. \quad (1.31)$$

Фактически имеем $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$ и, измеряя $\hat{N}_1$, можно указать значение $\hat{N}_2$ (перепутывание). Этот результат наиболее ярко отражает факт парного испускания сигнальных и холостых фотонов и является прямым следствием полной скоррелированности фотонов на пикселях 1 и 2. В самом деле, можем записать:

$$\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle = \langle(\delta\hat{N}_1)^2\rangle + \langle(\delta\hat{N}_2)^2\rangle - 2\langle\delta\hat{N}_1\delta\hat{N}_2\rangle; \quad (1.32)$$

поскольку $\langle(\delta\hat{N}_1)^2\rangle = \langle(\delta\hat{N}_2)^2\rangle$, то, используя равенство (1.31), получим значение для нормированной корреляционной функции:

$$C \equiv \frac{\langle\delta\hat{N}_1\delta\hat{N}_2\rangle}{\sqrt{\langle(\delta\hat{N}_1)^2\rangle\langle(\delta\hat{N}_2)^2\rangle}} = 1, \quad (1.33)$$

что означает полную корреляцию.

При более реалистичном подходе, для случая гауссового пучка накачки, флуктуации $\hat{N}_-$ оказываются ниже уровня дробового шума [10], т. е.

$$\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle < \langle\hat{N}_+\rangle = \langle\hat{N}_1\rangle + \langle\hat{N}_2\rangle. \quad (1.34)$$

Так как это явление возникает для любой пары симметрично расположенных пикселей, мы называем его пространственным перепутыванием. Такой же эффект проявляется для квадратурных компонент: флуктуации $\hat{X}$ квадратур на парах симметричных пикселей почти полностью скоррелированы, а флуктуации $\hat{Y}$ квадратур — антикоррелированы [12]. Полная корреляция/антикорреляция происходит в пределе плоской волны накачки; в этом случае выполняются соотношения (1.21).

Минимальный размер небольших симметричных областей, между которыми можно обнаружить пространственное перепутывание, определяется конечным размером апертуры оптических элементов, и в параксиальном приближении равен $\lambda f/a$, где λ — длина волны, f — фокусное расстояние линзы, и a — апертура оптических элементов (т. е. апертура линзы в схеме, изображенной

¹⁾ Это утверждение верно только при большой степени сжатия.

на рис. 1.6). При более точном описании ОПУ необходимо также принимать во внимание конечный размер перетяжки пучка накачки¹⁾. В этом случае минимальный размер областей, между которыми может быть обнаружено перепутывание в дальней зоне, определяется перетяжкой пучка накачки.

Пространственное перепутывание флуктуаций интенсивности в дальней зоне вполне очевидно даже в случае одиночного импульса накачки (поле накачки обычно импульсное). На рис. 1.7, а показан результат численного моделирования для случая неколлинеарного фазового синхронизма на вырожденной частоте. Видны симметричные пики интенсивности, которые становятся шире и шире с уменьшением перетяжки пучка накачки. Такая же ситуация наблюдалась в эксперименте, выполненном с использованием кристалла LBO [13] (см. рис. 1.7, б).

Подводя итог сказанному в этом разделе, отметим, что дуализм полей в ближней и дальней зонах (т.е. сжатие в ближней зоне и перепутывание в дальней зоне) можно понять, основываясь на внутренней взаимосвязи между сжатием и квантовым перепутыванием. Пространственное перепутывание в дальней зоне возникает из корреляций между модами $\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{q}) \sim \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}]$ и $\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{q}) \sim \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}]$, которые в дальней зоне приводят к появлению двух пятен в поперечной плоскости, локализованных симметрично относительно центра пучка.

С другой стороны, в ближней зоне не существует сжатия в модах $\hat{a}(\mathbf{q})$ и $\hat{a}(-\mathbf{q})$ по отдельности, но есть большое сжатие в комбинациях этих мод $\hat{b}(\mathbf{q}) = (\hat{a}(\mathbf{q}) + \hat{a}(-\mathbf{q}))/\sqrt{2}$ и $\hat{b}(-\mathbf{q}) = (\hat{a}(\mathbf{q}) - \hat{a}(-\mathbf{q}))/\sqrt{2}$, являющихся операторами уничтожения фотонов в пространственных модах $\sim \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ и $\sim \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$. В ближней зоне возможно наблюдать это сжатие с помощью смещения света с полем гетеродина $\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ или $\sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ соответственно [8]. Нетрудно заметить, что взаимосвязь между модами $\hat{a}(\mathbf{q})$, $\hat{a}(-\mathbf{q})$ и модами $\hat{b}(\mathbf{q})$, $\hat{b}(-\mathbf{q})$ совпадает с выражением (1.22), которое, как мы доказали, преобразует перепутанные пучки в сжатые и наоборот.

1.4.3. Измерение слабой амплитуды или фазы объектов ниже стандартного квантового предела. Рассмотрим сначала слабо контрастный амплитудный объект, расположенный, к примеру, в сигнальной части поля, излучаемого ОПУ (рис. 1.8). Как сигнальное, так и холостое поле обладает высокими шумами, поэтому в случае большого числа фотонов и при условии, что объект имеет слабую контрастность, а детектируется только сигнальное поле, отношение сигнала к шуму для объекта мало. Однако, благодаря пространственному перепутыванию, флуктуации разности интенсивностей между сигнальным и холостым полями очень малы. Следовательно, если мы измеряем разность интенсивностей, то отношение сигнал/шум для объекта становится много лучше. Эта схема является обобщением на случай пространственно многомодовой конфигурации одномодовой схемы, применявшейся для измерения слабого поглощения [14].

¹⁾ Формирование сжатых состояний в пространственно ограниченном поле накачки изучалось в работах Белинского и Чиркина [22].

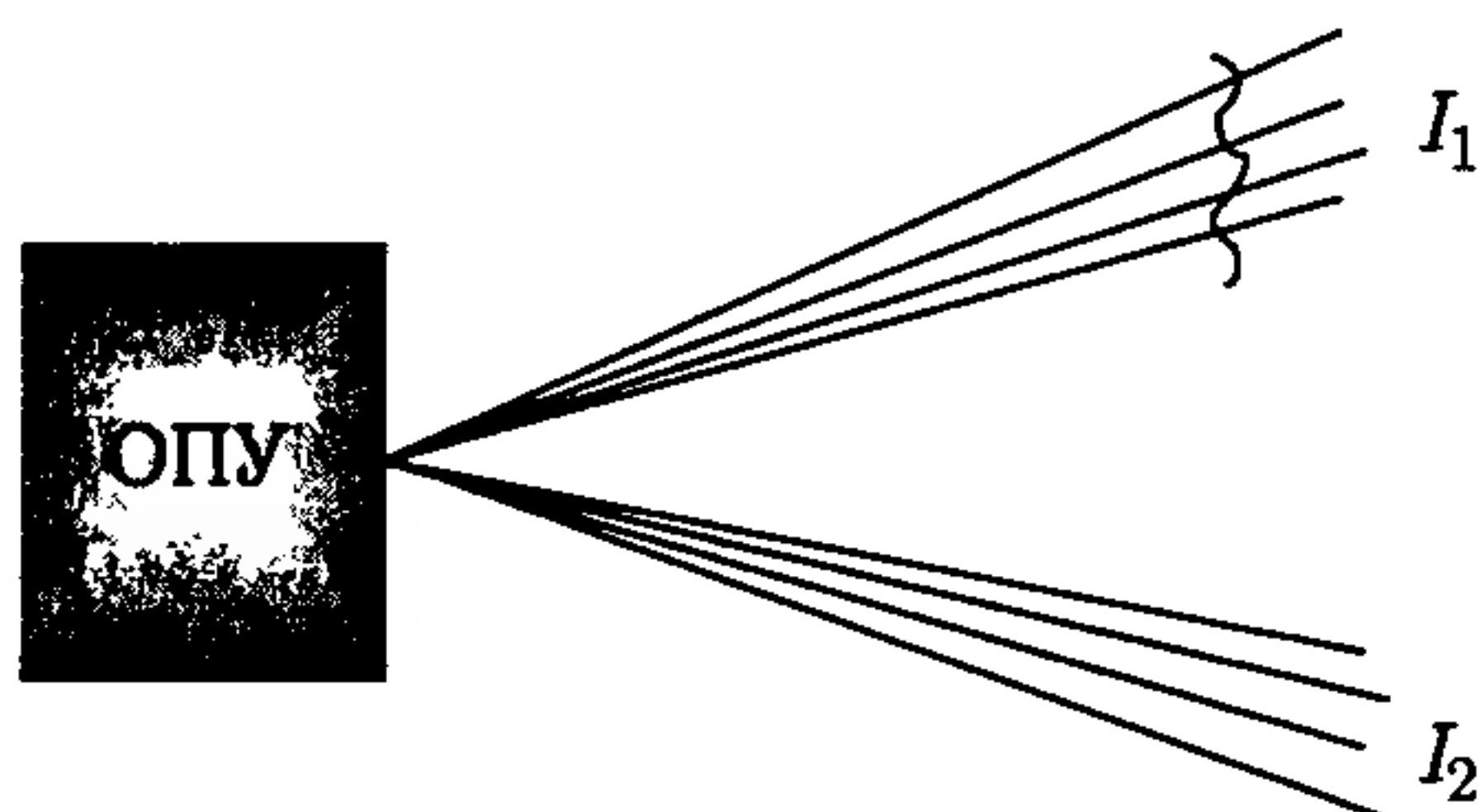


Рис. 1.8. Детектирование слабо контрастного амплитудного объекта путем измерения разности интенсивностей $I_1 - I_2$

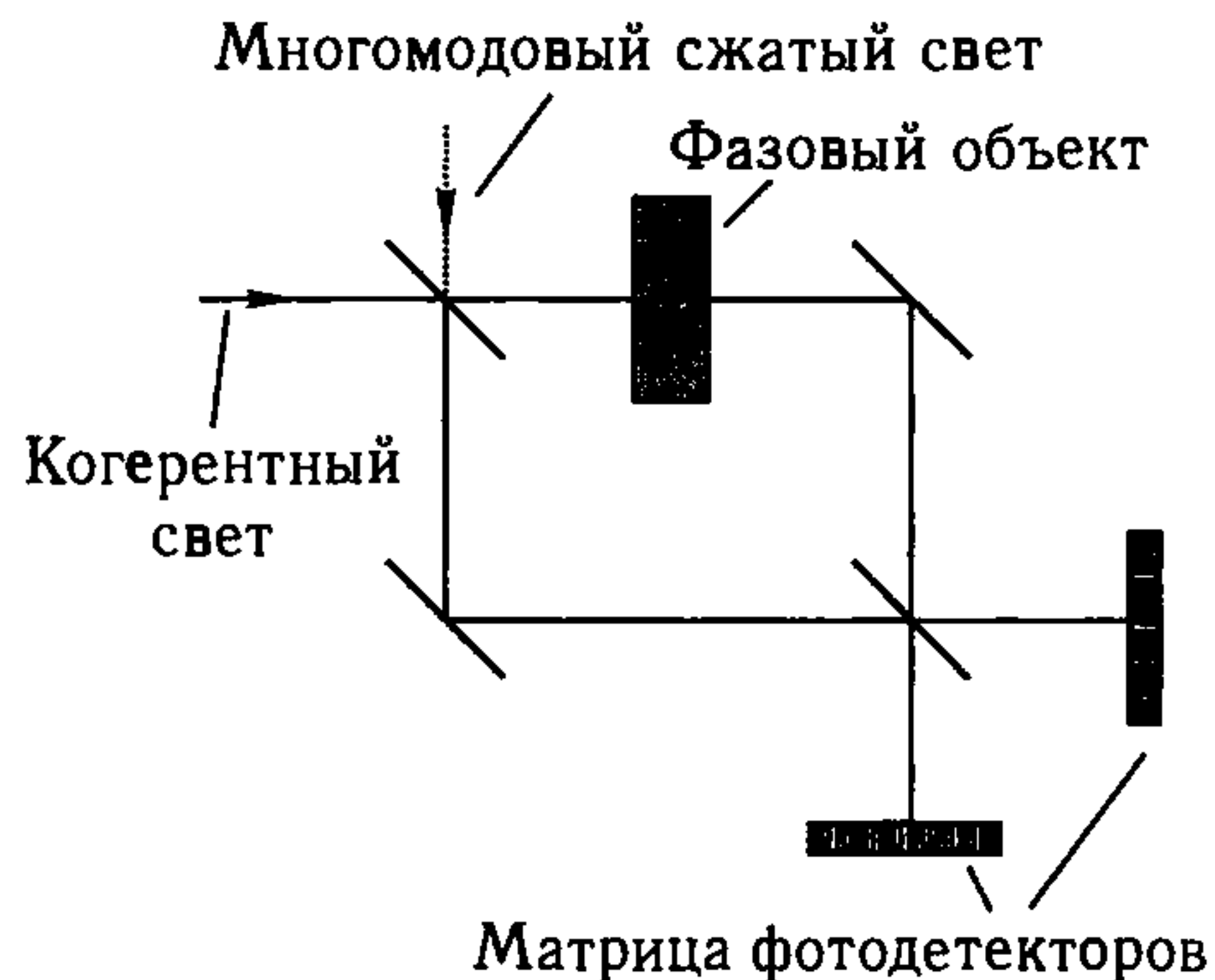


Рис. 1.9. Измерение слабо контрастного фазового объекта

Теперь перейдем к случаю слабо контрастного фазового объекта, для измерения которого будем использовать свойство пространственно многомодового сжатия. Стандартная конфигурация основана на использовании интерферометра Маха-Цендера, который, как хорошо известно, позволяет детектировать малые фазовые сдвиги. При этом чувствительность таких измерений может быть выше стандартного квантового предела, если вход, через который обычно поступает вакуумное поле, осветить сжатым светом. Если мы имеем слабо контрастное фазовое изображение (рис. 1.9), то мы можем добиться указанного повышения чувствительности измерений, инжектируя пространственно многомодовый сжатый свет [15].

1.4.4. Усиление изображения при параметрическом преобразовании типа I. Вернемся к конфигурации рис. 1.5, б. Предположим теперь, что вместо плоской волны с частотой близкой к ω_s мы облучаем кристалл когерентным монохроматическим изображением (рис. 1.10) на частоте ω_s . Параметрическое усиление изображений было широко исследовано с классической точки зрения (см., например, [13]). Отправной точкой схемы, изображенной на рис. 1.10, служит то, что изображение инжектируется не вдоль главной оптической оси кристалла, что приводит к появлению двух изображений на

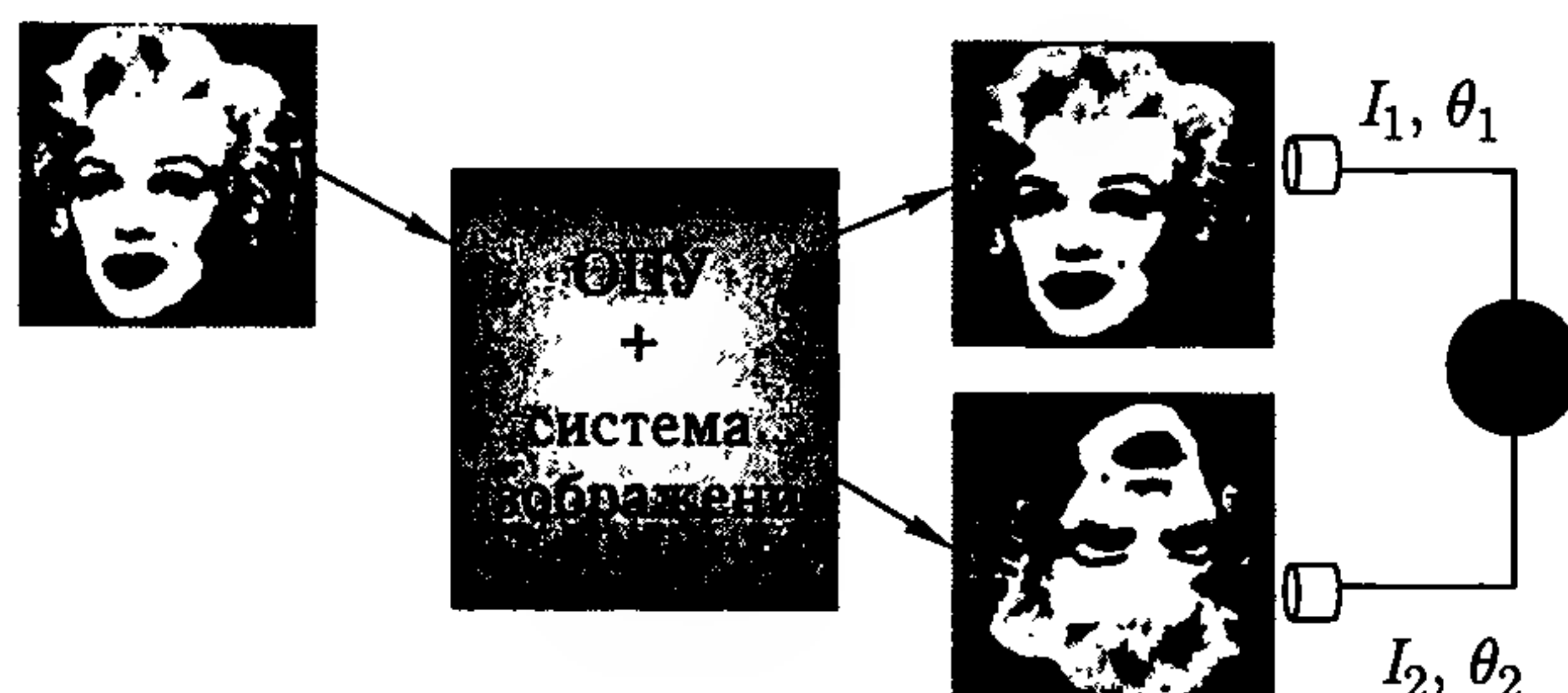


Рис. 1.10. Внеосевое инжектирование изображения и генерация пары перепутанных «изображений-близнецов»

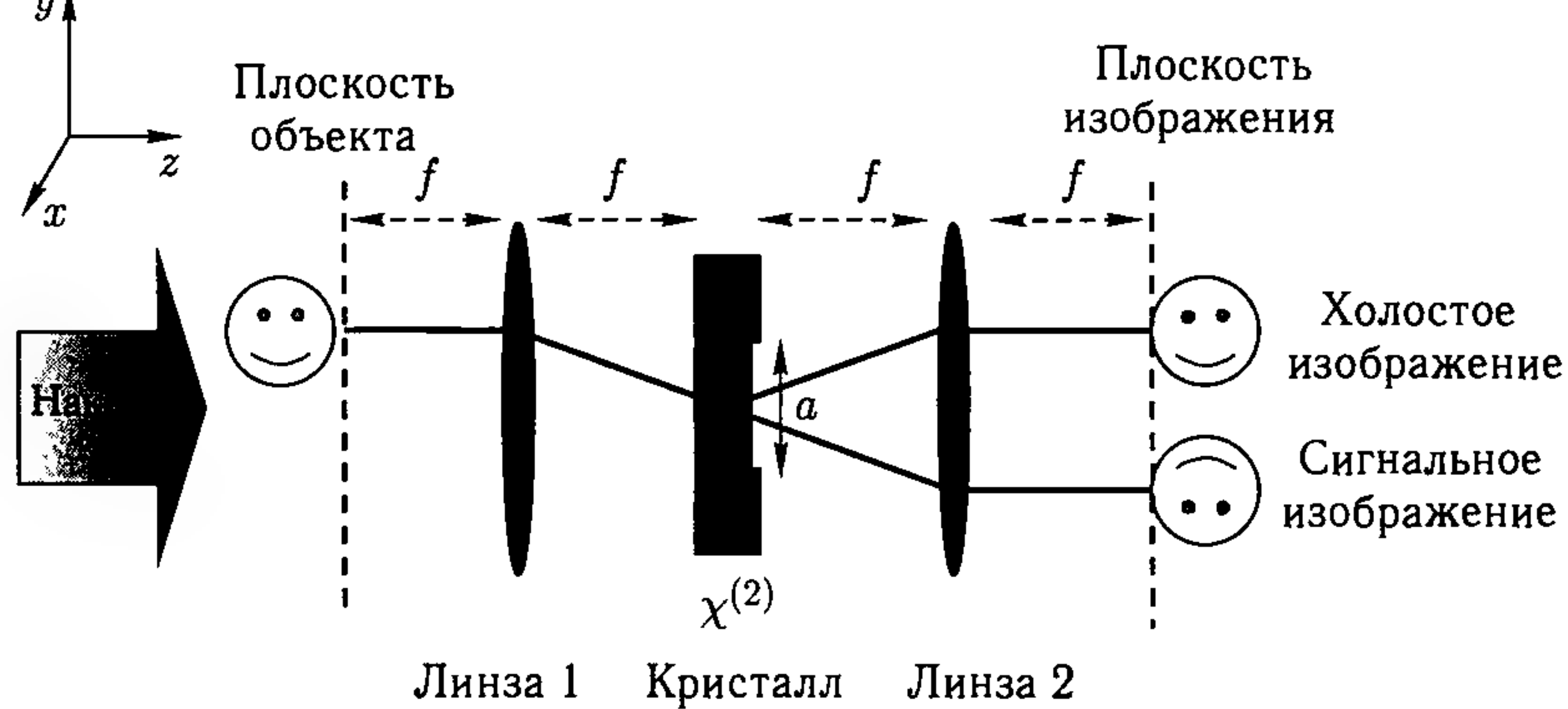


Рис. 1.11. Возможная схема параметрического усилителя оптического изображения

выходе из кристалла: сигнального, являющегося усиленной копией входного изображения, и симметричного ему холостого изображения. Интересная ситуация возникает, если кроме самого усилителя установить пару линз на фокусном расстоянии от объектной плоскости, от плоскости усилителя и от плоскости изображения (рис. 1.11).

Как показано в работах нашей группы [11, 12, 16], в пределе большого усиления два изображения на выходе могут быть рассмотрены как «изображения-близнецы», даже с точки зрения квантово-механического описания. По существу, они не только демонстрируют одинаковые распределения интенсивности, но также и одинаковые локальные квантовые флуктуации. Говоря более точно, рассмотрим два симметричных пиксела в двух изображениях (рис. 1.12). Оказывается, что флуктуации интенсивности на этих пикселах идентичны, то есть в точности скоррелированы (или, говоря иначе, синхронизованы).

С другой стороны, флуктуации фазы являются в точности антикоррелированными. Таким образом, из приведенного рассуждения видно, что из одного изображения можно получить пару изображений-близнецов в пространственно перепутанном состоянии; пространственная перепутанность этих состояний может быть сформулирована на языке квадратурных компонент X и Y , как для обсуждавшегося выше случая параметрической флуоресценции без инжекции сигнального поля (п. 1.4.2). Однако, в описанной схеме есть отрицательный момент, связанный с отношением сигнала к шуму. При инжекции входного изображения не вдоль главной оптической оси, механизм усиления оказывается фазово-нечувствительным, что приводит, как известно, к добавлению 3 дБ квантового шума к полю на выходе [17]. Для того чтобы получить бесшумовое усиление (т. е. усиление, при котором сохраняется отношение сигнал/шум), необходимо инжектировать в кристалл два когерентных изображения симметрично (рис. 1.13) [16]. В этом случае на входе системы

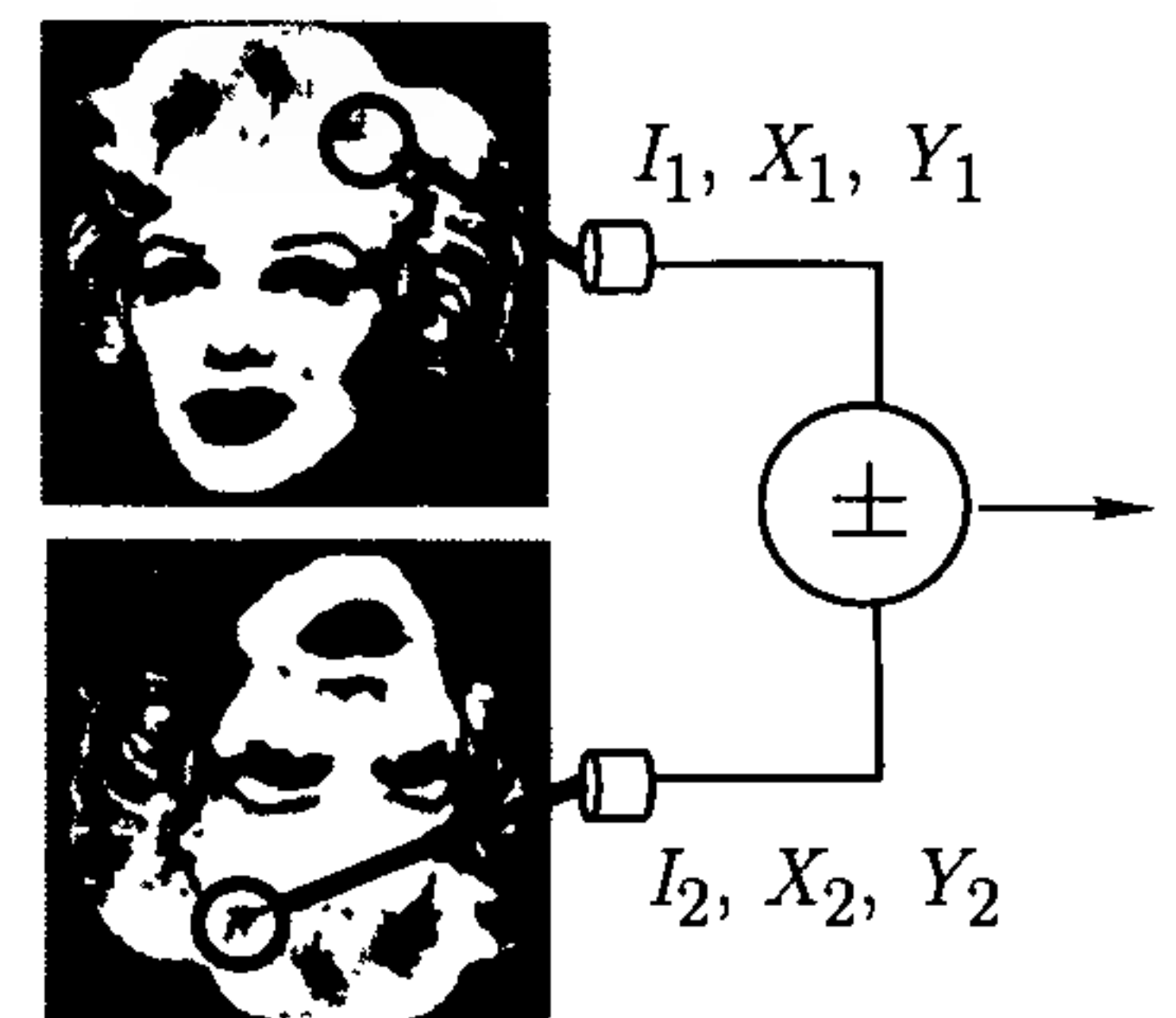


Рис. 1.12. Пространственное перепутывание между двумя изображениями на выходе кристалла по флуктуациям интенсивности, фазы и квадратурных компонент



Рис. 1.13. Симметричное инжектирование изображения

имеем два одинаковых, но не скоррелированных изображения, в то время как на выходе получим два усиленных изображения в пространственно перепутанном квантовом состоянии. Можно доказать, что такая симметричная схема является фазово-чувствительной (как и в варианте 1' п.1.2.2) и приводит к бесшумовому усилению [18, 19]. Несколько лет назад Кумаром с соавторами [20] был выполнен знаковый эксперимент, продемонстрировавший бесшумовое усиление простого тестового рисунка. Конфигурация этого эксперимента отличалась от изображенной на рис. 1.11, так как не содержала две линзы. Полную теорию для этого эксперимента можно найти в работе [21].

Список литературы

1. *Lugiato L. A., Gatti A., Brambilla E.* // J. Opt. B: Quant. and Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. S176–S183.
2. *Walls D. F., Milburn G.* Quantum Optics. — Berlin: Springer Verlag, 1994;
Scully M. O., Zubairy M. S. Quantum Optics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997;
Schleich W. Quantum Optics in Phase Space. — New York: Wiley, 2001;
Barnett S. M., Radmore P. M. Methods in Theoretical Quantum Optics. — Oxford: Clarendon Press, 1997.
3. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* // Phys. Rev. 1935. V. 47. P. 777.
4. *Reid M. D., Drummond P. D.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2731;
Reid M. D. // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 913.
5. *Ou Z. Y., Pereira S. F., Kimble H. J., Peng K. C.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 3663;
Ou Z. Y., Pereira S. F., Kimble H. J. // Appl. Phys. B. 1992. V. 55. P. 265.
6. *Kolobov M. I., Sokolov I. V.* // Sov. Phys. JETP. 1989. V. 69. P. 1097; Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 101; Europhys. Lett. 1991. V. 15. P. 271.
7. *Kolobov M. I.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539.
8. *Lugiato L. A., Gatti A.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3868;
Gatti A., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 1675;
Lugiato L. A., Brambilla M., Gatti A. Optical Pattern Formation // Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics. Boston: Academic Press, 1999. V. 40. P. 229.
9. *Lugiato L. A., Grangier Ph.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. P. 225;
Petsas K. I., Gatti A., Lugiato L. A., Fabre C. // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 12. P. 501.
10. *Brambilla E., Gatti A., Lugiato L. A., Kolobov M. I.* // Eur. Phys. J. D. 2001. V. 15. P. 127.

11. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A., Kolobov M. I.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1763.
12. *Navez P., Brambilla E., Gatti A., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 65. P. 013813.
13. *Devaux F., Lantz E.* // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 8. P. 117;
Lantz E., Devaux F. // Eur. Phys. J. D. 2001. V. 17. P. 93.
14. *Souto Ribeiro P. H., Schwob C., Maître A., Fabre C.* // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 1893.
15. *Kolobov M. I., Kumar P.* // Opt. Lett. 1993. V. 18. P. 849.
16. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A., Kolobov M. I.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2000. V. 2. P. 196.
17. *Caves C. M.* // Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1817.
18. *Kolobov M. I., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1995. 1995. V. 52. P. 4930.
19. *Sokolov I. V., Kolobov M. I., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1998. V. 60. P. 2420.
20. *Choi S.-K., Vasilyev M., Kumar P.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1938.
21. *Wang K., Yang G., Gatti A., Lugiato L. A.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2003. V. 5. P. S535.

Литература, добавленная при переводе

22. *Белинский А. В., Чиркин А. С.* Сжатые состояния в ограниченных световых пучках // Вестник МГУ. Сер. физ., астроном. 1989. Т. 30, № 3. С. 38; Пространственные эффекты в сжатых состояниях световых пучков при параметрическом усилении // Квант. электроника. 1989. Т. 16. P. 2551.
23. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A.* Quantum Imaging // Progress in Optics. V. 51, Ch. 5. P. 251 / Ed. by E. Wolf. — Elsevier North-Holland, 2008.
24. *Shih Y.* Quantum Imaging. LANL. ArXiv: 0707.0268v1. 2007.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПЕРЕПУТЫВАНИЕ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОПТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ

*Алессандра Гатти, Энрико Брамбилла,
Оттавия Ждркевич, Луиджи А. Луджиато*

2.1. Введение

Эта глава вместе с главами 1 и 5 составляет единое целое. Материал, изложенный в них в терминах непрерывных переменных, отражает прогресс, достигнутый в области квантовых изображений в рамках проекта QUANTIM. В то время как результаты данной главы относятся к режиму бегущей волны при параметрическом взаимодействии, в главе 5 основное внимание уделено резонаторной конфигурации параметрического генератора света (ПГС). Структура изложения материала в этой главе такова. В разд. 2.2 описана теоретическая картина пространственного перепутывания излучения при синхронном взаимодействии второго типа. В отличие от большинства работ, посвященных параметрическому преобразованию частоты вниз, мы сосредоточим внимание на режиме больших коэффициентов параметрического усиления. В разд. 2.3 приведено описание экспериментов, подтверждающих теоретические предсказания разд. 2.2; это эксперименты, связанные с наблюдением квантовых корреляций в дальней зоне, а также с явлением пространственной антигруппировки фотонов. В последнем разд. 2.4 мы проиллюстрируем многофотонное многомодовое поляризационное перепутывание в режиме большого параметрического усиления. Вместо принятого обычно рассмотрения поляризационного перепутывания в одной паре сигнального и холостого фотонов, мы проанализируем коллективное поляризационное перепутывание на макроскопическом уровне.

2.2. Пространственные квантовые корреляции в ближней и дальней зонах при параметрическом синхронизме второго типа в режиме большого усиления

Этот раздел основан на результатах работы [1], и мы отсылаем читателя к ней, где имеется более детальное изложение проблемы.

2.2.1. Уравнение распространения для сигнальной и холостой волн и соотношение вход-выход. Представим электрическое поле как суперпозицию трех квазимонохроматических волновых пакетов (обозначив их E_0 , E_1

и E_2) с несущими частотами ω_0 , ω_1 и ω_2 , отвечающих соответственно полю накачки и сигнальному и холостому полям. Частоты выбраны таким образом, чтобы удовлетворить закону сохранения энергии $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Предполагая, что среднее направление распространения поля совпадает с осью z , и обозначив радиус-вектор в поперечной плоскости как $\mathbf{x} = (x, y)$, мы можем записать:

$$E_j(z, \mathbf{x}, t) \propto A_j(z, \mathbf{x}, t) e^{ik_j z - i\omega_j t} + \text{к. с.} \quad (j = 0, 1, 2), \quad (2.1)$$

где $k_j = n_j \omega_j / c$ — волновое число j -й волны на несущей частоте, распространяющейся вдоль оси z ; коэффициент отражения n_j для необыкновенной волны зависит от направления распространения, приводя к пространственному смещению.

В однопроходной конфигурации с длиной кристалла порядка нескольких миллиметров, истощение волны накачки вследствие параметрического преобразования, как правило, пренебрежимо мало, за исключением случаев использования лазерных источников с экстремально высокой интенсивностью. Поэтому мы будем использовать параметрическое приближение, в котором волна накачки рассматривается как заданное классическое поле, распространяющееся в кристалле линейно¹⁾, в то время как преобразованные поля — квантовые. Производя формальную замену для медленных амплитуд сигнального (S) и холостого (I) полей $A_j(z, \mathbf{x}, t) \rightarrow \hat{a}_j(z, \mathbf{x}, t)$ ($j = 1, 2$), мы получим следующие коммутационные соотношения в сечении z [2]:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i(z, \mathbf{x}, t), \hat{a}_j^\dagger(z, \mathbf{x}', t')] &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'), \\ [\hat{a}_i(z, \mathbf{x}, t), \hat{a}_j(z, \mathbf{x}', t')] &= 0 \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

которые справедливы в рамках параксиального и квазимонохроматического приближений. В этих обозначениях

$$\hat{I}_j(z, \mathbf{x}, t) = \hat{a}_j^\dagger(z, \mathbf{x}, t) \hat{a}_j(z, \mathbf{x}, t) \quad (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

есть оператор плотности потока фотонов, связанных с j -й волной. Математическое ожидание от этой величины дает среднее число фотонов, проходящих за единицу времени через единичное поперечное сечение пучка. В линейном режиме полевые операторы удовлетворяют тем же самым уравнениям, что и соответствующие классические амплитуды. Для наших целей удобно ввести операторы фурье-образов медленно меняющихся амплитуд поля по времени и пространственным координатам в поперечной плоскости:

$$\hat{a}_j(z, \mathbf{q}, \Omega) = \int \frac{d\mathbf{x}}{2\pi} \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \hat{a}_j(z, \mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + i\Omega t) \quad (j = 1, 2). \quad (2.4)$$

¹⁾ Авторы имеют ввиду линейность в смысле гамильтониана взаимодействия.

Аналогичное определение справедливо и для фурье-компоненты $A_0(z, \mathbf{q}, \Omega)$ медленной амплитуды классического поля накачки. В этом случае уравнения распространения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{a}_j(z, \mathbf{q}, \Omega)}{\partial z} = & i\delta_j(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_j(z, \mathbf{q}, \Omega) + \\ & + \sigma e^{-i\Delta_0 z} \int \frac{d\mathbf{q}'}{2\pi} \int \frac{d\Omega'}{\sqrt{2\pi}} A_0(z, \mathbf{q} - \mathbf{q}', \Omega - \Omega') \hat{a}_l^\dagger(z, -\mathbf{q}', -\Omega') \\ & (j, l = 1, 2; j \neq l) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где коэффициент связи σ пропорционален эффективной восприимчивости $\chi_{\text{eff}}^{(2)}$ второго порядка, характеризующей процесс параметрического преобразования; и

$$\delta_j(\mathbf{q}, \Omega) = k'_j \Omega + \frac{1}{2} k''_j \Omega^2 + \varrho_j q_y - \frac{1}{2k_j} (q_x^2 + q_y^2) \quad (j = 1, 2) \quad (2.6)$$

есть квадратичное разложение $k_{jz}(\omega_j + \Omega, \mathbf{q}) - k_j$ в окрестности ¹⁾ $\mathbf{q} = 0, \Omega = 0$, где через $k_{jz}(\omega_j + \Omega, \mathbf{q}) = \sqrt{k_j^2(\omega_j + \Omega, \mathbf{q}) - q^2}$ обозначена z -компонента волнового вектора, связанного с плоской волной $(\mathbf{q}, \Omega)_j$. В частности, угол сноса ϱ_j может быть найден как производная $\partial k_j / \partial q_y$, взятая в точке $\mathbf{q} = 0, \Omega = 0$. Более детальный вывод можно найти в [1-4].

Уравнение (2.5) содержит свертку в фурье-пространстве медленной амплитуды сигнального (холостого) поля с медленной амплитудой поля накачки. В приближении заданной накачки, ее амплитуда может быть выражена следующим образом:

$$A_0(z, \mathbf{q}, \Omega) = e^{i\delta_0(\mathbf{q}, \Omega)z} A_0(z = 0, \mathbf{q}, \Omega), \quad (2.7)$$

$$\delta_0(\mathbf{q}, \Omega) = k'_0 \Omega + \frac{1}{2} k''_0 \Omega^2 + \varrho_0 q_y - \frac{1}{2k_0} (q_x^2 + q_y^2), \quad (j = 1, 2), \quad (2.8)$$

Здесь плоскость $z = 0$ выбирается на входной грани кристалла. В дальнейшем мы будем полагать, что импульс накачки имеет гауссов профиль как в пространстве с радиусом перетяжки пучка w_0 , так и во времени с длительностью импульса τ_0 при $z = 0$:

$$A_0(z = 0, \mathbf{x}, t) = (2\pi)^{3/2} A_p \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right). \quad (2.9)$$

Тогда в фурье-представлении имеем:

$$A_0(z = 0, \mathbf{q}, \Omega) = 2\sqrt{2} \frac{A_p}{\delta q_0^2 \delta \omega_0} \exp\left(-\frac{q_x^2 + q_y^2}{\delta q_0^2}\right) \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\delta \omega_0^2}\right), \quad (2.10)$$

¹⁾ Такое разложение соответствует квазиоптическому приближению и второму приближению теории дисперсии.

где

$$\delta q_0 = 2/w_0, \quad \delta \omega_0 = 2/\tau_0, \quad (2.11)$$

обозначают соответственно характерную ширину полос пространственных и временных частот для поля накачки.

Рассмотрим предельный случай стационарной плоской волны накачки. В этом приближении w_0 и τ_0 стремятся к бесконечности и

$$A_0(z, \mathbf{q}, \Omega) \rightarrow (2\pi)^{3/2} A_p \delta(\mathbf{q}) \delta(\Omega). \quad (2.12)$$

Тогда уравнение (2.5) связывает только пару фазово-сопряженных волн $(\mathbf{q}, \Omega)_1$ и $(-\mathbf{q}, -\Omega)_2$, и может быть решено аналитически. Унитарное преобразование, связывающее операторы полей на выходной грани кристалла толщины l_c ($\hat{a}_{j,\text{out}}(\mathbf{q}, \Omega) \equiv \hat{a}_j(z = l_c, \mathbf{q}, \Omega)$) с их значениями на входной грани ($\hat{a}_{j,\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega) \equiv \hat{a}_j(z = 0, \mathbf{q}, \Omega)$) (преобразование вход-выход), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{q}, \Omega) &= U_1(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_{1\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega) + V_1(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_{2\text{in}}^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega), \\ \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{q}, \Omega) &= U_2(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_{2\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega) + V_2(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_{1\text{in}}^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega), \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{q}, \Omega) &= \exp \left[i \frac{\delta_1(\mathbf{q}, \Omega) - \delta_2(-\mathbf{q}, -\Omega) - \Delta_0}{2} l_c \right] \times \\ &\times \left[\cosh(\Gamma(\mathbf{q}, \Omega) l_c) + i \frac{\Delta(\mathbf{q}, \Omega)}{2\Gamma(\mathbf{q}, \Omega)} \sinh(\Gamma(\mathbf{q}, \Omega) l_c) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$V_1(\mathbf{q}, \Omega) = \exp \left[i \frac{\delta_1(\mathbf{q}, \Omega) - \delta_2(-\mathbf{q}, -\Omega) - \Delta_0}{2} l_c \right] \frac{\sigma_p}{\Gamma(\mathbf{q}, \Omega)} \sinh(\Gamma(\mathbf{q}, \Omega) l_c), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{q}, \Omega) &= \exp \left[i \frac{\delta_2(\mathbf{q}, \Omega) - \delta_1(-\mathbf{q}, -\Omega) - \Delta_0}{2} l_c \right] \times \\ &\times \left[\cosh(\Gamma(-\mathbf{q}, -\Omega) l_c) + i \frac{\Delta(-\mathbf{q}, -\Omega)}{2\Gamma(-\mathbf{q}, -\Omega)} \sinh(\Gamma(-\mathbf{q}, -\Omega) l_c) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$V_2(\mathbf{q}, \Omega) = \exp \left[i \frac{\delta_2(\mathbf{q}, \Omega) - \delta_1(-\mathbf{q}, -\Omega) - \Delta_0}{2} l_c \right] \frac{\sigma_p}{\Gamma(-\mathbf{q}, -\Omega)} \sinh(\Gamma(-\mathbf{q}, -\Omega) l_c), \quad (2.17)$$

где $\Delta_0 = k_1 + k_2 - k_0$ есть коллинеарная фазовая расстройка для центральных частотных компонент, и

$$\Gamma(\mathbf{q}, \Omega) = \sqrt{\sigma_p^2 - \frac{\Delta(\mathbf{q}, \Omega)^2}{4}}, \quad \sigma_p = \sigma A_p, \quad (2.18)$$

$$\Delta(\mathbf{q}, \Omega) = \Delta_0 + \delta_1(\mathbf{q}, \Omega) + \delta_2(-\mathbf{q}, -\Omega) \approx k_{1z}(\mathbf{q}, \Omega) + k_{2z}(-\mathbf{q}, -\Omega) - k_0. \quad (2.19)$$

Важно отметить, что функции усиления U_j и V_j , определяемые выражениями (2.14)–(2.17), удовлетворяют следующим условиям унитарности:

$$|U_j(\mathbf{q}, \Omega)|^2 - |V_j(\mathbf{q}, \Omega)|^2 = 1 \quad (j = 1, 2) \quad (2.20)$$

$$U_1(\mathbf{q}, \Omega)V_2(-\mathbf{q}, -\Omega) = U_2(-\mathbf{q}, -\Omega)V_1(\mathbf{q}, \Omega), \quad (2.21)$$

которые гарантируют сохранение коммутационных соотношений (2.2) для поля, распространяющегося в свободном пространстве. Далее мы будем рассматривать измерения как в ближней, так и в дальней зонах поля. Чтобы

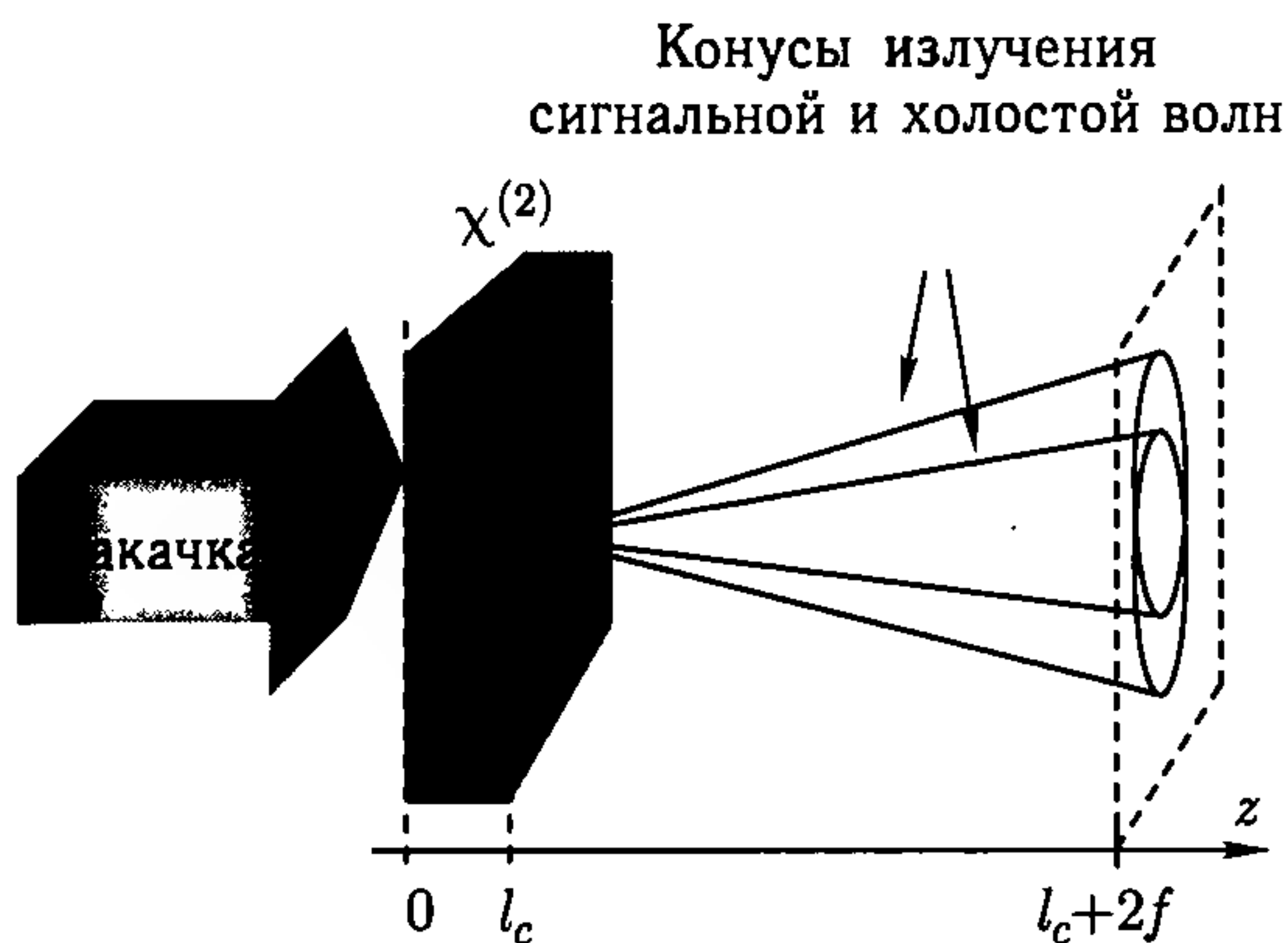


Рис. 2.1. Схема для наблюдения спонтанного параметрического рассеяния света в дальней зоне. Для получения изображения в дальней зоне используется линза (не показана на рисунке), расположенная на расстоянии $z = l_c + f$

упростить обозначения, мы будем опускать явные зависимости полей от z -координаты; в тех же случаях, когда это необходимо, мы будем помечать измеряемые величины символами π или π' , что будет соответствовать измерениям в ближней или дальней зонах (см. схему на рис. 2.1).

Теперь обратимся к случаю параметрического преобразования, вырожденного по частоте: $\omega_1 = \omega_2$, при $k_1 = k_2 = k$, однако $k'_1 \neq k'_2$ (см. (2.6)). При этом фазовая расстройка, накапливающаяся в ходе распространения полей, с учетом (2.19) и (2.6), может быть выражена так:

$$\Delta(\mathbf{q}, \Omega) l_c = \Delta_0 l_c + \text{sign} [k'_1 - k'_2] \frac{\Omega}{\Omega_0} - \varrho_2 q_y - \frac{q_x^2 + q_y^2}{q_0^2}, \quad (2.22)$$

где мы пренебрегли членами, пропорциональными Ω^2 . Здесь также предполагается, что сигнальная волна имеет обыкновенную поляризацию, поэтому $\varrho_1 = 0$, и обозначено:

$$q_0 = \sqrt{\frac{k}{l_c}}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{|k'_1 - k'_2| l_c}. \quad (2.23)$$

Параметры q_0 и Ω_0 — полосы пропускания пространственных и временных частот при параметрическом преобразовании.

Рис. 2.2 иллюстрирует изображения, которые получаются в дальней зоне при рассеянии одиночного импульса поля накачки в случае частотного вырождения при синхронизме второго типа. Представленные на рисунке картины получены при численном интегрировании уравнения (2.5), имеющего вид классического уравнения, с белым шумом на входе, моделирующим вакуумные флуктуации, которые, как хорошо известно и как будет показано в п. 2.2.3, инициируют процесс параметрического рассеяния. Длительность

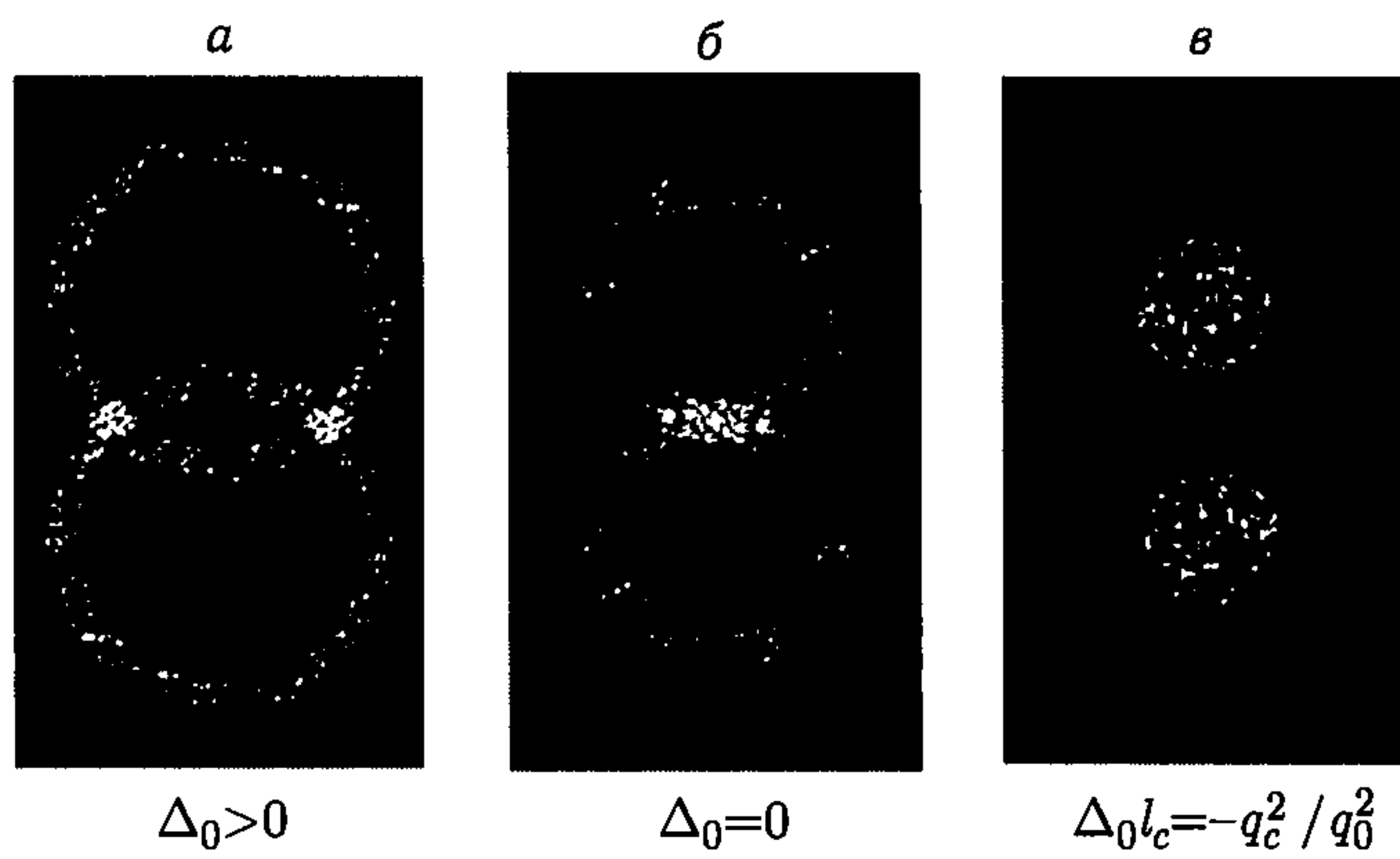


Рис. 2.2. Типичные изображения колец и кругов (численный расчет) при наблюдении в дальней зоне вырожденного спонтанного параметрического рассеяния при синхронизме второго типа. Изображения построены для трех различных значений коллинеарной фазовой расстройки $\Delta_0 l_c$ начиная с положительных значений до $\Delta_0 l_c = -(1/2\rho_2 l_c q_0)^2$, когда радиус колец равен нулю. Длительность импульса накачки $\tau_0 = 1,5$ пс; радиус перетяжки пучка накачки $w_0 = 664$ мкм ($\delta q_0/q_0 = 0,05$); фактор параметрического усиления $\sigma_p l_c = 4$

импульса накачки была равна 1,5 пс и выполнено условие широкой перетяжки пучка, $\delta q_0 \ll q_0$. Ширина колец определяется интервалом частот используемой численной решетки (шагом в численном расчете). В примерах, показанных на рис. 2.2, решетка работает как 15 нм интерференционный фильтр прямоугольной формы. Пики интенсивности (белые точки на рисунке) становятся все шире и шире при уменьшении перетяжки светового пучка w_0 , потому что их ширина имеет тот же порядок по величине, что и масштаб разрешения, зависящий, в свою очередь, от поперечного размера перетяжки пучка накачки, т. е. $x_{\text{diff}} = (\lambda f/2\pi)\delta q_0$. Отметим, что всякий раз, когда наблюдаются пики интенсивности в сигнальном кольце (рис. 2.2, а, б) или в круге (рис. 2.2 в), имеют место и симметричные пики интенсивности в кольце или круге холостого поля. Эта особенность будет подтверждена результатами эксперимента, приведенными в разд. 2.3.

2.2.2. Корреляции в ближней и дальней зонах в стационарном режиме и в приближении плоской волны накачки. Рассмотрим сначала корреляции в дальней зоне, возникающие благодаря сохранению поперечной составляющей импульса при генерации фотонных пар. В качестве системы регистрации мы выбираем два точечных детектора, расположенных симметрично по отношению к оси системы. Один из них детектирует сигнальные фотоны, другой — холостые (в случае необходимости сигнальные и холостые фотоны могут быть разделены с помощью поляризационной пластины, поскольку они поляризованы во взаимно-ортогональных направлениях).

Если наблюдение ведется с помощью пиксельной CCD-камеры, то нет возможности провести спектральные измерения, поскольку подобные устройства обладают очень низкой разрешающей способностью во времени. CCD-камеры просто измеряют полное число пришедших фотонов, рожденных в каждом одиночном импульсе накачки; при этом время измерения равно длительности

импульса накачки. В связи с этим мы вводим два оператора $\hat{N}_1$ и $\hat{N}_2$, отвечающие числу фотонов, детектируемых на двух пикселах за длительность импульса накачки, а также их флуктуации: $\delta\hat{N}_i = \hat{N}_i - \langle\hat{N}_i\rangle$ ($i = 1, 2$). В работе [1] аналитически показано, что в приближении плоской волны накачки флуктуации разности чисел фотонов $\hat{N}_- = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ полностью исчезают:

$$\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle = 0, \quad (2.24)$$

как и в случае СПР при синхронизме первого типа (см. (1.31)).

Обратимся теперь к корреляции в ближней зоне. В этом случае разделение сигнального и холостого фотонов благодаря эффекту «сноса» при распространении необыкновенной волны мало. Корреляции между сигнальным и холостым фотонами в ближней зоне возникают из-за того, что они генерируются в одной точке пространства. Поэтому нам следует рассматривать в этом случае два точечных детектора, расположенных рядом в ближней зоне. Для того чтобы выполнить измерения с физически пространственно разнесенными пикселями, сигнальный и холостой пучки можно разделить с помощью поляризационного делителя (см. подразд. 2.2.3). В ближней зоне результат (2.24) сохраняется только асимптотически, в пределе $l_c \rightarrow 0$ [1], или, более физично, когда площадь регистрирующего пиксела больше, чем площадь когерентности x_{coh}^2 , где

$$x_{\text{coh}} \equiv \frac{1}{q_0} = \sqrt{\frac{l_c}{k}}. \quad (2.25)$$

Эта конечная длина когерентности (корреляционная длина) обусловлена дифракционным расширением пучка СПР фотонов, пропорциональным квадратному корню из пройденного расстояния.

Заметим, что если принять во внимание потери в процессе детектирования, то «идеальный» результат $\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle = 0$ следует заменить на:

$$\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle = \eta(1 - \eta)\langle\hat{N}_+\rangle, \quad \langle\hat{N}_+\rangle = \langle\hat{N}_1\rangle + \langle\hat{N}_2\rangle, \quad (2.26)$$

где η — конечная квантовая эффективность детекторов.

Чтобы лучше понять пространственное перепутывание сигнального и холостого полей, удобно использовать шредингеровскую картину вместо гейзенберговской, которую мы применяли до сих пор. Для простоты мы не рассматриваем переменные время t и частоту ω до конца этого раздела. В представлении Шредингера состояние всех мод поля на входной грани кристалла вакуумное, т. е.:

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = \prod_{\mathbf{q}} |0, \mathbf{q}\rangle_1 |0, \mathbf{q}\rangle_2, \quad (2.27)$$

где обозначение $|n, \mathbf{q}\rangle_i$ указывает на состояние Фока с n фотонами в моде $\mathbf{q}$; индекс $i = 1(2)$, как обычно, указывает на сигнальную (холостую) волну. С другой стороны, в приближении плоской волны накачки состояние сигналь-

ного и холостого полей на выходной плоскости кристалла (в ближней зоне) можно записать как [3, 5]:

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \prod_{\mathbf{q}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathbf{q}) |n, \mathbf{q}\rangle_1 |n, -\mathbf{q}\rangle_2 \right\}, \quad (2.28)$$

где $c_n(\mathbf{q}) = \{U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})\}^n |U_1(\mathbf{q})|^{-(2n+1)}$. Выражение (2.28) представляет собой суперпозицию состояний с одинаковым числом фотонов в моде $\mathbf{q}$ сигнального поля и моде $-\mathbf{q}$ холостого поля. Это убедительно демонстрирует перепутанность импульсов сигнального и холостого фотонов, которая в дальней зоне приводит к пространственной перепутанности между положениями $\mathbf{x}$ и $-\mathbf{x}$ фотонов. Выражение (2.28) является собственной функцией оператора $\hat{N}_- = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ с нулевым собственным значением, что объясняет отсутствие флуктуаций N_- .

Отметим еще два важных момента. Первый касается случая, когда измеряется только одно из двух полей — для определенности, пусть это будет сигнальное поле, в то время как за холостым полем не следят. Тогда выходное состояние сигнального поля, полученное взятием следа по всем степеням свободы подсистемы холостого поля, описывается матрицей плотности:

$$\varrho_{1\text{out}} = \prod_{\mathbf{q}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\mathbf{q})|^2 |n, \mathbf{q}\rangle_{11} \langle n, \mathbf{q}| \right\}. \quad (2.29)$$

Нетрудно проверить, что

$$|c_n(\mathbf{q})|^2 = \frac{\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle^n}{[1 + \langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle]^{n+1}}, \quad (2.30)$$

($\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle$ — среднее число фотонов в моде $\mathbf{q}$), так что статистика фотонов сигнального поля — тепловая для всех мод $\mathbf{q}$. Такое же утверждение справедливо и для холостого поля. Следовательно, при $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle \gg 1$ число фотонов как сигнального, так и холостого полей сильно флуктуирует.

Второе замечание связано с тем, что почти во всей литературе, посвященной параметрическому рассеянию света, ограничиваются рассмотрением ситуации $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle \ll 1$. При этом состояние $|\psi\rangle_{\text{out}}$ редуцируется к

$$|\psi\rangle_{\text{out}} \approx \prod_{\mathbf{q}} c_0(\mathbf{q}) |0, \mathbf{q}\rangle_1 |0, -\mathbf{q}\rangle_2 + \sum_{\mathbf{q}} \left\{ c_1(\mathbf{q}) |1, \mathbf{q}\rangle_1 |1, -\mathbf{q}\rangle_2 \times \prod_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} c_0(\mathbf{q}') |0, \mathbf{q}'\rangle_1 |0, -\mathbf{q}'\rangle_2 \right\}. \quad (2.31)$$

В этом случае наблюдают совпадения одиночных фотонных пар. Еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем другую ситуацию, когда величина $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle$

не мала, что влечет необходимость сохранения большого числа членов в выражении (2.28) («макроскопический» случай).

Перепутывание положений между сигнальным и холостым фотонами в ближней зоне можно выявить следующим образом. В пределе тонкого кристалла, когда дифракцией и эффектом сноса можно пренебречь, коэффициенты $U_i(\mathbf{q})$ и $V_i(\mathbf{q})$ в (2.13) становятся практически постоянными относительно изменений $\mathbf{q}$, и могут быть заменены своими значениями при $\mathbf{q} = 0$. Обратное фурье-преобразование (2.13) к пространственным переменным $\mathbf{x}$ приводит к выражениям:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}) &= U_1(\mathbf{q} = 0)\hat{a}_{1\text{in}}(\mathbf{x}) + V_1(\mathbf{q} = 0)\hat{a}_{2\text{in}}^\dagger(\mathbf{x}), \\ \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}) &= U_2(\mathbf{q} = 0)\hat{a}_{2\text{in}}(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{q} = 0)\hat{a}_{1\text{in}}^\dagger(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.32}$$

где, как уже отмечалось, мы не учитываем зависимости от частоты Ω . Полученное выражение (2.32) является преобразованием вход-выход, оно локально относительно координаты $\mathbf{x}$ на выходной плоскости кристалла («ближняя зона»), и соответствующее выходное состояние имеет вид:

$$|\psi\rangle = \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathbf{q} = 0) |n, \mathbf{x}\rangle_1 |n, \mathbf{x}\rangle_2 \right\}.\tag{2.33}$$

Здесь $|n, \mathbf{x}\rangle$ означает состояние Фока с n фотонами в точке $\mathbf{x}$. В этом пределе существует полная, идеальная коррелированность числа фотонов сигнального и холостого полей в одной и той же точке ближней зоны (перепутывание по положению или «позиционное перепутывание»).

2.2.3. Корреляции в ближней и дальней зонах: результаты численных расчетов в общем случае. Теперь мы обсудим результаты, полученные при численном моделировании, учитывающем влияние пространственной ограниченности накачки. Представляющие интерес квантовые средние, т.е. корреляции числа фотонов, рассчитываются с помощью стохастического метода, основанного на представлении Вигнера. По сравнению с другими представлениями в фазовом пространстве представление Вигнера имеет то преимущество, что при его использовании s -числовые стохастические уравнения, эквивалентные уравнениям для полевых операторов (2.5), не содержат ланжевеновских источников шума (благодаря линейности и отсутствию потерь), и поэтому, идентичны классическим уравнениям распространения. Вследствие этого статистический характер квантовых полей полностью заключен в стохастичности входного поля (для более детального обсуждения см., например, [6]). В фазовом пространстве для входного поля мы генерируем распределение вероятности, соответствующее гауссовскому белому шуму с нулевым средним значением, что моделирует вакуумное состояние с распределением Вигнера [7]. Затем проводим численное интегрирование уравнения (2.5) с таким входным полем. При этом мы используем пошаговый алгоритм ¹⁾ [8], в котором по отдельности интегрируются члены, описы-

¹⁾ В отечественной литературе такой подход к численному решению нелинейных уравнений принято называть «расщепление по физическим факторам».

ющие линейное распространение, и члены, описывающие процесс волнового смешения. Первое интегрирование выполняется в фурье-пространстве, вторые — в обычных пространственных координатах. Полученное поле на выходе используется для расчета интересующих нас корреляционных функций. Вся процедура повторяется достаточно большое число раз, так чтобы выполняемое стохастическое усреднение стало хорошим приближением соответствующим квантовым средним значениям. Кроме того, необходимо внести некоторые коррекции, правильно упорядочив операторы, поскольку вигнеровское представление соответствует квантовым средним значениям симметризованных произведений операторов.

2.2.4. Корреляции в дальней зоне. Рассмотрим подробно систему, описанную в [10]. Лазерный импульс с высокой интенсивностью и длительностью 1,5 пс поступает на вход кристалла β -бората бария (ВВО) длиной 4 мм, вырезанный для фазового синхронизма типа II. В примере, который мы рассматриваем, волна накачки падает под углом близким к $48,2^\circ$ по отношению к оптической оси кристалла, а вырожденное по частоте СПР наблюдается в окрестности длины волны $\lambda_1 = \lambda_2 = 704$ нм с 10 нм интерференционным фильтром. Мы исследовали корреляции в импульсном пространстве, следя за двумя симметричными направлениями распространения и измеряя корреляции в дальней зоне (в плоскости π'). На рис. 2.3 построена зависимость дисперсии $\hat{N}_-$ (в единицах дробового шума) от размера детектора d для различных значений перетяжки пучка накачки w_0 . Величина d нормирована на пространственный масштаб распределения числа фотонов в дальней зоне, $x_{\text{coh}} = \frac{\lambda f}{2\pi} q_0$. Видно, что уровень флуктуации существенно ниже уровня дробового шума только в том случае, когда размер области детектирования

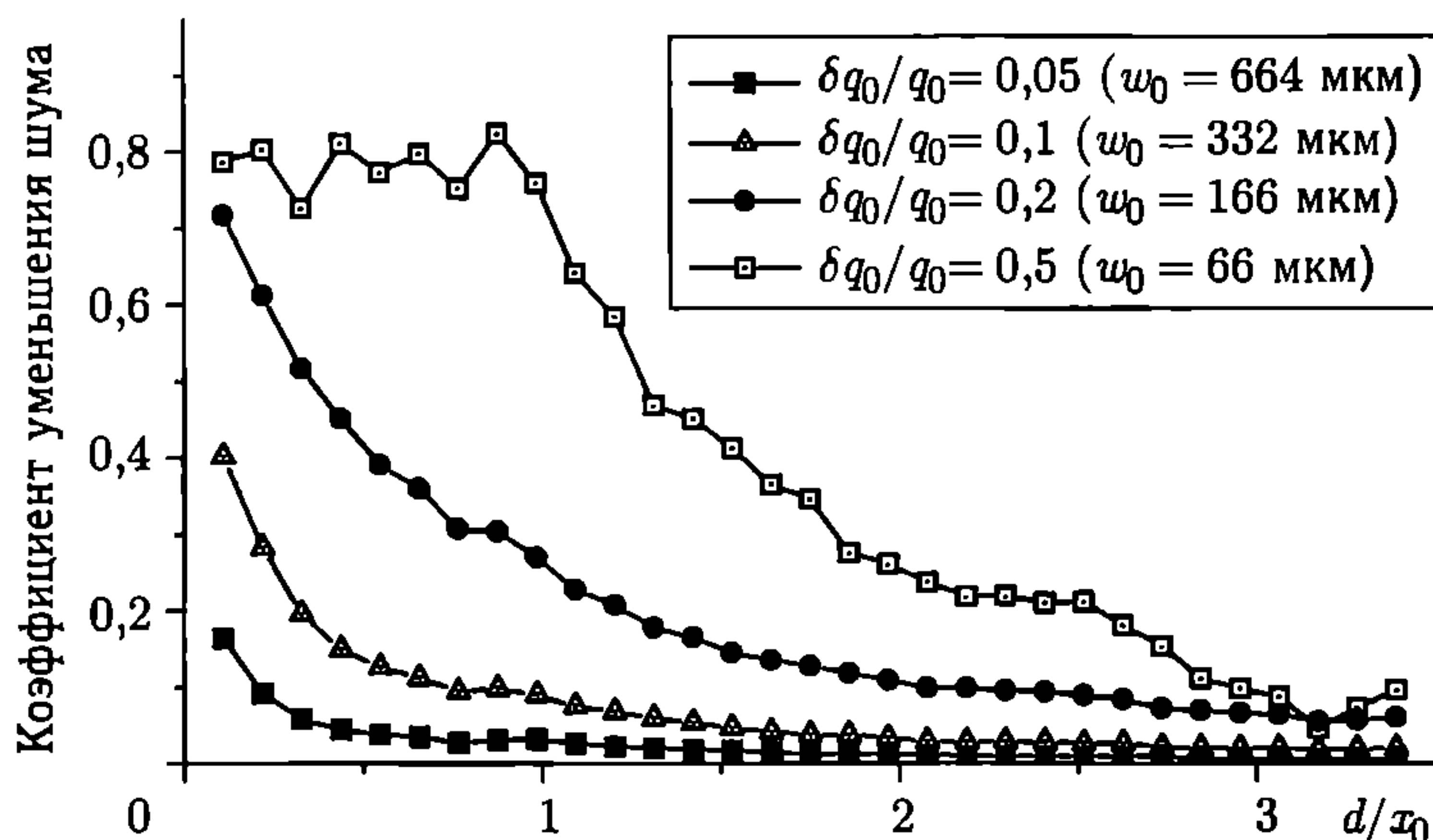


Рис. 2.3. Корреляции в дальней зоне: зависимость $\langle(\delta\hat{N}_-)^2\rangle_{\pi'}/\langle\hat{N}_+\rangle_{\pi'}$ построена как функция размера детектора d для разных значений параметра $\delta q_0/q_0$. Фактор параметрического усиления $\sigma_p l_c = 4$; значение коллинеарной фазой расстройки отрицательно и равно $\Delta_0 l_c = -(1/2\varrho_2 l_c q_0)^2 = -74,4$. Картина интенсивности поля, отвечающая данному графику, представлена на рис. 6

превышает характерный масштаб разрешения системы: $x_{\text{diff}} = (\lambda f)/(2\pi)\delta q_0$, то есть при $d/x_{\text{coh}} > \delta q_0/q_0$.

2.2.5. Корреляции в ближней зоне. Главное преимущество фазового синхронизма второго типа заключается в том, что сигнальное и холостое поля имеют различную поляризацию, а потому манипулирование ими упрощается. В частности, можно измерить их взаимные корреляции в ближней зоне после того как пучки будут физически разделены с помощью поляризационного делителя (см. рис. 2.4). Линзы L и L' , изображенные на рисунке, просто

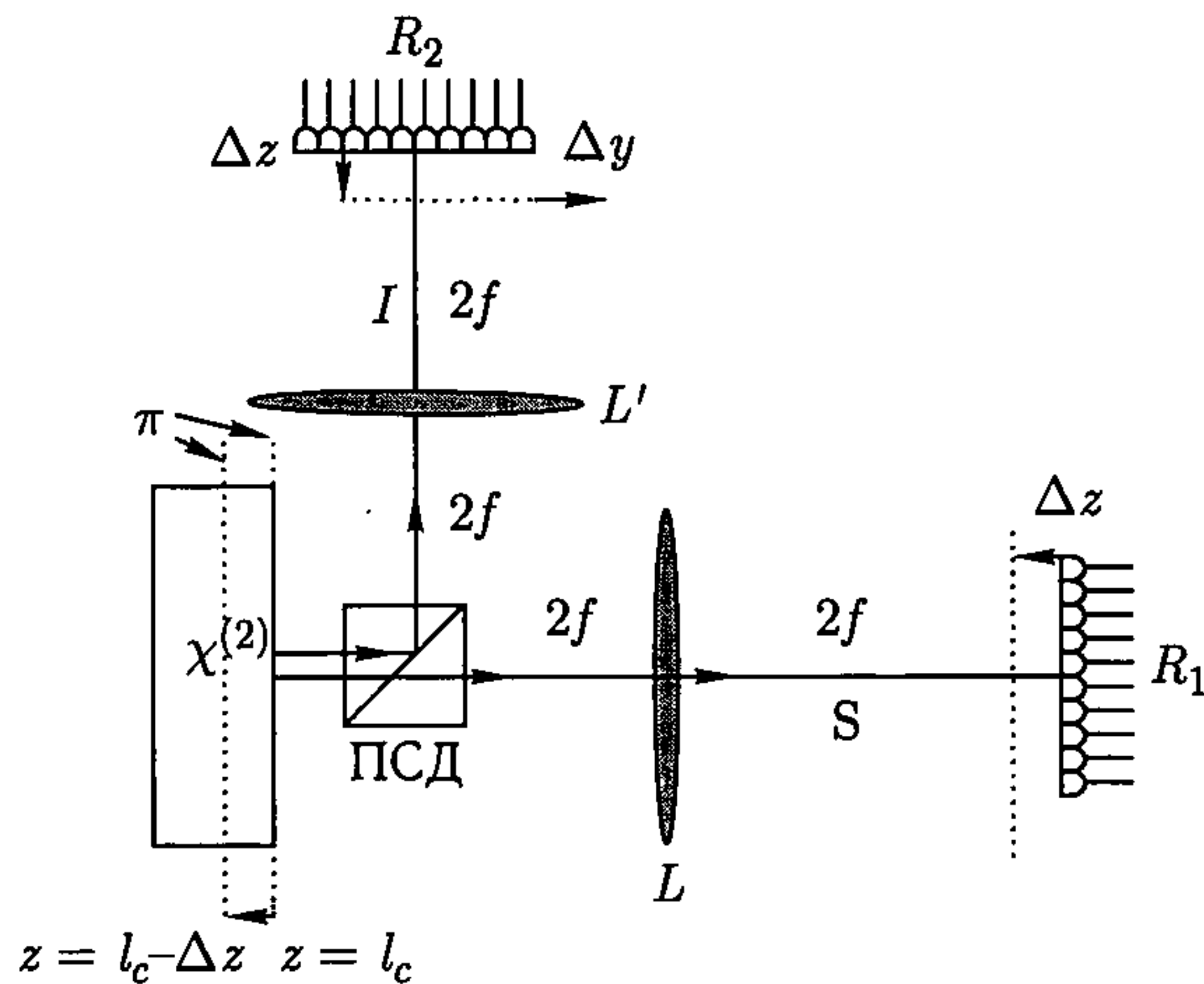


Рис. 2.4. Схема измерения пространственных корреляций в ближней зоне. Поляризационный светоделитель (ПСД) разводит сигнальный и холостой пучки света. Ближняя зона каждого из полей $\pi : z = l_c - \Delta z$ отображается с помощью линз L и L' на пиксельные детекторы R_1 и R_2 , расположенные в плоскости, сопряженной плоскости π . Δz и Δy указывают на сдвиги оптических устройств, необходимые для оптимизации измерения

выполняют $2f - 2f$ перенос изображения из плоскости ближней зоны π в две плоскости детектирования. Заметим, мы полагаем здесь, что плоскость π расположена в некоторой глубине внутри кристалла и имеет координату z . Корреляционные функции сигнального (S) и холостого (I) полей демонстрируют заметные пики при $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, что соответствует позиционному перепутыванию S/I фотонов, которые рождаются парами в одной точке кристалла. Ширина пика имеет порядок длины когерентности $x_{\text{coh}} = 1/q_0$. В численном эксперименте, результаты которого изображены на рис. 2.5, использован кристалл ВВО и 2-й тип фазового синхронизма в тех же условиях, что описаны выше. Длина когерентности в ближней зоне: $x_{\text{coh}} = 16,6$ мкм. График показывает коэффициент уменьшения шума $\langle (\delta \hat{N}_-)^2 \rangle_\pi / \langle \hat{N}_+ \rangle_\pi$, рассчитанный численно, в зависимости от размера детектора d , нормированного на x_{coh} . Если плоскость наблюдения π в ближней зоне совпадает с выходной гранью кристалла $z = l_c$ (кривая, отмеченная треугольниками), то флуктуации существенно подавлены только тогда, когда d примерно в 15 раз больше, чем x_{coh} . Лучший результат (черные квадраты) получается при построении изображения, если плоскость детектирования находится на расстоянии Δz внутри кристалла: $z = l_c - \Delta z$. Кроме того, пиксельные детекторы в сигнальном и холостом



Рис. 2.5. Корреляции в ближней зоне: отношение $\langle (\delta \hat{N}_-)^2 \rangle_\pi / \langle \hat{N}_+ \rangle_\pi$ построено как функция размера детектора d . Параметры гауссовской импульсной накачки: $w_0 = 332$ мкм ($\delta q_0/q_0 = 0,1$) и $\tau_0 = 1,5$ пс ($\delta \omega_0/\Omega_0 = 1,14$). Фактор параметрического усиления $\sigma_p l_c = 3$ и условие фазового синхронизма то же, что и на рис. 2.2, в: $\Delta_0 l_c = -(1/2 \rho_2 l_c q_0)^2$, так что радиусы колец в дальней зоне становятся равными нулю при вырождении по частоте. Кривая, рассчитанная с учетом компенсации эффектов дифракции и сноса пучка (обозначена квадратами), проходит существенно ниже соответствующей кривой, построенной без поправок на эти эффекты (обозначенной треугольниками). Пунктирная кривая отвечает аналитическому решению в приближении плоской волны накачки

плечах следует сдвинуть на расстояние Δy относительно друг друга в поперечной плоскости, чтобы компенсировать эффект сноса пучка (см. рис. 2.4). Процедура оптимизации, учитывающая эффекты сноса пучка и дифракции при распространении вдоль кристалла, детально описана в [1].

2.3. Измерение пространственных корреляций ниже уровня дробового шума при СПР в режиме большого усиления

В этом разделе мы опишем первое экспериментальное наблюдение пространственного перепутывания в дальней зоне, которое мы обсудили теоретически и численно в подразделах 2.2.2 и 2.2.3.

Материалы этой главы базируются на результатах, опубликованных в [11, 12].

На сегодня существует довольно много работ, посвященных пространственным эффектам в режиме слабого усиления, когда фотонные пары измеряются с помощью схемы совпадений [13]. Среди этих работ есть также несколько экспериментов по изображениям (например, фантомной интерференции [14]), основанных на пространственных корреляциях бифотонов, хотя недавние исследования [15, 16] показали, что некоторые из этих экспериментальных результатов можно воспроизвести с помощью классически коррелированных фотонов. Подлинно квантовые пространственные эффекты были показаны в [17], где продемонстрирована пространственная антигруппировка фотонов, и в [18], где реализован ЭПР-парадокс относительно соотношения неопределенности фотонов для координаты и импульса.

Недавние теоретические исследования, выполненные для произвольного параметрического усиления [1, 19], предсказали наличие многомодовых пространственных корреляций ниже уровня дробового шума между различными участками излучаемых конусов сигнального и холостого пучков, соответствующим фазово-сопряженным модам. Этот вид связи между волновыми векторами, то есть корреляций в дальней зоне, является многомодовым аналогом хорошо известного эффекта пучков-близнецов, т. е. корреляцией между всем сигнальным и всем холостым пучками при уровне шума ниже дробового. Этот эффект был наглядно продемонстрирован, например, в [20] в режиме среднего коэффициента параметрического усиления. Пространственные корреляции также исследовались в режиме слабого усиления [21, 22] с помощью высокочувствительной CCD-камеры, хотя количественно оценить их квантовую природу не представлялось возможным. Совсем недавно эксперименты по измерению малых смещений за рэлеевским пределом [23] и реализация бесшумового усиления оптических изображений [24] сделали очевидными потенциальные возможности таких многомодовых квантовых корреляций в режиме большого числа фотонов для приложений. Цель нашего эксперимента — продемонстрировать предсказанный квантовый характер корреляций, которые можно наблюдать в дальней зоне при СПР.

Далее представлено описание измерений в дальней зоне излучения, возникающего при СПР, при облучении нелинейного кристалла β -бората бария лазерными импульсами накачки с низкой частотой повторения (2 Гц) и высокой импульсной мощностью (1 ГВт в 1 пс импульсе).

В эксперименте использовалась специальная многопиксельная цифровая камера (CCD-камера) высокой эффективности с размером пиксела порядка характерной площади разрешения (или площадки когерентности в дальней зоне) x_{diff}^2 , где $x_{\text{diff}} = (\lambda f / 2\pi) \delta q_0$ — масштаб разрешения.

Использование мощной импульсной накачки позволило нам перевести СПР в режим большого усиления, сохраняя при этом большой поперечный размер пучка накачки (порядка 1 мм). Благодаря огромному числу поперечных мод излучения, мы могли выделить часть параметрической люминесценции, близкой к коллинеарному направлению и находящейся в узкой спектральной полосе около частоты вырождения. Эта доля излучения все еще содержала большое число (> 1000) пар сигнальных/холостых коррелированных фазово-сопряженных мод, распространяющихся в симметричных направлениях относительно распространения накачки, удовлетворяя условию фазового синхронизма. В дальней зоне, где производилось измерение, парам скоррелированных мод соответствуют пары симметричных пятен, которые можно рассматривать как независимые эквивалентные пространственные копии одной квантовой системы. Благодаря очень большому числу этих пар пятен, статистическое усреднение по ансамблю, необходимое для квантовых измерений, может быть сделано независимо по пространственным копиям в каждом отдельном лазерном импульсе накачки. Таким образом, в отличие от эксперимента [20], где статистика набиралась по различным временным копиям системы, здесь нет временного усреднения по последовательным лазерным импульсам. В нашем эксперименте измерения в каждом одиночном импульсе

выявили пространственные корреляции ниже уровня дробового шума при усилении СПР, соответствующем детектированию до $\simeq 100$ фотоэлектронов на моду [11].

2.3.1. Изучение пространственных особенностей излучения СПР в дальней зоне с помощью CCD-камеры. Прежде чем переходить к количественным исследованиям пространственных корреляций между сигнальным и холостым пучками, мы опишем часть установки, связанную с генерацией параметрического излучения. Нелинейный кристалл ВВО, вырезанный под синхронизм второго типа, с размерами $5 \times 7 \times 4$ мм³ в режиме параметрического усиления вакуумных флуктуаций накачивался третьей гармоникой (352 нм) 1 пс чирпированного импульса от неодимового лазера на стекле (TWINKLE, Light Conversion Ltd.). Входная и выходная грани кристалла имели антиотражающие покрытия для длин волн 352 нм и 704 нм соответственно. Пучок накачки (вертикально поляризованный (е)) пространственно фильтровался и коллимировался, так что его перетяжка, характеризуемая полной шириной по полувысоте, равнялась приблизительно 1 мм на входной грани кристалла. Энергию импульса накачки (352 нм) можно было непрерывно менять в диапазоне 0,1–0,4 мДж с помощью ослабляющих фильтров, а также при изменении энергии лазерного импульса накачки (1055 нм), позволяя достичь коэффициента усиления G по интенсивности в диапазоне

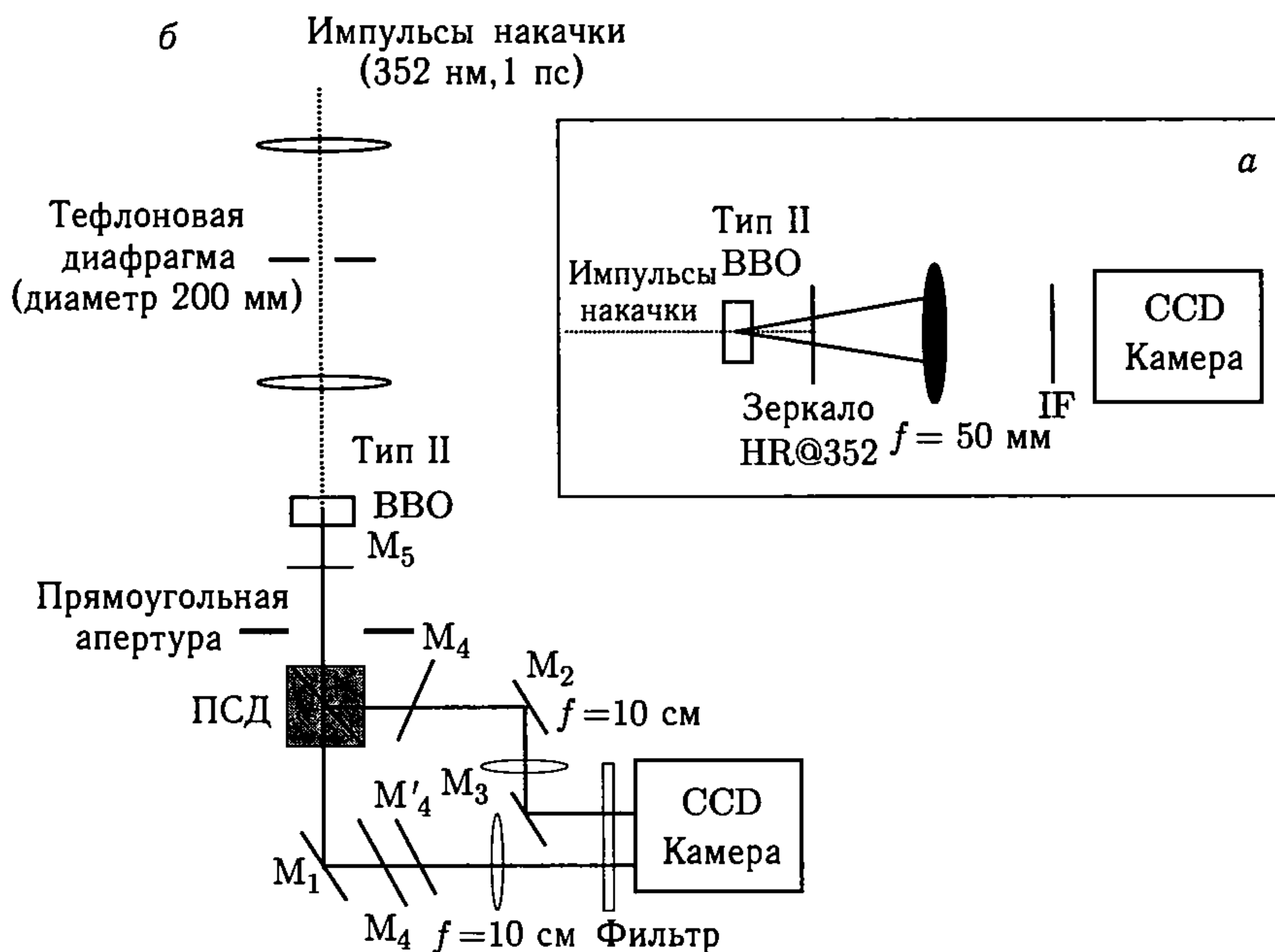


Рис. 2.6. а) Схема диагностики кольцевых мод вырожденных сигнальной и холостой волн в дальней зоне. б) Детальная схема экспериментальной установки для измерения пространственных корреляций. Накачка осуществляется третьей гармоникой неодимового лазера на стекле с длиной волны 352 нм; кристалл ВВО вырезан под углами ($\theta = 49,05^\circ$, $\phi = 0$), обеспечивающими вырожденное взаимодействие с длиной волны 704 нм. ПСД — поляризационный светоделитель

$10 \leq G \leq 10^3$. Параметрическая флюоресценция горизонтально поляризованной (о) сигнальной и вертикально поляризованной (е) холостой мод излучалась в два конуса, угловые размеры которых зависят от длин волн (см., например, [10]). Кристалл ВВО ($\theta = 49,05^\circ$, $\phi = 0$) ориентирован так, чтобы генерируемые конусы излучения (сигнальный и холостой) касались коллинеарного направления при вырождении по частоте $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ (индексы s , i и p соответствуют сигнальной и холостой волнам и волне накачки).

Для измерений в дальней зоне была собрана простая установка, изображенная на рис. 2.6. CCD-камера [25] (Roper Scientific, NTE/CCD-400ENRBG1, с квантовой эффективностью $\eta \approx 89\%$ на 704 нм), запускаемая импульсом лазерной системы, располагалась в фокальной плоскости линзы большого диаметра ($f = 5$ см), которая собирает на расстоянии f параметрическое излучение кристалла ВВО, соответствующее дальней зоне. Используемая CCD-камера представляет собой массив из 1340×400 пикселей,

с размером каждого пиксела $20 \text{ мкм} \times 20 \text{ мкм}$. Излучение на частоте накачки удалялось с помощью зеркала с высоким коэффициентом отражения (HR) на длине волны 352 нм, которое располагалось нормально к направлению распространения излучения за кристаллом ВВО. Используя интерференционный фильтр (IF) с полосой 10 нм, центрированной на длине волны 704 нм, мы имели возможность сделать видимыми излучаемые в параметрическом процессе вырожденные сигнальный и холостой пучки в дальней зоне. Важно отметить, что без какой-либо спектральной фильтрации излучение оказывается испущенным в очень широком диапазоне длин волн и углов (см., например, [10]). Типичные изображения в дальней зоне, полученные в вырожденном режиме за один 1 пс импульс накачки, представлены на рис. 2.7 для двух различных значений интенсивности накачки и, в приведенных частных случаях, для двух различных поперечных размеров пучка накачки. Угловое распределение в форме колец определяется условиями фазового синхронизма [10], и в вырожденном случае угловая ширина каждого из колец составляет около 8° . Заметим,

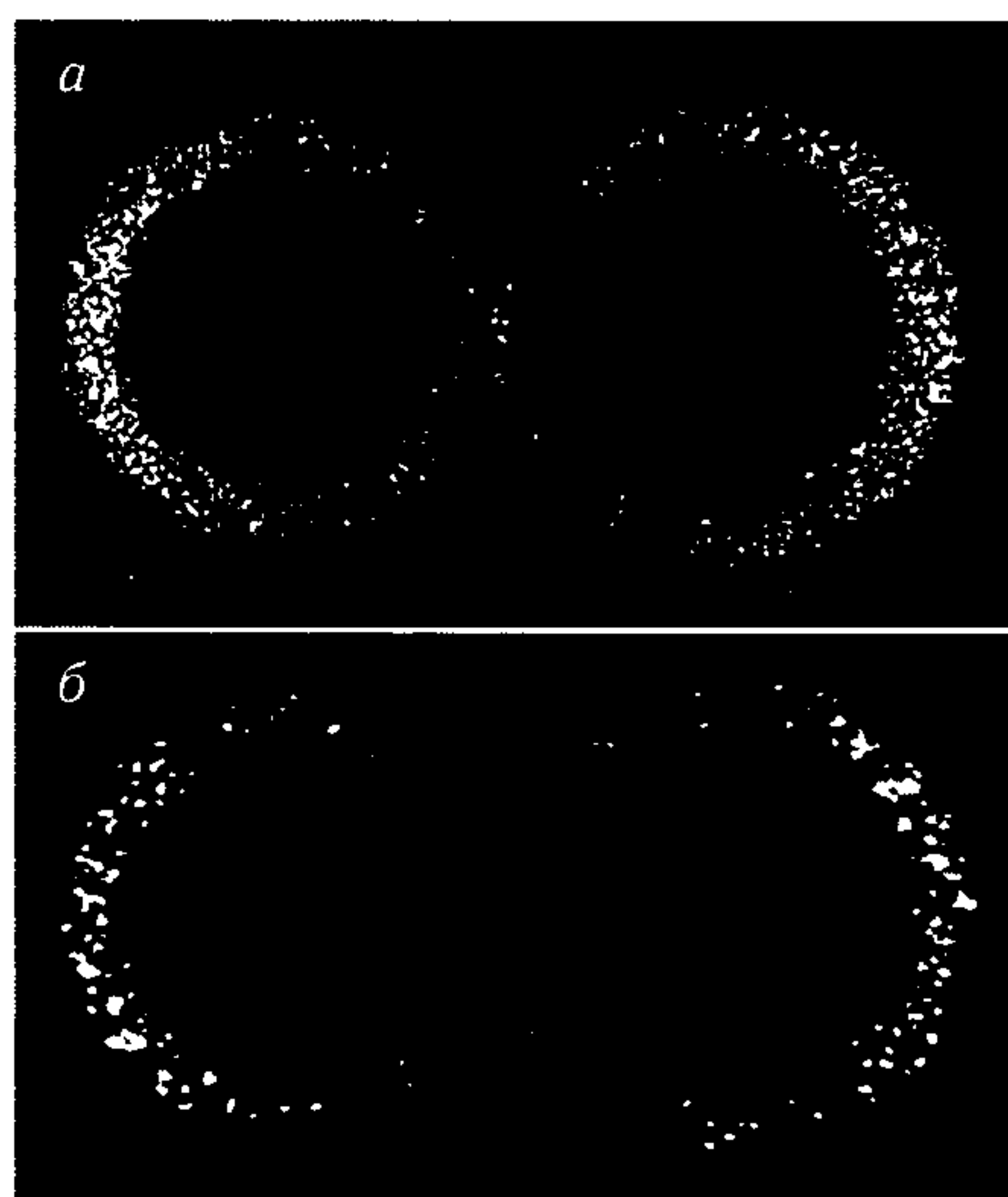


Рис. 2.7. Экспериментальные изображения в дальней зоне для вырожденных сигнального (левое кольцо) и холостого (правое кольцо) пучков света. Изображения получены за один импульс накачки с помощью CCD-камеры, помещенной в фокальной плоскости линзы ($f = 5$ см); интенсивность поля накачки: а) $I \approx 30 \text{ ГВт/см}^2$, и б) $I \approx 50 \text{ ГВт/см}^2$; ширина пучка накачки по поперечному размеру составляла 1 мм (а) и 0,4 мм (б) соответственно

что в данной установке два кольца, излучаемые вдоль вертикального направления, записывались при вращении CCD-камеры на 90° , чтобы иметь возможность уместить весь рисунок целиком в прямоугольном цифровом процессоре. Полученные изображения колец похожи по форме на результаты

наших численных расчетов (рис. 2.2, б). Детальное сравнение теории с экспериментом, а также обсуждение распределения фотонов по кольцу можно найти в [12].

2.3.2. Экспериментальная установка для пространственно-коррелированных измерений. Существование пространственных корреляций уже явствует из симметричного характера картин сигнального и холостого полей, полученных экспериментально и показанных на рис. 2.7. Однако чтобы выявить и исследовать квантовый характер этих корреляций, мы использовали экспериментальную установку, изображенную на рис. 2.6, б, где по сравнению с рис. 2.6, а выбрана иная диагностическая конфигурация. Пучок накачки имел размер 1 мм, но теперь выделялась часть излучения в окрестности коллинеарного направления с помощью диафрагмы размером 5 мм × 8 мм, расположенной на расстоянии 15 см от выходной грани кристалла ВВО. Затем излучение проходило через поляризационный делитель (PBS), который разводит сигнальный и холостой пучки. Пучок коллимировали, чтобы избежать дополнительных потерь рассеянного излучения на поляризационном делителе. Затем пучки поступали на два пространственно разделенных участка CCD-камеры, расположенных в общей фокальной плоскости двух линз ($f = 10$ см) и используемых для получения изображения сигнального и холостого полей в дальней зоне. В этой экспериментальной установке корреляционные измерения выполнялись без применения каких-либо узкополосных фильтров, так как они неизбежно вносят существенные потери, уменьшая тем самым возможность наблюдения корреляций ниже уровня дробового шума, и приводят к искажению и ослаблению эффектов. В данной установке от вклада на частоте накачки избавлялись с помощью двух зеркал с высоким коэффициентом отражения на длине волны 352 нм, одно из которых (M_5) располагалось перед поляризационным делителем PBS и ориентировалось нормально к оси распространения, а другое зеркало (M_4) — за PBS под углом 45° . Кроме того использовался узкополосный цветной фильтр (коэффициент пропускания 90% в окрестности 704 нм), помещаемый перед CCD-камерой. Заметим, что второй поляризационный делитель (не показан на рисунке) расположен в плече (е) холостого пучка, для того чтобы избавиться от остаточного обыкновенного (о) излучения, отраженного первым делителем PBS (3%), а зеркало HR@352 нм (M'_4) помещалось в плечо сигнального пучка под подходящим углом, чтобы сбалансировать потоки излучения в обоих плечах. Все оптические элементы (за исключением цветного фильтра) имели антиотражающее покрытие на 704 нм. По оценкам квантовая эффективность каждого канала детектирования с учетом потерь пропускания и эффективности детектора составляла $\eta_{\text{tot}} \simeq 75\%$.

Стоит отметить, что прежде чем проводить эксперимент по измерению квантовых пространственных корреляций, мы протестировали возможности CCD-камеры, выполнив измерения пространственного разрешения дробового шума. Используемая для диагностики CCD-камера была фактически попиксельно откалибрована, так чтобы компенсировать неодинаковость усиления на разных пикселях CCD-процессора, позволяя наблюдать пуассоновскую статистику пространственных флуктуаций при стандартном облучении во всем

динамическом диапазоне камеры [26]. Восстановление статистики дробового шума в полном динамическом диапазоне ССD-камеры с помощью классического источника подготавливает почву для измерений пространственно разрешимого фотонного шума ниже дробового уровня и оказывается необходимым шагом к выявлению квантовых свойств изображений посредством ССD-диагностики.

Рисунок 2.8, *а* показывает типичное изображение в дальней зоне, зарегистрированного при параметрическом рассеянии одиночного импульса при конфигурации эксперимента, схематически изображенной на рис. 2.6, *б*, когда полоса излучения, выделенная должным образом, т.е. пропущенная через прямоугольную щель, оказывается в сигнальном (слева) и холостом (справа) плечах установки. Выделение требуемых временных и угловых полос пропускания в окрестности вырождения проведено при помощи интерференционного фильтра с шириной 10 нм в окрестности 704 нм, помещенного перед ССD-камерой, что позволило нам определить положение точки коллинеарного вырождения (см. рис. 2.8, *б*). Анализ данных ограничен двумя прямоугольными участками (черные прямоугольники на рис. 2.8, *а*), соответствующими угловой полосе пропускания $20 \text{ мрад} \times 8 \text{ мрад}$, и спектральной полосе меньше 10 нм. Выделенные области содержат по 4000 пикселей каждая; среднее число фотонов на каждом из них приблизительно одинаково, так что пространственное усреднение производится по идентичным копиям. Поскольку целью данной работы является исследование парных пиксельных корреляций, и так как размер пиксела ССD-камеры приблизительно соответствует физическому размеру копии (т.е. области когерентности в дальней зоне), данный ансамбль является достаточно большим, чтобы набрать требуемую статистику. Увели-

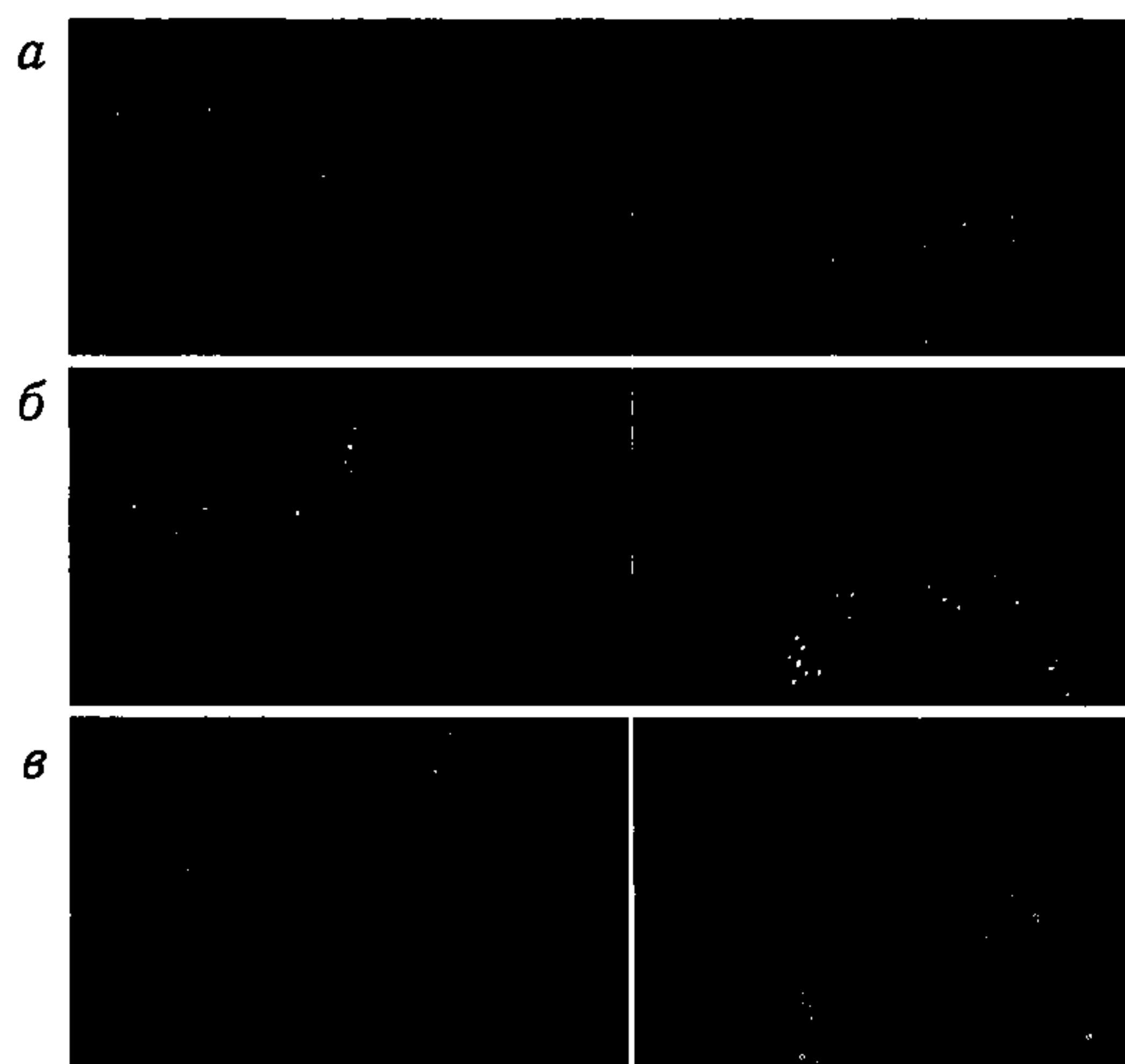


Рис. 2.8. *а*) Изображение в дальней зоне, полученное с помощью ССD-камеры, для одиночного импульса накачки с интенсивностью $I \simeq 30 \text{ ГВт/см}^2$. Пространственные области на изображении сигнальной и холостой мод, выбранные для статистического анализа, выделены черными прямоугольниками. *б*) Изображение после интерференционного фильтра с шириной 10 нм. *в*) Увеличенные участки двух симметрично расположенных изображений сигнального и холостого полей в дальней зоне

ченное изображение выделенных областей представлено на рис. 2.8, в. Весьма наглядная симметрия распределений интенсивностей в сигнальном и холостом плечах указывает на попарное перепутывание фазово-сопряженных мод, характерное для пучков-близнецов.

2.3.3. Измерение квантовых пространственных корреляций: пространственный аналог антигруппировки фотонов во времени. Картины распределения пятен интенсивности сигнального и холостого полей в дальней зоне, рассматриваемые по отдельности, имеют зернистый вид и похожи на пятна, происходящие от псевдо-теплового источника, такого как, например, матовое стекло, освещаемое лазерным пучком. Когда такой тепловой свет разделяется макроскопическим устройством, таким как делительная пластина, на два пучка, между последними имеется высокая пространственная корреляция, которая, однако, ограничена уровнем дробового шума. Пространственные корреляции сигнального и холостого пучков, рождающихся в процессе СПР, в отличие от теплового света, имеют микроскопическую природу и не ограничены дробовым шумом. Целью данного эксперимента было как раз продемонстрировать эту природу пространственных корреляций СПР-пучков. Сначала мы исследовали корреляции симметрично расположенных пар пикселей, измерив экспериментально дисперсию σ_{s-i}^2 разности фотоэлектронов $n_s - n_i$ на таких пикселях, детектирующих сигнальное/холостое поля в зависимости от среднего суммарного числа фотоэлектронов, появляющихся в процессе СПР и детектируемых парой пикселей $\langle n_s + n_i \rangle$. Дисперсия равна:

$$\sigma_{s-i}^2 = \langle (n_s - n_i)^2 \rangle - \langle n_s - n_i \rangle^2. \quad (2.34)$$

В эксперименте средние оценивались по пространственному усреднению, выполненному по набору эквивалентных симметрично расположенных пар пикселей, заключенных в выбранной области образца, и для которых среднее числа фотонов приблизительно одинаково (см. рис. 2.8, а, в). Каждый одиночный импульс лазера порождает различные ансамбли, характеризуемые своим собственным средним суммарным числом фотоэлектронов $\langle n_s + n_i \rangle$, в зависимости от коэффициента параметрического усиления. Варьируя энергию импульса накачки, экспериментально имели ансамбли, соответствующие различным коэффициентам усиления. Заметим, что выходной измеряемый шум детектора, его темновой ток и неизбежные потери света в поле накачки, сигнальном и холостом полях вносят заметный вклад в фоновый шум процесса. Все эти шумы учитываются с помощью стандартной корректирующей процедуры (см., например, [27]), путем вычитания флуктуаций фона σ_b^2 из эффективно измеряемой дисперсии $\sigma_{(s+b)-(i+b)}^2$ разности полных интенсивностей (сигнальное поле + фон) – (холостое поле + фон), получая в результате $\sigma_{s-i}^2 = \sigma_{(s+b)-(i+b)}^2 - 2\sigma_b^2$.

На рис. 2.9 приведены экспериментальные данные; каждая точка соответствует разным лазерным импульсам накачки. Данные нормированы на уровень дробового шума, а их статистический разброс приведен с учетом коррекции фона. Хотя шум сигнального и холостого полей в отдельности очень велик (много больше, чем уровень дробового шума этих полей, опре-

деляемый как $\langle n_s \rangle$ и $\langle n_i \rangle$ соответственно), мы видим несомненное наличие корреляций сигнального и холостого полей на симметрично расположенных пикселах ниже уровня дробового шума, вплоть до усиления, характеризуемых значением $\langle n_s + n_i \rangle \approx 15-20$. Поскольку в этом режиме наблюдаемый поперечный размер области когерентности (т.е. размер моды) составляет порядка 2–4 пиксела, это соответствует 100 фотоэлектронам на моду. Максимальный уровень подавления шума, наблюдавшийся экспериментально, согласуется с теоретическим пределом (пунктирная линия на рис. 2.9), определяемым полными потерями в системе ($\sim 1 - \eta_{\text{tot}}$ [1]).

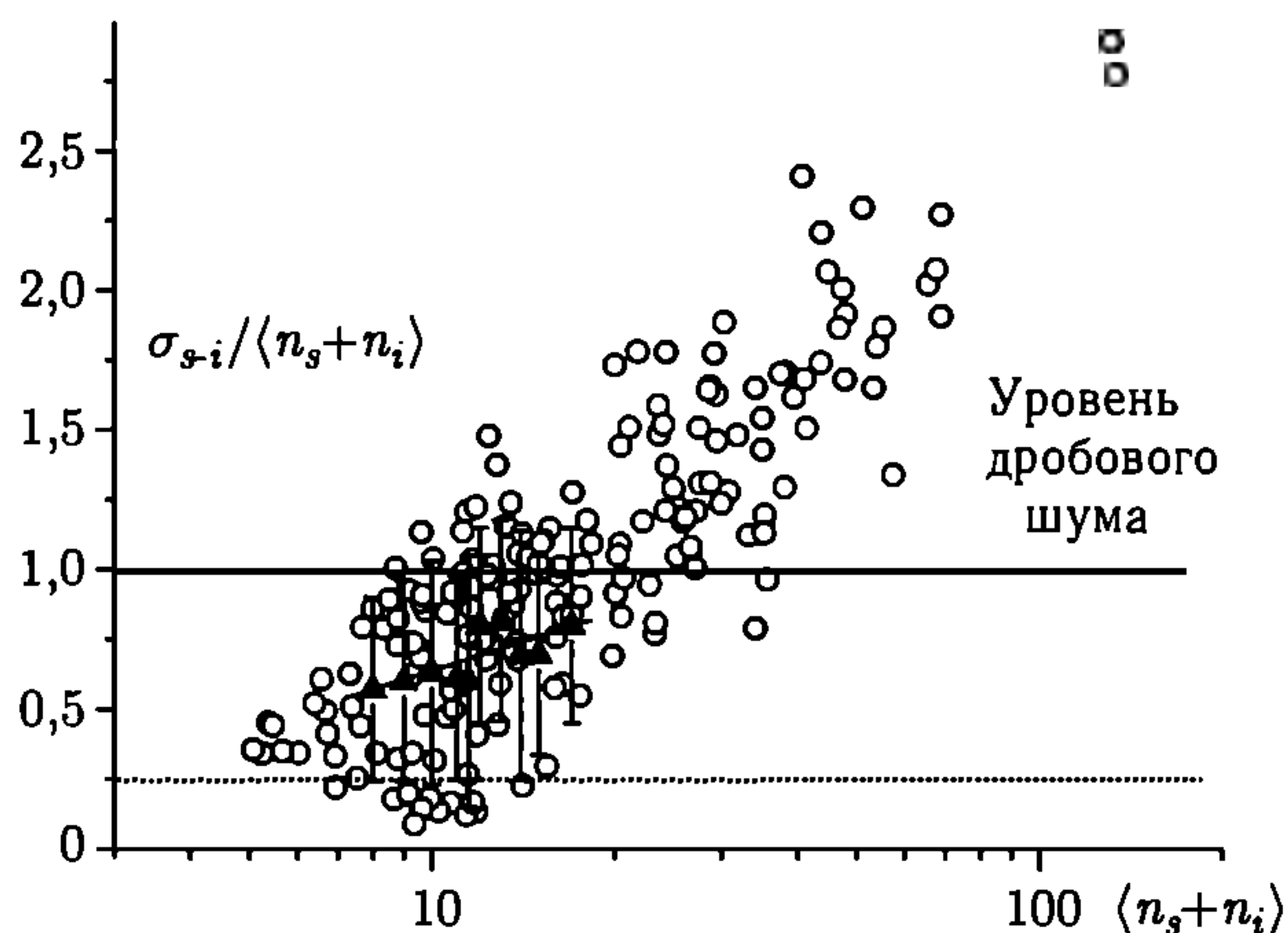


Рис. 2.9. Дисперсия разности интенсивностей σ_{s-i}^2 , нормированная на уровень дробового шума $\langle n_s + n_i \rangle$. Каждый белый кружок соответствует измерению за один импульс накачки при усреднении по пространственному статистическому ансамблю из 100×40 пикселей. Треугольники (каждый из которых получен при усреднении экспериментальных точек, отвечающих некоторому значению усиления) и их линейная интерполяция, демонстрируют тенденцию изменения дисперсии в области значений $\langle n_s + n_i \rangle$ от 8 до 20 фотоэлектронов

Мы можем составить представление о поперечном размере моды, следя за степенью парных кросс-корреляций между пикселами, детектирующими сигнальное и холостое поля в пределах черного прямоугольника (см. рис. 2.8) и образующими угловую симметрию:

$$\gamma = \frac{\langle n_s n_i \rangle - \langle n_s \rangle \langle n_i \rangle}{\sqrt{\sigma_s^2 \sigma_i^2}}, \quad (2.35)$$

Эта величина может быть построена, например, как функция горизонтальных и вертикальных сдвигов записываемого изображения на CCD-камере, при сохранении неизменным положения прямоугольника. В общем случае $|\gamma| \leq 1$; идеальной корреляции соответствует значение $\gamma = 1$. Поперечные сечения корреляционной функции γ изображены на рис. 2.10, а–г как функция горизонтального сдвига x (в единицах пикселей) и отвечают изображениям, полученным от четырех одиночных импульсов накачки при различном усилении. На рис. 2.10, д построен полный трехмерный график корреляционной функции при том же значении усиления, что и на рис. 2.10, а. Можно за-

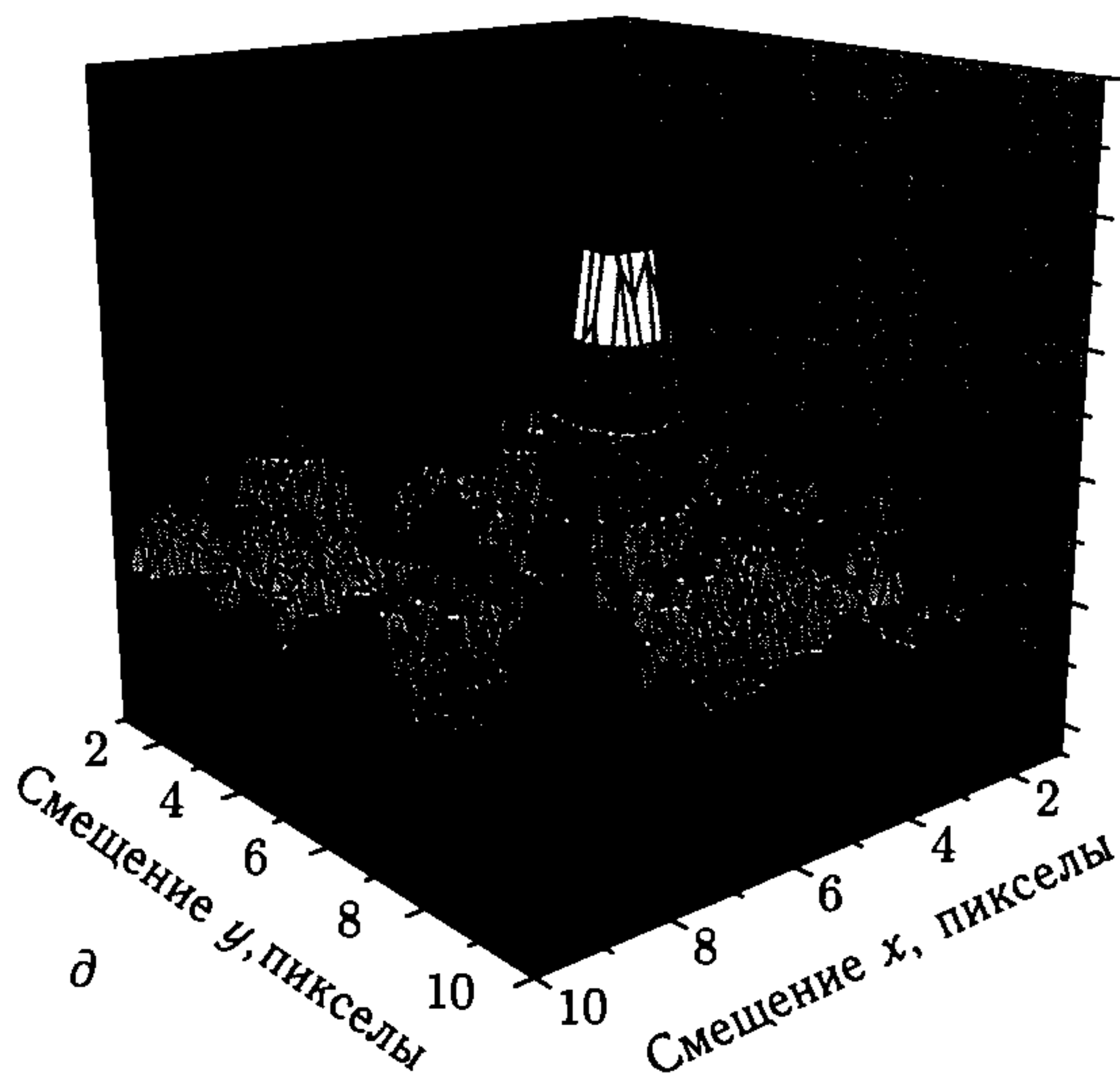
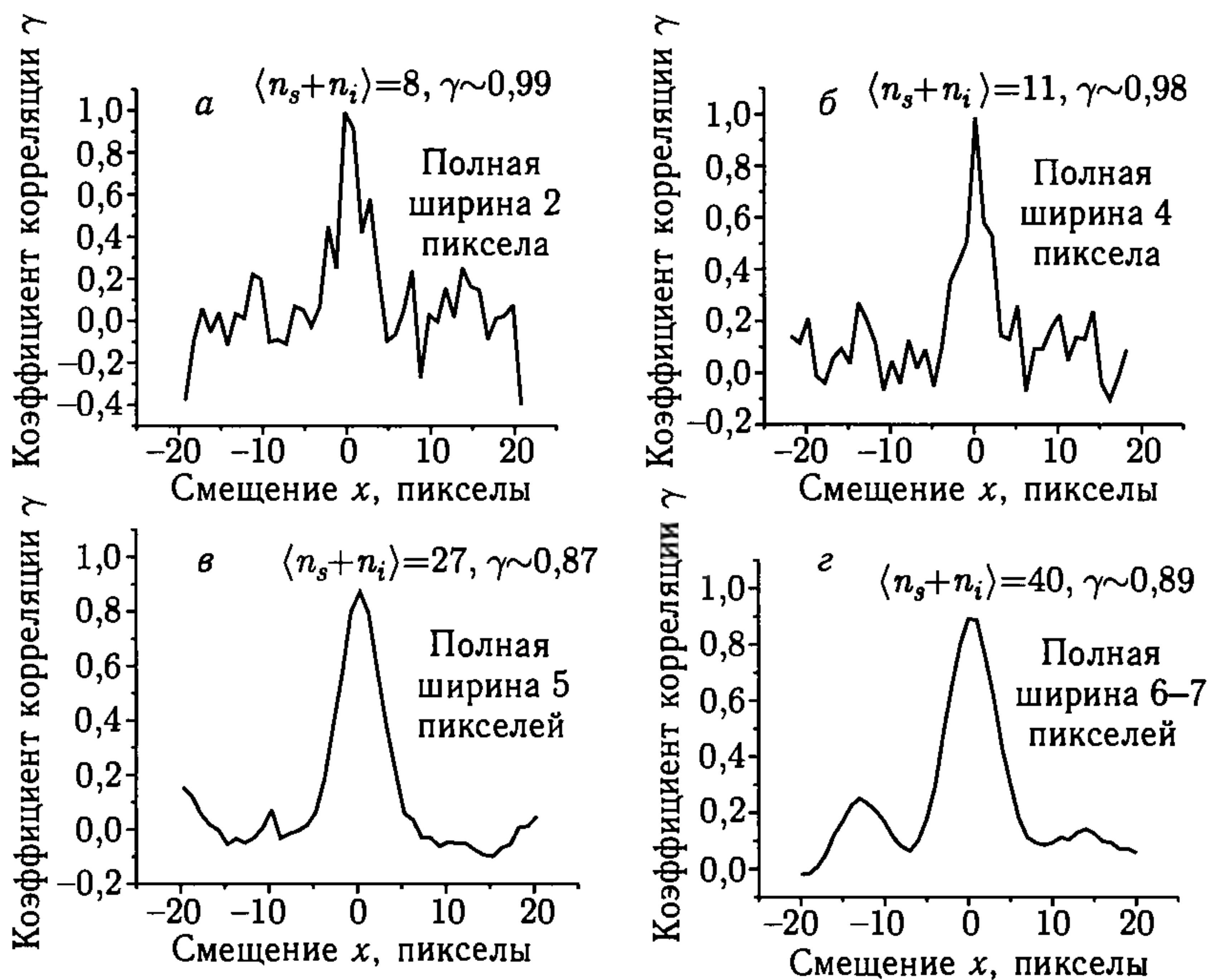


Рис. 2.10. Профили функции коэффициента корреляции (а–г), построенные для четырех различных значений коэффициентов усиления. д) Трехмерный график корреляционной функции, соответствующий случаю (а), в зависимости от горизонтальных и вертикальных сдвигов записываемого изображения на CCD-камере

метить, что значение полной ширины на полувысоте кривых увеличивается с ростом усиления, явно отражая увеличение размера пятна и, тем самым, размера поперечной моды, что уже отмечалось при обсуждении рис. 2.7. Как и ожидалось, практически идеальная корреляция (в нашем случае высота пика γ достигала $\simeq 0,99$) наблюдается при полной определенности (т. е. с точ-

ностью до одного пиксела) положения центра симметрии между «сигнальной» и «холостой» областями измерения.

Интересно отметить, что квантовая природа корреляций может быть также оценена из величины пика степени корреляции. В самом деле, так как

$$\sigma_{s-i}^2 = \langle (n_s - n_i - \langle n_s \rangle + \langle n_i \rangle)^2 \rangle = \sigma_s^2 + \sigma_i^2 - 2(\langle n_s n_i \rangle - \langle n_s \rangle \langle n_i \rangle), \quad (2.36)$$

условие подавления шума ниже дробового предела для дисперсии разностной интенсивности

$$\sigma_{s-i}^2 < \langle n_s + n_i \rangle, \quad (2.37)$$

может быть переписано в виде

$$\gamma > 1 - \frac{\langle n_{s,i} \rangle}{\sigma_{s,i}^2}, \quad (2.38)$$

если мы используем определение (2.35) и предположение, что

$$\langle n_s \rangle \simeq \langle n_i \rangle \equiv \langle n_{s,i} \rangle \quad \text{и} \quad \sigma_s^2 \simeq \sigma_i^2 \equiv \sigma_{s,i}^2. \quad (2.39)$$

Неравенство (2.38) подтверждается экспериментально с хорошей степенью точности. Далее, мы можем переписать (2.38), принимая во внимание, что, как известно, сигнальный и холостой пучки взятые по отдельности демонстрируют статистику подобную тепловой. Поэтому $\sigma_s^2 \approx \sigma_i^2 \equiv \sigma_{s,i}^2 \approx \langle n_{s,i} \rangle (1 + \langle n_{s,i} \rangle / M)$ [28], где M — параметр вырождения, представляющий число пространственных и временных мод, попадающих в объем детектирования пиксельных детекторов. В условиях обсуждаемого эксперимента длительность импульса накачки немногим превышала время когерентности СПР, тогда как площадь поверхности пиксела меньше площади когерентности; таким образом ожидаемое значение M лишь немного больше единицы [27]. Используя это, получаем:

$$\gamma > \frac{\langle n_{s,i} \rangle}{M + \langle n_{s,i} \rangle}. \quad (2.40)$$

Рис. 2.11 демонстрирует тенденцию поведения максимума γ при различных значениях усиления (черные треугольники) для шести изображений. Пунктирная линия соответствует классической границе γ_b , полученной путем интерполяции функции $\gamma_b = 1 - \langle n_{s,i} \rangle / \sigma_{s,i}^2$, рассчитанной при различных усилениях, используя наши экспериментальные данные для средних значений и дисперсий. Сплошная кривая — теоретическая, рассчитанная по формуле (2.40), используя значение $M = 2,4$ как подгоночный параметр. Таким образом, мы наблюдаем пространственные квантовые корреляции всякий раз, когда значения γ попадают в область над кривой, отвечающей теоретическому квантовому пределу. Этот предел становится более высоким при увеличении усиления. Полученные экспериментальные величины, как и следовало ожидать, укладываются в ход кривых, построенных на рис. 2.9. Эти данные позволяют нам выделить область квантовых корреляций, ограничивая ее значениями $\langle n_s + n_i \rangle$ вплоть до 20 фотоэлектронов. Это значит, что, к приме-

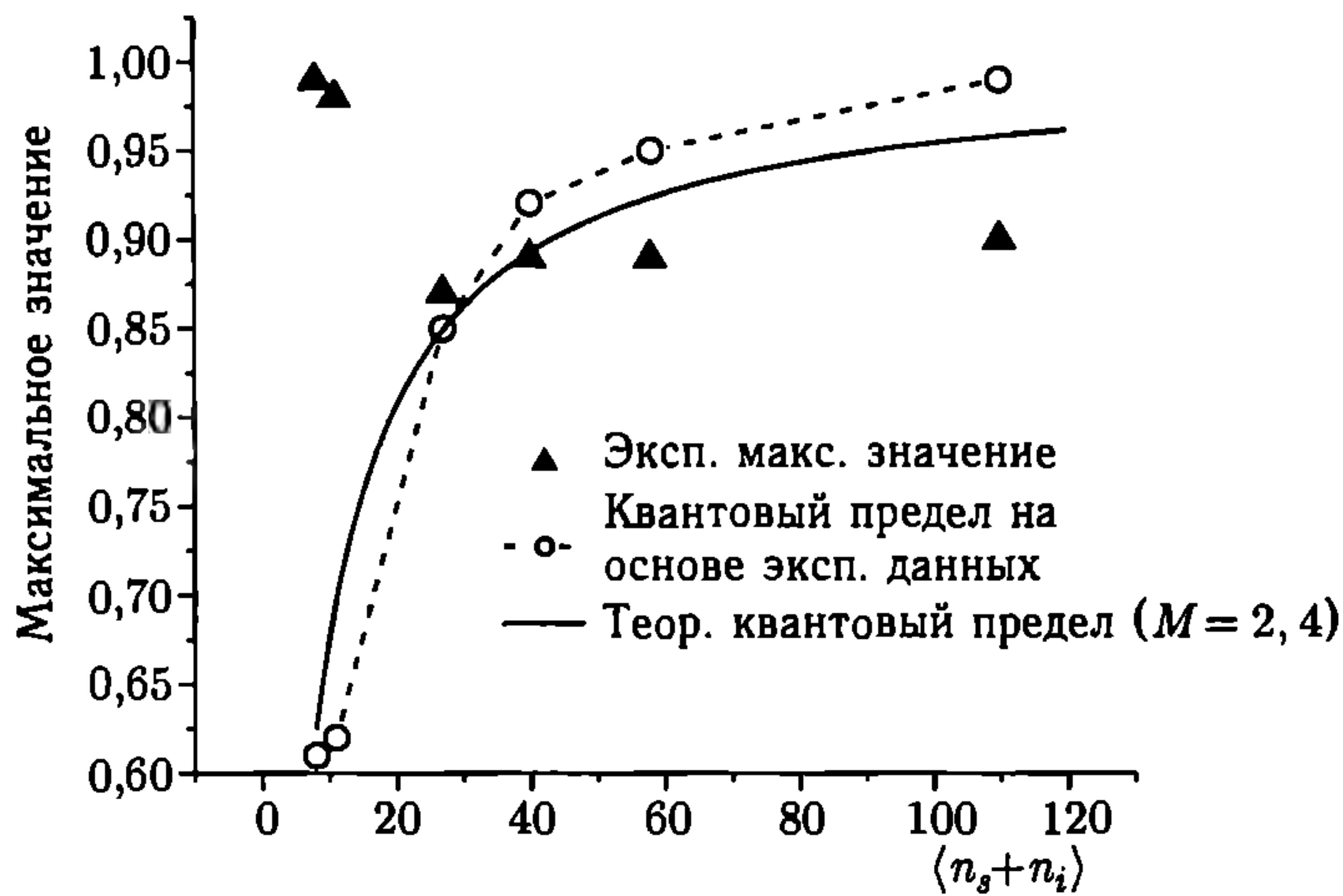


Рис. 2.11. Значения коэффициентов корреляции (треугольники), полученные экспериментально для шести изображений сигнального/холостого поля в дальней зоне, отвечающих различным значениям коэффициента усиления

ру, первые три треугольника на рис. 2.9 слева очевидно соответствуют трем изображениям, характеризующим дисперсией разностной интенсивности ниже уровня дробового шума; в то же время другие три треугольника отвечают изображениям, характеризующим дисперсией разностной интенсивности выше уровня дробового шума.

Наконец, следует отметить, что, умножив (2.38) на $\sigma_{s,i}^2$, с учетом (2.35) и (2.39) нетрудно получить:

$$\langle n_s n_i \rangle - \langle n_s \rangle \langle n_i \rangle > \sigma_{s,i}^2 - \langle n_{s,i} \rangle. \quad (2.41)$$

Вводя обозначения

$$\langle \delta n_s \delta n_i \rangle \equiv \langle n_s n_i \rangle - \langle n_s \rangle \langle n_i \rangle \quad (2.42)$$

и

$$\langle : \delta n_{s,i}^2 : \rangle \equiv \sigma_{s,i}^2 - \langle n_{s,i} \rangle, \quad (2.43)$$

где символ «: :» указывает на нормальный порядок операторов, мы приходим к неравенству:

$$\langle : \delta n_s \delta n_i : \rangle = \langle \delta n_s \delta n_i \rangle \geq \langle : \delta n_{s,i}^2 : \rangle = [\langle : \delta n_s^2 : \rangle \langle : \delta n_i^2 : \rangle]^{1/2}. \quad (2.44)$$

Это неравенство эквивалентно условию подавления шума ниже дробового предела (2.38), и утверждает, что для этого необходимо, чтобы кросскорреляции между сигнальным и холостым полями были бы больше, чем нормально упорядоченные автокорреляции. Это требование ведет к очевидному нарушению неравенства Коши–Шварца. Обсуждаемый эффект был предсказан в [31–33] для случая параметрического генератора света, и затем обобщен [19] на случай вырожденного оптического параметрического усилителя бегущей волны. Он является пространственным аналогом явления антигруппировки фотонов во времени и был экспериментально продемонстрирован

в режиме совпадения фотонов [17]. Наш эксперимент является первым свидетельством сохранения данного явления и в режиме большого усиления.

В нашем эксперименте мы обнаружили переход от квантового к классическому режиму при увеличении усиления, проходящий по сценарию, аналогичному [20]. В работе [12] можно найти обсуждение этого перехода, а также эффектов, возникающих при неточном определении центра симметрии сигнального-холостого поля.

2.4. Многофотонное и многомодовое поляризационное перепутывание в спонтанном параметрическом рассеянии

В этом разделе мы рассмотрим поляризационные степени свободы пучков, рождающихся в процессе спонтанного параметрического распада, наряду с их пространственными степенями свободы. Представленные здесь результаты основываются на материалах статьи [3], где читатель может найти их более детальное изложение.

Квантовые свойства поляризации света широко исследовались в режиме счета единичных фотонов. В сравнении с этим, интерес к квантовым свойствам поляризации макроскопических световых пучков возник лишь недавно [34, 35] и связан в основном с их потенциальными приложениями в области квантовой информации в непрерывных переменных, а также с возможностью записи квантового состояния света на атомную среду [36]. Спонтанное параметрическое рассеяние второго типа, возможно, является наиболее хорошо известным источником поляризационно-перепутанных фотонов. Из-за пространственного смещения (сноса) в кристалле необыкновенного пучка по отношению к обыкновенному два конуса излучения, соответствующие горизонтально и вертикально поляризованным пучкам, слегка смещены один относительно другого (см. рис. 2.1), и распределения интенсивности в дальней зоне имеют форму двух колец, центры которых смещены вдоль направления сноса (рис. 2.2). При некоторой ориентации осей кристалла кольца в дальней зоне пересекаются, например, как показано на рис. 2.2, а, и точки (области) пересечения колец играют очень важную специфическую роль. В режиме измерения одиночных пар фотонов поляризация фотона, детектируемого в одной из этих областей, полностью неопределена. Однако, если поляризация одного из фотонов была измерена, поляризация второго фотона, распространяющегося в симметричном направлении, оказывается в точности известной. Другими словами, когда мы рассматриваем фотодетектирование в указанных областях, двухфотонное состояние является идеальным поляризационно-перепутанным [37]. Фотоны, рождающиеся в этом процессе, стали неотъемлемой составной частью многих недавних реализаций квантово-информационных схем [38, 39].

Вопрос, который мы хотели бы прояснить здесь, это сохраняются ли какие-либо следы микроскопического перепутывания при СПР в режиме большой эффективности, когда рождается достаточно большое (макроскопическое) число фотонов, и, если сохраняются, то в какой форме.

Квантово-оптические поляризационные свойства света удобно описывать в формализме операторов Стокса, представляющих собой квантовый аналог

векторов Стокса, хорошо известных в классической оптике. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям, подобным соотношениям для угловых моментов, и соответствующие им наблюдаемые величины, вообще говоря, не измеримы одновременно. Наша задача — изучить квантовые корреляции между параметрами Стокса, измеренные на симметричных участках поперечного сечения пучка в дальней зоне. Для этого мы рассмотрим измерение операторов Стокса СПР-поля в плоскости дальней зоны на малом участке $D(\mathbf{x})$ в окрестности точки $\mathbf{x}$ за время наблюдения T (время T обычно много больше времени когерентности поля в кристалле):

$$\hat{S}_i(\mathbf{x}) = \int_T dt' \int_{D(\mathbf{x})} d\mathbf{x}' \hat{s}_i(\mathbf{x}', t'). \quad (2.45)$$

Обозначив через $\hat{a}_H$, $\hat{a}_V$ операторы поля с горизонтальной и вертикальной поляризациями соответственно, запишем:

$$\hat{s}_0(\mathbf{x}, t) = \hat{a}_H^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_H(\mathbf{x}, t) + \hat{a}_V^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_V(\mathbf{x}, t), \quad (2.46)$$

$$\hat{s}_1(\mathbf{x}, t) = \hat{a}_H^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_H(\mathbf{x}, t) - \hat{a}_V^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_V(\mathbf{x}, t), \quad (2.47)$$

$$\hat{s}_2(\mathbf{x}, t) = \hat{a}_H^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_V(\mathbf{x}, t) + \hat{a}_V^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_H(\mathbf{x}, t), \quad (2.48)$$

$$\hat{s}_3(\mathbf{x}, t) = -i[\hat{a}_H^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_V(\mathbf{x}, t) - \hat{a}_V^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{a}_H(\mathbf{x}, t)]. \quad (2.49)$$

Первые два оператора представляют собой сумму и разность между числом горизонтально и вертикально поляризованных фотонов. В пределе, когда поперечное сечение перетяжки пучка накачки много больше площади когерентности СПР-поля, а длительность импульса накачки много больше, чем время когерентности излучения в кристалле, аналитические вычисления, приведенные в подразд. 2.2.2, показывают, что наблюдается идеальная коррелированность горизонтально и вертикально поляризованных фотонов, собираемых с любых двух симметрично расположенных в плоскости дальней зоны участков. Из этого следует идеальная полная коррелированность между операторами Стокса $\hat{S}_0(\mathbf{x})$, $\hat{S}_0(-\mathbf{x})$, а также между $\hat{S}_1(\mathbf{x})$, $-\hat{S}_1(-\mathbf{x})$ для любой точки $\mathbf{x}$ в дальней зоне [3] (заметим, что оператор $\hat{S}_0(\mathbf{x})$ коммутирует с оператором $\hat{S}_1(\mathbf{x}')$). Этот результат является прямым следствием того, что фотоны с вертикальной и горизонтальной поляризацией излучаются попарно и, подчиняясь закону сохранения поперечной составляющей импульса, распространяются в симметричных направлениях. При использовании более сложной численной модели, описанной в подразд. 2.2.3, учет конечной ширины профиля поля накачки приводит к появлению неопределенности в направлениях распространения фотонов, родившихся в процессе СПР; в результате, корреляции операторов Стокса $\hat{S}_0$, $\hat{S}_1$ вновь становятся существенно выше уровня дробового шума, если при детектировании мы собираем фотоны с областей превышающих по размеру площадь разрешения x_{diff}^2 .

Иначе ведут себя два других оператора Стокса, зависящих от измерения чисел фотонов в поляризационном базисе, развернутом под углом

45° (оператор $\hat{S}_2$) и в круговом базисе (оператор $\hat{S}_3$). На рис. 2.12, б (см. цветную вклейку) показана типичная картина разностного шума операторов Стокса $\hat{S}_2$ или $\hat{S}_3$, измеренных на симметрично расположенных малых (но превышающих по размеру x_{diff}) участках плоскости в дальней зоне. Более точно, на рисунках с помощью цветовой шкалы изображены значения $\langle [\hat{S}_2(\mathbf{x}) - \hat{S}_2(-\mathbf{x})]^2 \rangle = \langle [\hat{S}_3(\mathbf{x}) - \hat{S}_3(-\mathbf{x})]^2 \rangle$, отнесенные к уровню дробового шума (который в нашем случае равен $\langle [\hat{S}_0(\mathbf{x}) + \hat{S}_0(-\mathbf{x})] \rangle$), в зависимости от двух поперечных координат $\mathbf{x} = (x, y)$ нормированных на параметр X_0 ¹⁾. Данная картина получена для параметров, соответствующих спонтанному параметрическому рассеянию в кристалле ВВО толщиной 2 мм, вырезанном под углом 49,6°, что обеспечивает условие фазового синхронизма второго типа для вырожденных сигнальной и холостой волн при 702 нм. Для сравнения на рис. 2.12, а (см. цветную вклейку) приведено распределение средней интенсивности поля в дальней зоне (говоря точнее, числа, отвечающие цветовой шкале — это числа фотонов, проходящих за время когерентности поля в кристалле через площадь разрешения x_{diff}^2). На рис. 2.12, б (см. цветную вклейку) отчетливо видны две большие области синего цвета, которые соответствуют областям пересечения колец, где корреляция операторов Стокса практически идеальна. Вне этих областей, по существу, нет корреляций операторов Стокса $\hat{S}_2$ и $\hat{S}_3$ на квантовом уровне.

Эти результаты были получены с применением того же приема, что использовался в эксперименте [37], позволяющий частично скомпенсировать временной и пространственный снос параметрически преобразованных пучков. В режиме рождения одиночных пар фотонов, горизонтально поляризованный (обыкновенный) и вертикально поляризованный (необыкновенный) фотоны могут быть, в принципе, различимы, благодаря отличию своих групповых скоростей в кристалле, а также благодаря своим разным смещениям при распространении в кристалле из-за эффекта сноса. Само существование такой возможности губительно для перепутанности состояния. В общем случае, когда число СПР-фотонов произвольно, можно показать [3], что как расстройка групповых скоростей, так и пространственный снос, приводят к появлению фазового фактора при распространении пучков, что, в свою очередь, ведет к уменьшению значения корреляционной функции операторов Стокса, измеренных в симметричных областях. В принципе, эта проблема может быть решена путем использования очень узкого частотного фильтра и при измерении в очень узкой области, centered around точки пересечения колец. Однако, это ухудшает эффективность работы установки. Другая возможность для преодоления этих трудностей заключается в использовании второго кристалла, который устанавливается в ту часть схемы, где пучок накачки уже удален, и где плоскость поляризации поля повернута на 90°. В этом случае волны, которые были медленными (быстрыми) в первом кристалле, становятся быстрыми (медленными) во втором; точно также ком-

¹⁾ X_0 — типичная ширина кольца.

пенсруется и снос пучков, меняя свое направление на противоположное во втором кристалле. Можно показать, что, в отличие от режима одиночных пар фотонов, корреляции оптимальны, когда длина второго кристалла выбирается равной $l_c \tanh \sigma / (2\sigma)$, где σ — линейный фактор усиления, пропорциональный амплитуде поля накачки. Как показывают наши вычисления [3], если такой способ оптимизации невозможен, близкий результат можно получить применяя узкополосные временной и пространственный фильтры, и/или используя кристаллы с мало выраженным эффектом сноса. Рис. 2.12 (см. цветную вклейку) получен с использованием относительно узкого частотного фильтра (8 нм). Примечательно, что, когда используется более широкий фильтр, область, в которой операторы Стокса коррелируют, растягивается, принимая форму колец, «нанизанных» на направление распространения пучка накачки (рис. 2.13, см. цветную вклейку). Объяснить такую форму можно, рассмотрев геометрию конусов СПР-излучения кристалла ВВО на различных частотах. На рис. 2.14 (см. цветную вклейку) в полярных координатах построены кривые фазового синхронизма (геометрическое место мод, удовлетворяющих условию фазового синхронизма); причем полярный угол θ отсчитывается от направления распространения пучка накачки (ось z), ϕ — азимутальный угол вращения вокруг оси z . На рисунке одинаковыми цветами изображены кривые, отвечающие излучению на одной и той же длине волны; синяя и красная кривые соответствуют двум сопряженным длинам волн, а черные — двум конусам излучения с вырожденной длиной волны. Кривые горизонтально поляризованного излучения (сигнальная, обыкновенная волна) изображены в верхней половине рисунка. Рассматривая точки пересечения красных и синих окружностей, соответствующих двум сопряженным длинам волн, мы не можем ожидать появления какого-либо вида перепутывания состояний, так как фотоны, попадающие в эти точки, легко различимы из-за различия частот. Давайте теперь рассмотрим одну из точек пересечения двух красных кривых (т. е. одну из точек, отмеченных черной стрелкой на графике). Горизонтально и вертикально поляризованные фотоны попадают сюда с одинаковой вероятностью и имея одинаковые длины волн. Вследствие этого поляризация фотонов в этой точке пространства неопределена, и свет не поляризован. Однако, каждый раз, когда горизонтально (вертикально) поляризованный фотон попадает в эту точку, вертикально (горизонтально) поляризованный фотон с сопряженной длиной волны может быть обнаружен в симметричной точке, являющейся пересечением двух синих кривых на графике, также отмеченной черной стрелкой. Таким образом, рассматривая детектирование в двух точках, отмеченных стрелками, мы можем ожидать проявления высокой степени поляризационного перепутывания. Те же выводы могут быть сделаны для всех точек пересечения кривых с одинаковыми длинами волн (красной с красной, синей с синей, черной с черной). Соединяя эти точки мы можем, например, выявить геометрическую область, отвечающую синему цвету на рис. 2.13, а (см. цветную вклейку), для которой имеет место высокая степень корреляции всех операторов Стокса. Если расширить полосу рассматриваемых частот, данная область примет форму кольца, что и показано на рис. 2.13, б (см. цветную вклейку).

Таким образом мы можем заключить, что поляризационное перепутывание фотонных пар существует и в режиме большого усиления, когда число фотонов достаточно велико. В этом режиме поляризационное перепутывание принимает вид неклассических пространственных корреляций всех операторов Стокса, ассоциированных с поляризационными степенями свободы. В области пересечения пар колец (которая сама имеет форму кольца вокруг направления пучка накачки при использовании широкого частотного фильтра) все операторы Стокса сильно коррелированы на квантовом уровне, обеспечивая, таким образом, макроскопическое поляризационное перепутывание. Хотя сами операторы Стокса сильно флуктуируют (состояние не поляризовано), измерение любого из них в соответствующем поляризационном базисе на симметричных участках плоскости в дальней зоне позволяет измерить соответствующее среднее с неопределенностью много меньшей стандартного квантового предела.

Мы полагаем, что рассмотренный здесь вид перепутывания с его еще более сложной структурой, включающей большее число степеней свободы (число фотонов, поляризация, частота, пространственные степени свободы) может быть весьма перспективным в приложении к новым квантовым информационным схемам.

Список литературы

1. *Brambilla E., Gatti A., M. Bache, and Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 023802.
2. *Kolobov M. I.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539 и ссылки на работы в этой статье.
3. *Gatti A., Zambrini R., San Miguel M., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 053807.
4. *Scotto P., San Miguel M.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 42811.
5. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 133603.
6. *Werner M. J., Raymer M. G., Beck M., Drummond P. D.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4202;
Werner M. J., Drummond P. D. // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 1508.
7. При численном моделировании мы использовали генератор случайных чисел, обсуждавшийся в *Toral R., Chakrabarti A.* // Comput. Phys. Comm. 1993. V. 74. P. 327.
8. См., например, *Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W.* Numerical Recipes. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
9. *Jost B. M., Sergienko A. V., Abouraddy A. F., Saleh B. E. A., Teich M. C.* // Opt. Exp. 1998. V. 3. P. 81.
10. *Berzanskis A., Chinaglia W., Lugiato L. A., Feller K. H., Di Trapani P.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 1626.
11. *Jedrkiwicz O., Brambilla E., Gatti A., Bache M., Lugiato L. A., Di Trapani D.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 243601.
12. *Jedrkiwicz O., Brambilla E., Gatti A., Bache M., Lugiato L. A., Di Trapani P.* // J. Mod. Opt. 2006. V. 53. P. 575.
13. *Lugiato L. A., Gatti A., Brambilla E.* // J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. S176 и ссылки на работы в этой статье.

14. *Strekalov D. V., Sergienko A. V., Klyshko D. N., Shih Y. H.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 3600.
15. *Ferri F., Magatti D., Gatti A., Bache M., Brambilla E., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 183602.
16. *Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 113601.
17. *Nogueira W. A. T., Walborn S. P., Padua S., Monken C. H.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 4009.
18. *Howell J. C., Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 210403.
19. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A., Kolobov M. I.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1763;
Brambilla E., Gatti A., Lugiato L. A., Kolobov M. I. // Eur. Phys. J. D. 2001. V. 15. P. 117.
20. *Aytur O., Kumar P.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1551.
21. *Jost B. M., Sergienko A. V., Abouraddy A. F., Saleh B. E. A., Teich M. C.* // Opt. Express. 1998. V. 81. P. 3.
22. *Oemrawsingh S. S. R., van Drunen W. J., Eliel E. R., Woerdman J. P.* // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19. P. 2391.
23. *Treps N., Andersen U., Buchler B., Lam P. K., Maître A., Bachor H.-A., Fabre C.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 203601.
24. *Mosset A., Devaux F., Lantz E.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 223603.
25. *Janesick J. R.* Scientific Charge-Coupled Devices. — Washington: SPIE Press Bellingham, 2001. P. 204–205; см. также <http://www.roperscientific.de/theory.html>.
26. *Jiang Y.-K., Jedrkiewicz O., Minardi S., Di Trapani P., Mosset A., Lantz E., Devaux F.* // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 22. P. 521.
27. *Mosset A., Devaux F., Fanjoux G., Lantz E.* // Eur. Phys. J. D. 2004. V. 28. P. 447.
28. *Goodman J. W.* Statistical Optics. — New York: Wiley Classics Library, 2000;
Гудмен Дж. Статистическая оптика. — М.: Мир, 1988.
29. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988. — С. 122.
30. *Di Trapani P., Valiulis G., Chinaglia W., Andreoni A.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 265.
31. *Marzoli I., Gatti A., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2092.
32. *Lugiato L. A., Gatti A., Ritsch H., Marzoli I., Oppo G.-L.* // J. Mod. Opt. 1997. V. 44. P. 1899.
33. *Szwaj C., Oppo G.-L., Gatti A., Lugiato L. A.* // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 433.
34. *Bowen W. P., Schnabel R., Bachor H.-A., Lam P. K.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 093601;
Bowen W. P., Treps N., Schnabel R., Lam P. K. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 253601;
Schnabel R., Bowen W. P., Treps N., Ralph T. C., Bachor H.-A., Lam P. K. // Phys. Rev. A. 2003. V. 67. P. 012316.
35. *Korolkova N., Leuchs G., Loudon R., Ralph T. C., Silberhorn C.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 052306; e-print quant-ph/0108098.
36. *Hald J., Sorensen J. L., Schori C., Polzik E. S.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1319.

37. *Kwiat P. G., Mattle K., Weinfurter H., Zeilinger A., Sergienko A. V., Shih Y.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4337.
38. *Bouwmeester D., Pan J.-W., Mattle K., Eibl M., Weinfurter H., Zeilinger A.* // Nature (London). 1997. V. 390. P. 575;
Boschi D., Branca S., De Martini F., Hardy L., Popescu S. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 1121.
39. *Sergienko A. V., Atatüre M., Walton Z., Jaeger G., Saleh B. E. A., Teich M. C.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. R2622;
Jennewein T., Simon C., Weihs G., Weinfurter H., Zeilinger A. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 4729.

Литература, добавленная при переводе

40. *Blanchet J.-L., Devaux F., Furfaro L., Lantz E.* Measurement of sub-shot-noise correlations of spatial fluctuations in the photon-counting regime // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 233604.
41. *Caspani L., Jedrkiewicz O., Brambilla E., Lugiato L. A., Gatti A.* Improving the observation of spatial quantum correlation of twin beams by means of a sub-pixel symmetry centre retrieval algorithm // J. Mod. Opt. 2008. V. 55. P. 2025.
42. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A.* Quantum Imaging // Progress in Optics. V. 51, Ch. 5. P. 251 / Ed. by E. Wolf. — Elsevier North-Holland, 2008.
43. *Erkmen B. I., Shapiro J. H.* Gaussian-state theory of two-photon imaging // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 023835.

КВАНТОВЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ РЕЖИМЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЫРОЖДЕННОГО ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Агнес Мэтр, Николя Трепс, Клод Фабр

3.1. Введение

Изображение несет в себе большое количество информации, содержащейся в локальных интенсивностях каждого из миллионов пикселей, составляющих его. В квантовой теории изображение должно быть представлено как квантовое состояние, включающее число поперечных мод, равное числу пикселей. Поэтому анализ квантовых изображений — это пример существенно многомодовой квантовой оптики.

В течение последних 20 лет теоретические и экспериментальные исследования показали, что оптические резонаторы являются эффективной основой для генерации неклассических состояний света, таких как сжатые, коррелированные или перепутанные состояния. Однако, в действительности эти состояния представляют собой одномодовые неклассические состояния, поскольку оптический резонатор навязывает поперечную структуру поля как одну из собственных мод, обычно — моду TEM_{00} . Для того чтобы генерировать многомодовые неклассические поля, необходимые для квантовых изображений, нужно использовать специальный вид резонаторов: *вырожденные оптические резонаторы*, в которых возможно одновременно возбудить большое число поперечных мод.

В этой главе дается краткий анализ многомодовых квантовых изображений с использованием вырожденных оптических резонаторов. Мы начнем с изучения пространственных свойств таких резонаторов на классическом уровне, затем приведем основные результаты различных теоретических исследований, имеющих целью показать, что эти устройства представляют интерес для генерации локального сжатия, пространственных квантовых корреляций и перепутывания. Наконец, мы опишем некоторые недавние эксперименты, которые демонстрируют эти эффекты.

3.2. Свойства вырожденного оптического резонатора для классических изображений

3.2.1. Введение. Оптические резонаторы широко используются в оптике по разным причинам: они усиливают внутрирезонаторное поле во много раз

при точном резонансе; они могут обеспечить обратную связь в устройствах, помещенных внутрь резонатора (как, например, в случае оптического усилителя, помещенного в лазерный резонатор); и они позволяют выделить хорошо определенные моды электромагнитного поля, упрощая таким образом анализ системы, например, в квантовой оптике. Кажется, что это последнее из свойств находится в противоречии с тем, что нам необходимо для построения квантовых изображений, а именно, с существенной многомодовыми, нефилтующими системами. Однако, как мы увидим, резонаторы с вырожденными поперечными модами являются многомодовыми устройствами, обеспечивающими хорошее усиление поля и обратную связь для большого набора изображений различных форм, потому что в таких резонаторах бесконечное число мод возбуждаются при одной и той же длине резонатора. Вырожденные оптические резонаторы, таким образом, позволяют нам наблюдать интересные эффекты квантовых изображений даже при низких интенсивностях, характерных для лазеров, работающих в непрерывном режиме.

Оптические резонаторы использовались и изучались в оптике в течение длительного времени¹⁾. Среди прочих стоит выделить спектроскопические исследования с резонатором Фабри–Перо [1, 2] и конструкциями лазерных резонаторов [3, 4]. Оптические резонаторы одновременно являются фильтрами временных и пространственных частот и характеризуются набором своих собственных мод, т. е. семейством волн, преобразующихся в себя после обхода по всему периметру резонатора. Только поля, принадлежащие к подпространству собственных мод, могут пройти через резонатор на резонансной частоте: если подпространство содержит только одну поперечную моду, оптический резонатор действует как идеальный пространственный фильтр. Фактически это свойство используется во многих экспериментах (см., например, [5]). Для вырожденных резонаторов подпространство собственных мод обладает бесконечной размерностью: эффект фильтрации частичный, и часть информации, переносимой изображением, проходит через резонатор. Классические свойства передачи изображений такими резонаторами были впервые предсказаны в [6], и изучены более детально в [7]. Здесь мы только напомним основные свойства, рассмотренные детально в работе [7].

3.2.2. Преобразование поля за один обход резонатора. Мы рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ с частотой ω , распространяющееся вдоль оси Oz в рамках параксиального приближения. В точке $\mathbf{r} = (x, y)$ произвольной поперечной плоскости внутри резонатора с координатой z , которую мы будем рассматривать как контрольную (референтную) плоскость, поле можно записать как:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) = \text{Re} [E(\mathbf{r}, z) e^{-i\omega t} \mathbf{u}], \quad (3.1)$$

где $\mathbf{u}$ — единичный вектор поляризации. Поперечное распределение амплитуды поля $E(\mathbf{r}, z)$ мы будем называть «комплексным изображением» или просто — «изображением».

¹⁾ Для ознакомления с теорией оптических резонаторов рекомендуем читателю обратиться, например, к книге Быкова В. П., Силичева О. О. «Лазерные резонаторы» (Физматлит, 2003).

Распространение поля по периметру пустого оптического резонатора характеризуется линейным интегральным преобразованием, которое мы обозначим как T ; более точно:

$$E_{\text{rt}}(\mathbf{r}) = e^{ikL} T[E_{\text{in}}(\mathbf{r})], \quad (3.2)$$

где $E_{\text{in}}(\mathbf{r})$ и $E_{\text{rt}}(\mathbf{r})$ — поле в контрольной плоскости до и после обхода резонатора соответственно; L — оптическая длина резонатора. В случае, если линзы и сферические зеркала, из которых сделан резонатор имеют сглаженные границы и, следовательно, не вызывают дифракции пучка света, T зависит только от коэффициентов гауссовой матрицы T_{cav} , описывающей свойства резонатора при его обходе исходя из законов геометрической оптики (см., например, с. 781 работы [4]). Все свойства оптического резонатора можно описать, зная T_{cav} и L (и используя равенство $\text{Det}(T_{\text{cav}}) = 1$). Собственные моды такого резонатора, сосредоточенные вокруг оси резонатора, существуют только тогда, когда выполняется условие $|\text{Sp}(T_{\text{cav}})| < 2$. Это хорошо известные моды Эрмита–Гаусса TEM_{mn} , имеющие следующую зависимость от координаты z вдоль оси резонатора:

$$E_{mn}(\mathbf{r} = 0, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-i(n+m+1)\phi_G(z)} e^{ikz}, \quad (3.3)$$

где $\phi_G(z)$ — фаза моды TEM_{00} в точке z (фаза Гюи):

$$\phi_G(z) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right), \quad (3.4)$$

$w(z)$ и w_0 — характеризуют поперечный размер пучка в сечении z и в сечении 0 соответственно; z_R — параметр Рэлея.

Фазовый сдвиг такой моды вдоль оси при одном обходе резонатора равен $kL + (m + n + 1)\phi_{\text{Grt}}$, где ϕ_{Grt} — фазовый сдвиг Гюи за один обход; его значение будет играть важную роль в дальнейшем обсуждении. В случае простого линейного резонатора длины L_c , образованного двумя идентичными сферическими зеркалами с радиусом кривизны R , фазовый сдвиг равен:

$$\phi_{\text{Grt}} = \cos^{-1} \left(1 - \frac{L_c}{R} \right). \quad (3.5)$$

В общем случае он связан с гауссовой матрицей обхода резонатора T_{cav} простым соотношением [6, 7]:

$$e^{\pm i\phi_{\text{Grt}}} = \text{собственные значения } (T_{\text{cav}}). \quad (3.6)$$

Собственные моды резонатора являются модами Эрмита–Гаусса, которые имеют полный набег фазы за один обход резонатора равный $2p\pi$, где p — целочисленное значение. Это имеет место только для дискретного набора длин резонатора L_{mnp} , заданных как:

$$L_{mnp} = \frac{\lambda}{2} \left(p + (n + m + 1) \frac{\phi_{\text{Grt}}}{2\pi} \right). \quad (3.7)$$

Отсюда следует первый вид вырождения: все моды TEM_{mn} с одинаковыми значениями $m + n$ возбуждаются при одной и той же длине резонатора. Это свойство следует связать с цилиндрической симметрией системы: если изображение прошло через резонатор, то тоже самое изображение, повернутое на произвольный угол вокруг оси Oz , также пройдет через резонатор. Мы будем называть резонатор «поперечно вырожденным» в том случае, если он обладает большим вырождением, чем таковое, связанное с рассмотренной симметрией. Это условие выполняется, когда ϕ_{Grt} , деленное на 2π , — рациональное число:

$$\phi_{Grt} = 2\pi \frac{K}{N} [2\pi], \quad (3.8)$$

где K и N — целые числа, такие что $0 < K/N < 1$ — правильная дробь.

Хорошо известно, что пространственный спектральный интервал в незаполненном резонаторе для продольных мод (с периодичностью по p) равен $\lambda/2$. Изменяя длину резонатора, можно обнаружить эквидистантные максимумы на расстоянии $\lambda/(2N)$ друг от друга: внутри спектрального диапазона существует N семейств мод, соответствующих различным значениям $s = m + n + 1$. В рамках геометрической оптики, уравнения (3.6) и (3.8) означают, что [8]

$$(T_{cav})^N = I, \quad (3.9)$$

где I — единичная матрица размерности 2×2 . Это соотношение можно трактовать следующим образом: любой падающий луч, вне зависимости от его положения и наклона, вернется обратно в начальное состояние после N обходов резонатора, формирующих замкнутую траекторию, или, иначе *орбиту*.

3.2.3. Передача изображения через оптический резонатор. Определим теперь поля, которые могут быть переданы через оптический резонатор длины L_{mnp} , соответствующей одному из резонансных пиков. Входное поле отображается на внутрирезонаторную контрольную плоскость, мы обозначим его как $E_{in}(\mathbf{r})$. Аналогично выходным полем $E_{out}(\mathbf{r})$ будем называть изображение распределения поля на той же внутрирезонаторной контрольной плоскости. E_{out} является результатом интерференции всех полей, совершивших $1, 2, \dots$ обхода резонатора. Если резонатор не является поперечно вырожденным, E_{out} , как хорошо известно, представляет собой фундаментальную гауссову моду TEM_{00} или комбинацию мод TEM_{mn} с фиксированным значением $s = m + n + 1$, зависящим от выбранной длины L_{mnp} . Если же резонатор поперечно вырожден с порядком вырождения K/N , то выходное поле имеет вид:

$$E_{out}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\pi s K/N} T_{cav})^n E_{in}(\mathbf{r}), \quad (3.10)$$

где r_1 и r_2 — амплитудные коэффициенты отражения двух зеркал, ограничивающих резонатор. Используя тот факт, что $(e^{-2i\pi s K/N} T_{cav})^N E_{in}(\mathbf{r}) = E_{in}(\mathbf{r})$,

выражение (3.10) можно переписать в виде:

$$E_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 - (r_1 r_2)^N} \sum_{n=0}^{N-1} (r_1 r_2 e^{-2i\pi s K/N} \mathcal{T}_{\text{cav}})^n E_{\text{in}}(\mathbf{r}). \quad (3.11)$$

Поле $E_{\text{out}}(\mathbf{r})$, определяемое выражением (3.11), обладает важным свойством: $\mathcal{T}_{\text{cav}} E_{\text{out}}(\mathbf{r})$ пропорционально $E_{\text{out}}(\mathbf{r})$. Следовательно, если использовать его как входное поле резонатора, то оно будет проходить через резонатор без искажений. Поэтому такое поле называют *самопреобразующимся* полем для данного $\mathcal{T}_{\text{cav}}$ [9]. Заметим также, что $E_{\text{out}}(\mathbf{r})$ зависит от s ($s = 0, \dots, N-1$), и, следовательно, различно для различных семейств мод.

Для того чтобы упростить дальнейшее обсуждение, мы будем полагать, что зеркала резонатора обладают высокой отражательной способностью, так что r_1 и r_2 можно считать равными 1 во всех членах суммы в выражении (3.11). Приведем теперь три примера вырожденных резонаторов.

— Конфокальный резонатор (два одинаковых сферических зеркала, разделенные расстоянием, равным их радиусу кривизны) описывается гауссовой матрицей $-I$, когда в качестве контрольной плоскости рассматривается его плоскость симметрии. Поэтому фазовый набег Гюи за один обход резонатора равен π ($K = 1, N = 2$). Преобразование поля после обхода резонатора $\mathcal{T}_{\text{cav}} E(\mathbf{r})$ совпадает с полем в симметричной точке $E(-\mathbf{r})$. Таким образом, прошедшее поле есть сумма $E(\mathbf{r}) + e^{-i\pi s} E(-\mathbf{r})$ и, в зависимости от s , представляет собой четную или нечетную часть входного поля.

— Полуконфокальный резонатор (одно плоское и одно сферическое зеркала, расположенные на расстоянии, равном половине радиуса кривизны последнего R) описывается гауссовой матрицей в плоскости плоского зеркала

$$\mathcal{T}_{\text{cav}} = \begin{bmatrix} 0 & R/2 \\ -2/R & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Два обхода приводят, как и ожидалось, к матрице конфокального резонатора. Фазовый набег Гюи полуконфокального резонатора равен $\pi/2$ ($K = 1, N = 4$). Можно показать, что поле после обхода резонатора $\mathcal{T}_{\text{cav}} E(\mathbf{r})$ представимо в виде $\tilde{E}(4\pi\mathbf{r}/\lambda R)$, где $\tilde{E}(\mathbf{q})$ — пространственный фурье-образ $E(\mathbf{r})$. Находим, что прошедшее поле равно $E(\mathbf{r}) + e^{-i\pi s/2} \tilde{E}(4\pi\mathbf{r}/\lambda R) + e^{-i\pi s} E(-\mathbf{r}) + e^{-3i\pi s/2} \tilde{E}(-4\pi\mathbf{r}/\lambda R)$. В зависимости от значения $s = 1, 2, 3, 4$, оно является комбинацией четных или нечетных частей входного поля и четных или нечетных частей его фурье-образа.

— «самоотображающий резонатор» описывается единичной гауссовой матрицей и нулевым сдвигом Гюи: любой луч внутри резонатора преобразуется в себя после одного обхода резонатора; любая конфигурация поля, не зависимо от ее формы, идеально передается через резонатор и лишь «выигрывает» благодаря эффекту накопления в резонаторе. Таким образом, это идеальное устройство для изучения резонаторно-усиленных изображений. Самоотображающие резонаторы были всесторонне исследованы в [6]. Они не могут

быть построены на основе только лишь двух сферических зеркал; они могут включать в себя, например плоское входное/выходное зеркало, внутрирезонаторную линзу и сферическое зеркало, расположенные на соответствующем расстоянии друг от друга. Такие резонаторы используются в экспериментах по генерации оптических структур [10].

В отличие от описанных выше, плоский резонатор (ограниченный двумя плоскими зеркалами), — широко изученный теоретически и используемый в некоторых экспериментах с импульсными лазерами — описывается гауссовой матрицей свободного распространения на интервале длины L , которая поэтому не удовлетворяет условию (3.9) ни при каком значении N . Плоский резонатор не является поперечно вырожденным. Прошедшее через него поле представляет собой конус наклонных плоских волн, распространяющихся под углами к оси Oz , выделяемыми длиной резонатора: как хорошо известно, на выходе резонатора будут наблюдаться кольца.

Аналогично, концентрический резонатор (два неплоских зеркала, имеющих общий центр кривизны) описывается гауссовой матрицей обхода, связанной с плоскостью симметрии резонатора и равной матрице рассеивающей тонкой линзы с фокусным расстоянием $-R/2$. Ни одна из степеней этой матрицы не равна единичной матрице, поэтому концентрический резонатор также не является поперечно вырожденным, хотя, как и в рассмотренном перед этим случае, его фазовый набег Гюи за обход равен нулю. Только один класс лучей превращаются в себя после обхода этих резонаторов: это лучи параллельные оптической оси в случае плоского резонатора и лучи, проходящие через оптический центр в случае концентрического резонатора. Все другие лучи света расходятся после многих отражений; они проходят все дальше и дальше от оси в плоском резонаторе, или же более и более наклонно в концентрическом резонаторе. В обоих случаях задача не может быть решена корректно в рамках параксиального приближения, в котором определяется фаза Гюи.

3.3. Теория параметрического генератора света с вырожденным резонатором

Неклассические состояния света можно генерировать, помещая нелинейный элемент в резонансный или квазирезонансный оптический резонатор. Мы не будем рассматривать здесь случаи генерации второй гармоники, эффект Керра или четырехволновое смешение, несмотря на интерес к этим эффектам. Мы предпочитаем сосредоточиться на случае внутрирезонаторных параметрических процессов, как наиболее распространенных при исследовании квантовых изображений.

3.3.1. Классическое поведение. На первом этапе необходимо выяснить классическое поведение параметрического генератора света (ПГС), когда нелинейный кристалл помещен в вырожденный резонатор, который допускает одновременную генерацию различных поперечных мод. Такая задача была рассмотрена, например, в [11–13], где внутрирезонаторное поле раскладыва-

лось по набору поперечных гауссовых мод:

$$E(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2n_i\epsilon_0 V}} \sum_{m,n} \alpha^{m,n}(t) E_{m,n}(\mathbf{r}), \quad (3.13)$$

где коэффициенты разложения выбираются так, чтобы величина $|\alpha^{m,n}|^2$ имела смысл числа фотонов. Уравнения эволюции такой системы сводятся к связанным динамическим уравнениям для коэффициентов разложения $\alpha_s^{m,n}(t)$ сигнальной волны и $\alpha_i^{m,n}(t)$ холостой волны. В качестве примера мы рассмотрим здесь уравнения для двухрезонансного невырожденного по частоте ПГС в простом случае, когда в процессе участвуют только две моды сигнального поля (например, TEM_{00} и TEM_{01}), характеризуемые амплитудами α_s^0 и α_s^1 , и две моды холостого поля, характеризуемые амплитудами α_i^0 , α_i^1 . Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{L}{c} \frac{d\alpha_s^0}{dt} &= -\alpha_s^0(\kappa - i\delta_s^0) + \chi_{00} \alpha_p^0 \alpha_i^{0*} + \chi_{01} \alpha_p \alpha_i^{1*}, \\ \frac{L}{c} \frac{d\alpha_i^0}{dt} &= -\alpha_i^0(\kappa - i\delta_i^0) + \chi_{00} \alpha_p \alpha_s^{0*} + \chi_{10} \alpha_p \alpha_s^{1*}, \\ \frac{L}{c} \frac{d\alpha_s^1}{dt} &= -\alpha_s^1(\kappa - i\delta_s^1) + \chi_{11} \alpha_p \alpha_i^{1*} + \chi_{10} \alpha_p \alpha_i^{0*}, \\ \frac{L}{c} \frac{d\alpha_i^1}{dt} &= -\alpha_i^1(\kappa - i\delta_i^1) + \chi_{11} \alpha_p \alpha_s^{1*} + \chi_{01} \alpha_p \alpha_s^{0*}, \\ \alpha_p &= \alpha_p^{\text{in}} - \frac{1}{2} (\chi_{00} \alpha_s^0 \alpha_i^0 + \chi_{11} \alpha_s^1 \alpha_i^1 + \chi_{01} \alpha_s^0 \alpha_i^1 + \chi_{10} \alpha_s^1 \alpha_i^0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где α_p — амплитуда поля накачки на срединной плоскости кристалла; α_p^{in} — амплитуда поля накачки на входной грани кристалла; $\kappa = 1 - r$ — это резонаторный коэффициент потерь, который мы выбираем одинаковым для всех сигнальных и холостых мод; r — амплитудный коэффициент отражения выходного зеркала. Буквами δ обозначены отстройки от резонаторных частот для различных мод. Значения коэффициентов связи χ_{ij} ($i, j = 0, 1$) можно найти, например, в [11] для случая накачки модой TEM_{00} ; там же проведен анализ устойчивости решений. При невырожденном резонаторе отстройки от резонаторной частоты для различных мод различны. Только одна пара сигнальных и холостых мод может возбуждаться при данной длине резонатора. ПГС излучает благодаря единственной паре сигнальных-холостых мод, которая имеет наиболее низкий порог генерации. ПГС ведет себя в этом случае как лазер с однородным уширением, и первая же излучающая мода истощает накачку, препятствуя тем самым генерации других мод. В вырожденном резонаторе все вовлеченные в процесс моды могут возбуждаться одновременно¹⁾. В этом

¹⁾ Заметим, что одновременное возбуждение многих поперечных мод в лазере приводит к тому, что его излучение становится квазитепловым, т. е. подчиняется гауссовской статистике, с радиусом корреляции обратно пропорциональным корню из числа поперечных мод (см. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981).

случае ПГС возбуждается на вполне определенной линейной комбинации поперечных мод [11], поэтому ПГС остается в одномодовой конфигурации, однако эта мода отличается от обычных гауссовых мод. Когда во взаимодействие вовлечено бесконечное число мод, задача становится более сложной для описания, однако поведение генератора практически остается прежним: в ПГС возбуждается вполне определенная линейная комбинация всех этих мод, приводя к появлению *оптических структур*, являющихся предметом многих исследований. Например, частотно вырожденный ПГС с плоским резонатором, отстроенный от частоты резонатора, в котором сигнальная волна распространяется перпендикулярно зеркалам, генерирует над порогом «вращающуюся структуру» [14], т.е. поле, имеющее форму интерференционной решетки в контрольной плоскости, расположенной внутри резонатора (так называемая «структура ближней зоны»). Для того чтобы определить структуру поля, генерируемого в более сложных ситуациях, вместо модового анализа может быть использован «локальный» анализ, заключающийся в прямом вычислении медленно меняющихся амплитуд $E(\mathbf{r}, t)$ сигнального и холостого полей в заданной внутрирезонаторной поперечной плоскости в параксиальном приближении или приближении среднего поля [15]. Например, можно записать следующее уравнение эволюции для сигнальной моды $E_s(\mathbf{r})$:

$$\frac{L}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_s(\mathbf{r}, t) = -(\kappa + i\delta_s - i\xi L_s) E_s(\mathbf{r}, t) + \chi E_p(\mathbf{r}, t) E_i^*(\mathbf{r}, t), \quad (3.15)$$

где δ_s — отстройка по отношению к ближайшей моде TEM_{00} ; ξ — коэффициент, связанный с расстоянием между поперечными модами (в наших обозначениях он равен $\phi_{Grt}/2\pi$, где ϕ_{Grt} определяется уравнением (3.6)). Здесь оператор L_s имеет вид:

$$L_s = \frac{w_0^2}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} + 1, \quad (3.16)$$

где w_0 — размер перетяжки моды TEM_{00} в ПГС резонаторе. Уравнение (3.15) вместе с такими же уравнениями для холостой моды и моды накачки может

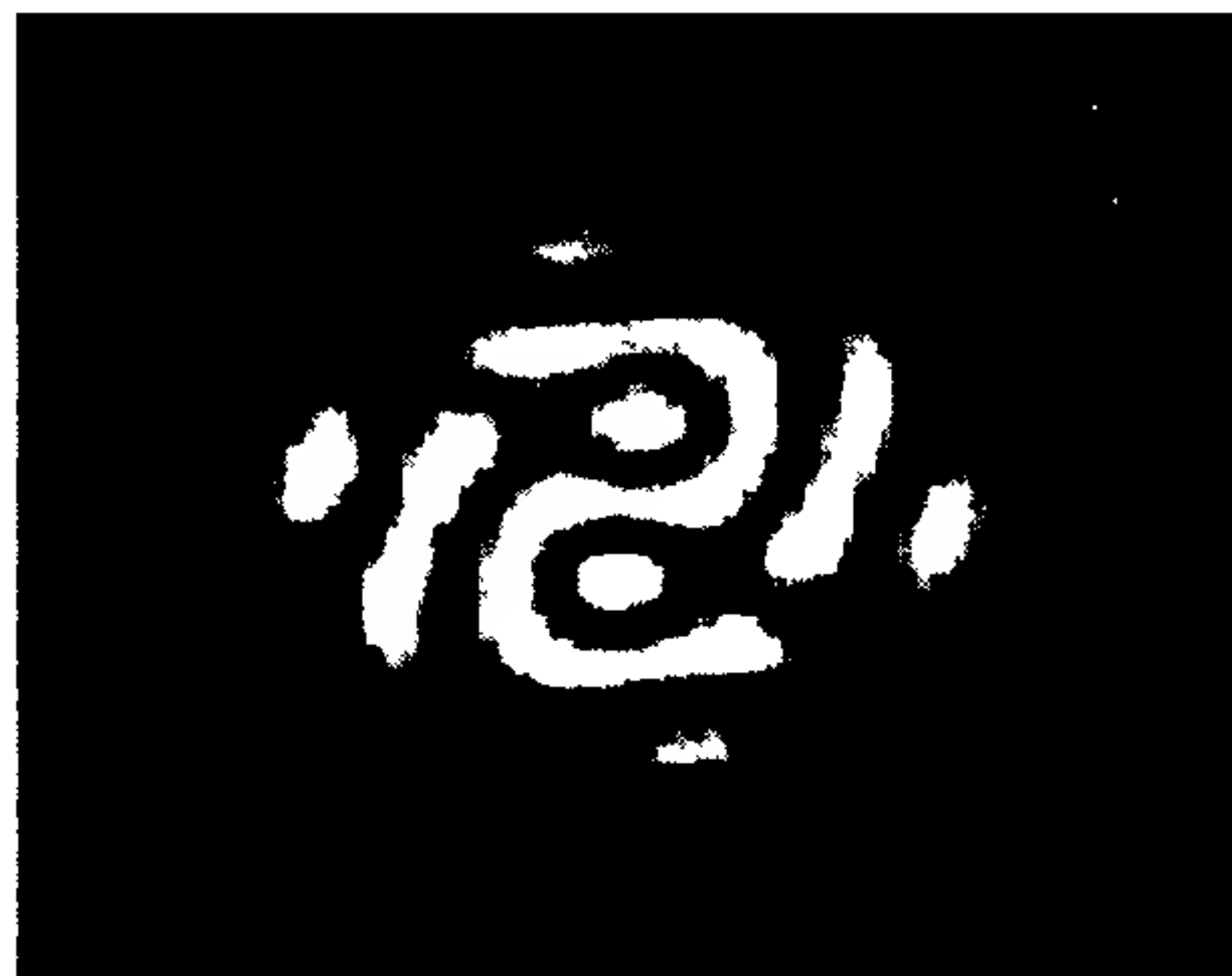


Рис. 3.1. Численное моделирование картины, генерируемой частотно-вырожденным ПГС с квазиконфокальным резонатором, отстроенным от резонанса ($\delta_s = -1,5\kappa$, $\xi = 0,25\kappa$), с превышением над порогом генерации в 70 раз и при сильной фокусировке пучка накачки ($w_{pump} = 0,25w_0$)

быть решено численно в различных конфигурациях. Такие расчеты были выполнены в работах [16–24] для исследования генерации оптических структур. Эти структуры могут быть, в зависимости от условий генерации, стационарными или развивающимися во времени. На рис. 3.1 приведен пример интенсивности выходного поля, рассчитанной для случая квазиконфокального вырожденного по частоте ПГС, работающего высоко над порогом генерации. Решение в этом случае является не стационарным (запись развития во времени можно увидеть в сети Internet [13]).

3.3.2. Квантовые свойства. Хорошо известно, что явление параметрического преобразования частоты вниз как спонтанного, так и стимулированного входным полем, приводит к рождению сигнального и холостого фотонов, которые коррелированы на квантовом уровне как во времени, так и в пространстве. Если волна накачки плоская, то, благодаря трансляционной инвариантности в плоскости, ортогональной направлению распространения волны, поперечная компонента импульса в точности сохраняется в процессе, и, следовательно, направления распространения сигнального и холостого фотонов идеально скоррелированы на квантовом уровне (см. рис. 3.2). Это

свойство широко используется при спонтанном параметрическом преобразовании и является первопричиной таких явлений как фантомные изображения и пространственные корреляции между пикселями, описанных в главах 5 и 2 этой книги. Вследствие очень низкой эффективности параметрического преобразования частоты в доступных на сегодняшний день нелинейных кристаллах, экспериментаторам приходится ограничиваться работой в режиме счета фото-

нов в случае спонтанного параметрического преобразования, или же, чтобы достичь режима высокого параметрического усиления, использовать высокоинтенсивное импульсное лазерное поле, но учитывая при этом, что такое излучение обладает низким уровнем стабильности от импульса к импульсу. Поэтому использование оптических резонаторов представляет большой интерес в плане повышения эффективности параметрического преобразования, давая возможность генерировать интенсивные неклассические поля, используя для накачки простой и высокостабильный твердотельный лазер в непрерывном режиме и при умеренной мощности излучения. Когда параметрический кристалл помещают в резонатор, временные квантовые корреляции остаются только на частотах шума в пределах резонаторной ширины моды; пространственные же корреляции проецируются на подпространство поперечных мод, возбуждающихся при данной длине резонатора. Если резонатор является одномодовым, то вся поперечная информация теряется. Если он многомодовый, то ситуация становится более сложной для изучения и существенно зависит от свойств резонатора.

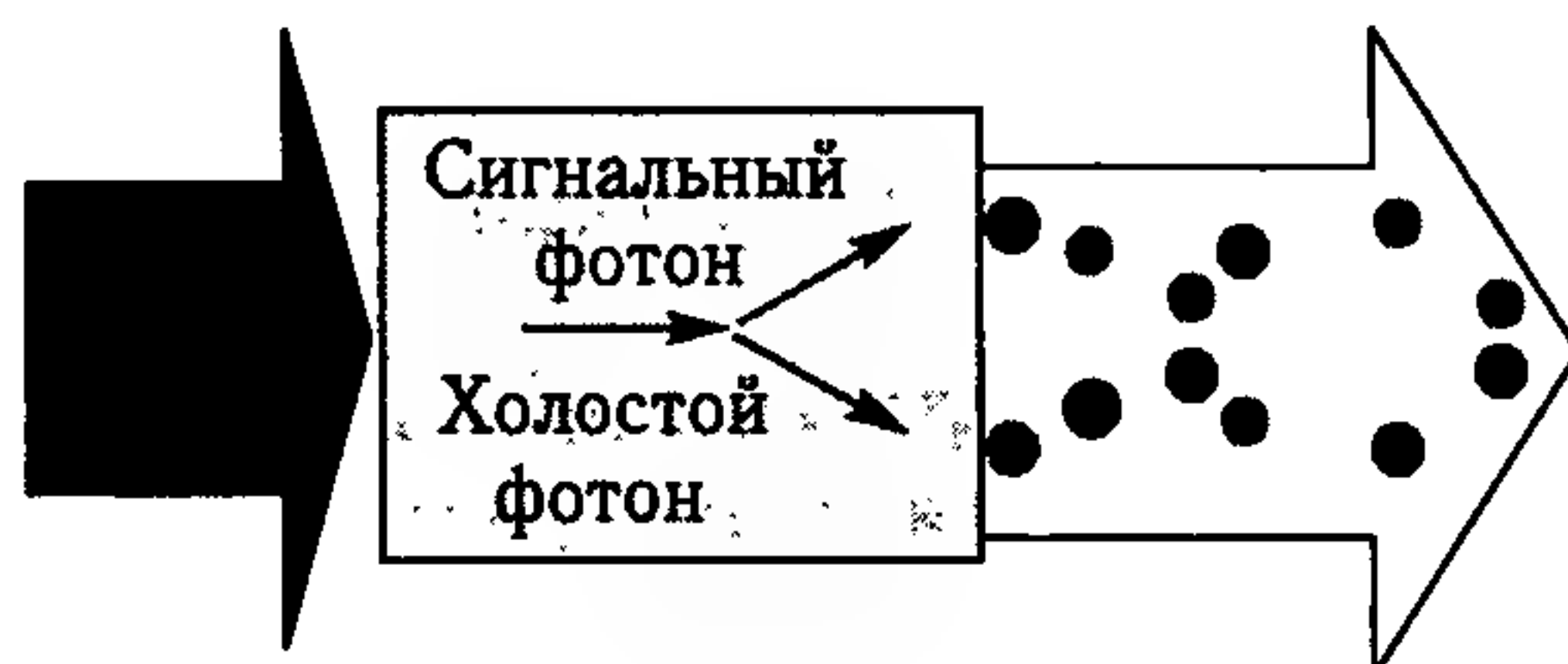


Рис. 3.2. При параметрическом преобразовании частоты сигнальный и холостой фотоны рождаются в идеально квантово-коррелированных направлениях в случае плоской волны накачки

Рассмотрим сначала кажущийся простым случай, когда резонатор одновременно выделяет только две сигнальные и две холостые моды, обсуждавшиеся выше (уравнения (3.14)). Такая система квантовомеханически описывается четырьмя процессами, в которых фотон накачки распадается на пару фотонов, принадлежащих модам $(\alpha_s^0, \alpha_i^0), (\alpha_s^1, \alpha_i^1), (\alpha_s^1, \alpha_i^0)$ или (α_s^0, α_i^1) , а также обратными им процессами. Это соответствует гамильтониану взаимодействия:

$$\hat{H}_{\text{int}} \propto \hat{a}_p \left(\chi_{00} \hat{a}_s^{0\dagger} \hat{a}_i^{0\dagger} + \chi_{11} \hat{a}_s^{1\dagger} \hat{a}_i^{1\dagger} + \chi_{01} \hat{a}_s^{0\dagger} \hat{a}_i^{1\dagger} + \chi_{10} \hat{a}_s^{1\dagger} \hat{a}_i^{0\dagger} \right) + \text{э. с.}, \quad (3.17)$$

где, например, $\hat{a}_s^{0\dagger}$ — оператор рождения фотона в моде с индексом «0» на частоте сигнального поля. Это сложное взаимодействие создает многочастичное квантовое перепутывание между четырьмя модами, в котором проявляются квантовые пространственные корреляции между сигнальным и холостым полями на выходе кристалла, представляющими собой суперпозицию указанных мод. Когда резонатор одновременно поддерживает генерацию бесконечного числа поперечных мод, задача становится еще более сложной. Она решается в общем виде с использованием квантовых уравнений в представлении Вигнера [25], аналогичных классическому уравнению (3.15), но с учетом квантовых шумов на входе системы; решение получено в виде корреляционных функций для квантовых флуктуаций в двух различных точках выбранной поперечной плоскости.

Первые исследования, связанные с «пространственной структурой сжатого вакуума», были проведены в 90-х годах с использованием обычного вырожденного оптического параметрического усилителя (ВОПУ) работающего ниже порога генерации. При этом были определены общие свойства системы, содержащей пространственную информацию, а именно, величина сжатия в зависимости от формы поперечного профиля моды гомодина, используемого для гомодинного измерения сжатия [26] для случая резонатора с плоскими или сферическими зеркалами. Позднее, когда был исследован пространственный спектр сжатия, была получена более детальная информация о пространственном распределении квантовых флуктуаций в системе [27]. Авторы ввели понятие *квантового изображения*, т.е. неоднородного распределения поля, генерируемого только благодаря квантовым флуктуациям. Они показали, что ниже порога параметрической генерации пространственные корреляционные функции флуктуаций изменяются таким же образом как поперечный пространственный рисунок, возникающий над порогом генерации. Введенное понятие позднее было распространено на случай невырожденных по частоте ПГС [28].

В ВОПУ с плоскими или квазиплоскими резонаторами было предсказано наличие сильных квантовых корреляций. Это корреляции между флуктуациями интенсивности, измеренными в небольших симметричных относительно оптической оси резонатора областях в дальней зоне (т.е. на контрольной плоскости, находящейся на бесконечном расстоянии от резонатора) [25, 29, 30]. Позднее обнаружили, что с помощью того же устройства можно получить также *пространственное перепутывание*: поля, измеренные на симметричных точках изображения в дальней зоне антикоррелированы по

одной паре квадратур и коррелированы по сопряженной паре квадратур [31]. Это замечательное свойство является отправной точкой для использования такого света в схемах параллельной квантовой обработки изображений, и представляет собой многообещающее расширение возможностей по сравнению с обычным одномодовым источником перепутанных ЭПР-состояний, применявшегося в различных информационных схемах. Все эти свойства выявились благодаря преодолению неизбежных экспериментальных трудностей: небольшой кривизны зеркал резонатора и влияния конечного поперечного размера пучка накачки.

Случай точного конфокального резонатора, возбуждаемого плоской волной накачки, оказывается более легким в интерпретации. Это упрощение связано с тем фактом, что, как отмечалось в разд. 3.2, конфокальный резонатор является истинно вырожденным резонатором, что нельзя сказать про плоский резонатор. Разлагая поле по базисным модам Лагерра–Гаусса, можно видеть, что в этом случае члены, отвечающие перекрестной связи между различными модами Лагерра–Гаусса $TEM_{p,\ell}$, отсутствуют, так что система описывается набором независимых параметрических взаимодействий согласно гамильтониану:

$$\hat{H}_{\text{int}} \propto \hat{a}_p \sum_{p,\ell} \chi_{p,\ell} (\hat{a}_{p,\ell}^\dagger)^2 + \text{э. с.}, \quad (3.18)$$

который значительно проще, чем гамильтониан (3.17). Было предсказано, что конфокальный ВОПУ, возбуждаемый плоской волной накачки ниже порога генерации дает существенно многомодовый сжатый свет: сильное сжатие фактически может быть измерено при любом симметричном относительно оси резонатора поперечном профиле пучка гомодина [32]. В частности, используя излучение гомодина с очень малой поперечной расходимостью, можно получить *локальное сжатие*, которое может быть очень полезно для приложений, использующих пиксельные детекторы, такие как CCD-камеры, с целью подавления квантового шума. Этот важный результат был в дальнейшем распространен на более реалистичные случаи, включая квазиконфокальные резонаторы, случай гауссовой накачки [33], длинные кристаллы, такие что дифракционными эффектами в них нельзя более пренебрегать [7].

Существует и другое интересное квантовое свойство, предсказанное для этих резонаторных устройств: возможность усиления изображений без добавления дополнительного шума (бесшумовое усиление), которое описано в главе 7 этой книги для случая параметрического усиления бегущей волны. Усиление достигает очень высоких значений при приближении к порогу генерации снизу, в то время как необходима гораздо большая мощность накачки для того, чтобы достичь тех же значений при параметрическом усилении бегущей волны. Теоретически было показано, что ВОПУ с плоским кольцевым резонатором способен усилить фазово-чувствительным образом небольшую часть входного изображения без потери в отношении сигнал/шум [35]. В случае же конфокального резонатора возможно одновременно усилить бесшумовым образом все точки входного изображения, если это изображение симметрично по отношению к оси резонатора [36].

3.4. Экспериментальные результаты

В предыдущем разделе было показано, что в ПГС, содержащих вырожденные резонаторы (а точнее, конфокальные резонаторы) возможно наблюдать много интересных квантовых эффектов. На рис. 3.3 представлена общая схема экспериментальной установки, используемой для наблюдения таких эффектов. Параметрический кристалл КТР с синхронизмом второго типа, составленный из двух частей для того чтобы скомпенсировать эффекты сноса пучков, контролируется по температуре и углу поворота. Такой кристалл помещается в резонатор, состоящий из двух одинаковых зеркал; при этом длина резонатора контролируется двояко: грубый контроль осуществляется с помощью микрометрического винта и обеспечивает положение резонатора в конфокальной точке; точный контроль осуществляется с помощью пьезокристаллического датчика, что позволяет обеспечить точный резонанс с различными модами. Размер перетяжки пучка накачки может варьироваться и выбирается обычно большим, чем размер основной моды резонатора TEM_{00} для того, чтобы возбудить много поперечных сигнальных и холостых мод. Так как пучок накачки не оптимально сфокусирован в резонаторе, порог генерации выше, чем для одномодового ПГС. По этой причине в большинстве случаев выбирается трехрезонансная конфигурация, т.е. в резонансе находятся три поля: сигнальное, холостое и поле накачки. Канал «инфракрасной инъекции», изображенный справа на рис. 3.3, используется для экспериментов с параметрическим усилением.

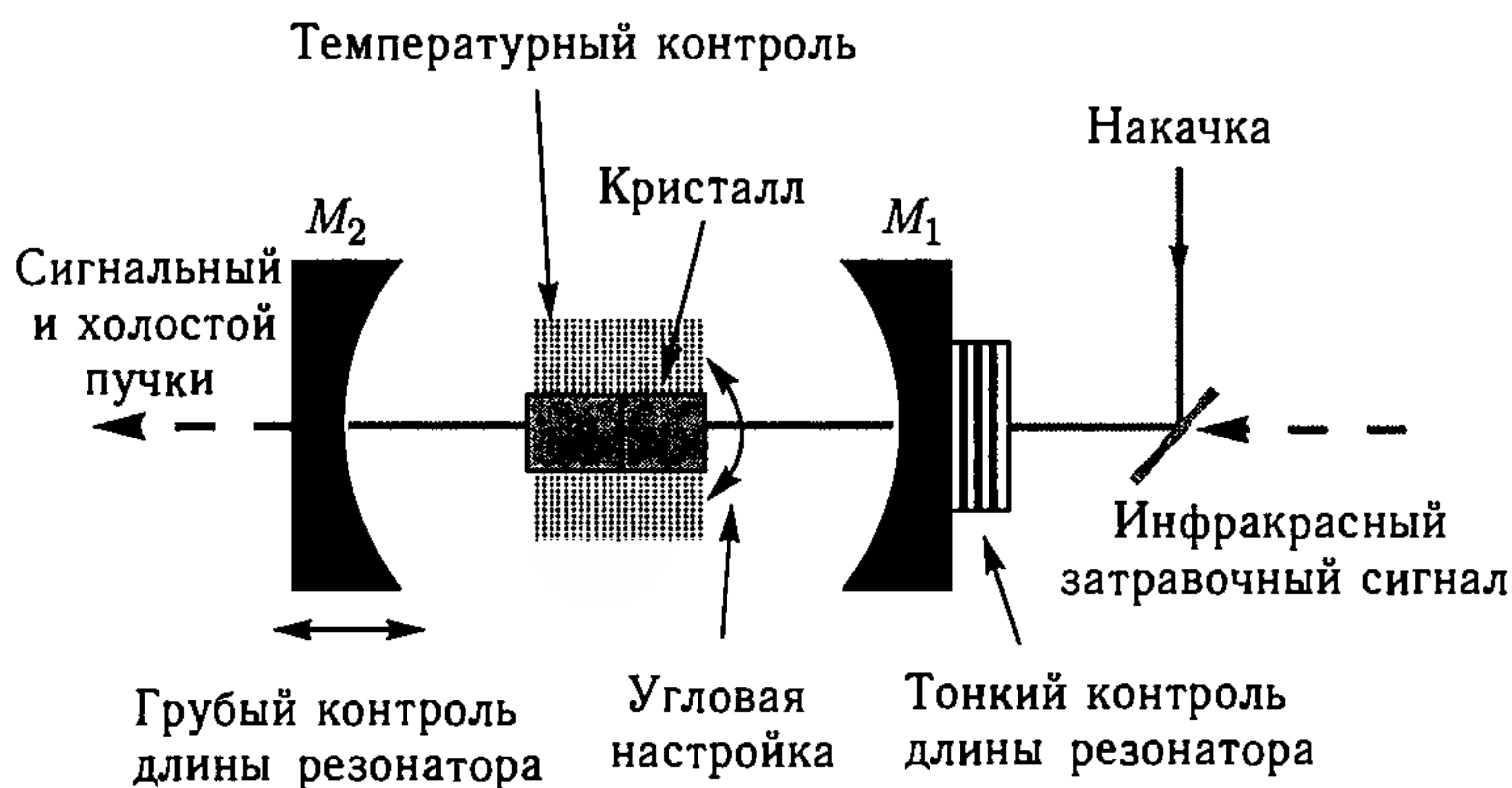


Рис. 3.3. Схема экспериментальной установки

3.4.1. Классические эффекты: наблюдение оптических изображений. В первой серии экспериментов [37, 38] поперечное распределение поля, генерируемого в надпороговом режиме, записывалось CCD-камерой в ближней и дальней зонах. Сигнальный и холостой пучки, имеющие различные частоты, разделялись поляризационной светоделительной пластиной. Если длина резонатора L была больше, чем его длина при точной конфокальности L_{conf} хотя бы на долю миллиметра, возбуждались простые моды TEM_{00} . Сложные картины наблюдались при точной конфокальности, $L = L_{conf}$, а так-

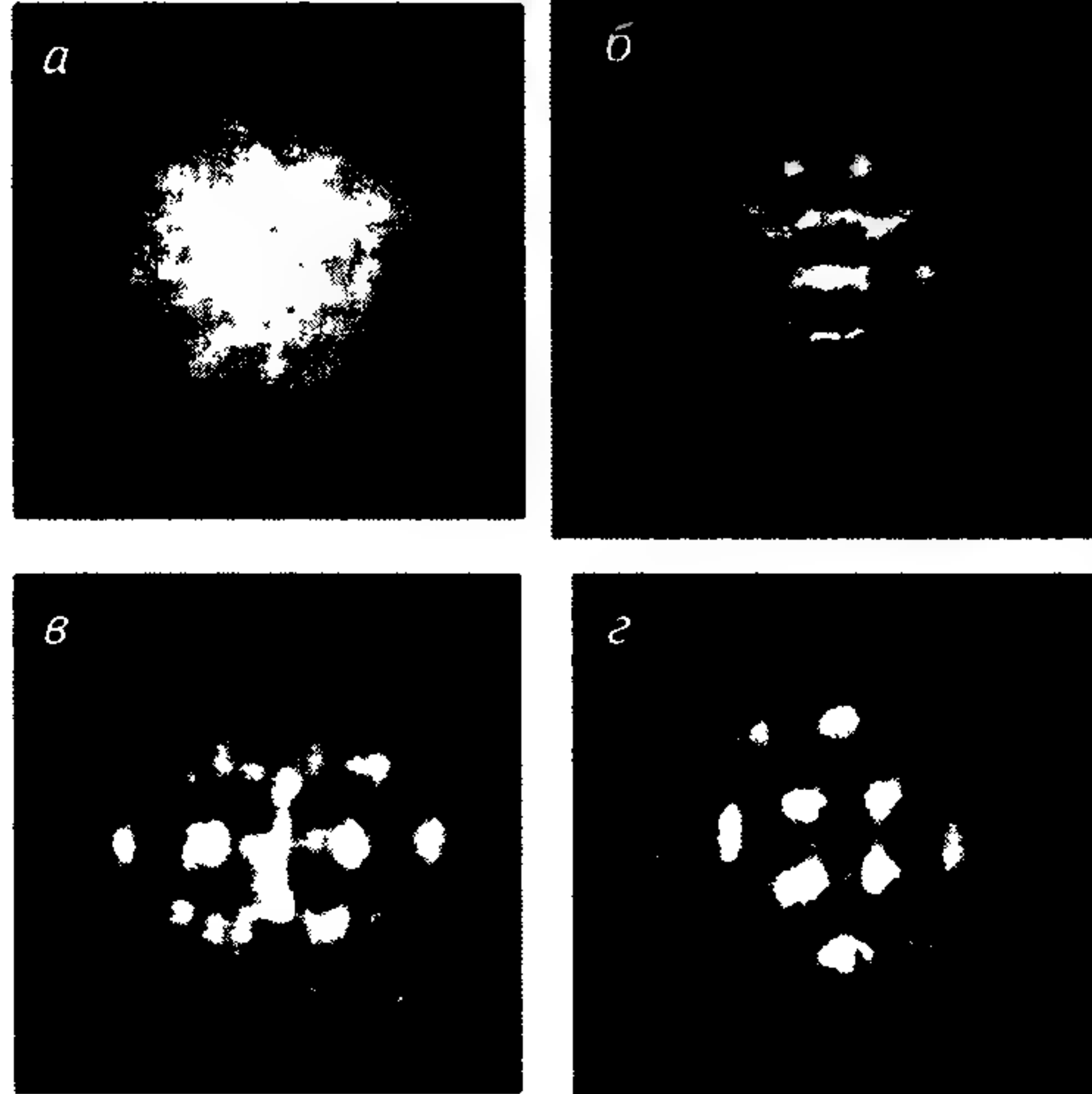


Рис. 3.4. Центральная часть распределения интенсивности в дальней зоне для сигнального пучка при мощности накачки 360 мВ; грубом изменении длины: а) $L = L_{\text{conf}} = 0,5$ мм; б) $L = L_{\text{conf}} = 0,4$ мм; в) и г) $L = L_{\text{conf}} = 1$ мм. Случаи в) и г) соответствуют различным значениям тонкой настройки длины резонатора

же, в случае $L < L_{\text{conf}}$ при более высокой мощности накачки. Эту особенность можно объяснить эффектом наведенной тепловой внутрирезонаторной линзы, который уменьшает реальное значение L_{conf} при воздействии интенсивного поля накачки.

На рис. 3.4 приведено несколько изображений в сигнальном пучке, полученных при высокой интенсивности накачки. В центре генерируемого сигнального пучка можно видеть особенности, размер которых много меньше в сравнении с размером перетяжки моды TEM_{00} и зависит от того, насколько длина резонатора близка к резонансной. Для того чтобы наблюдать эти особенности требуется не меньше 25 гауссовых мод TEM_{pq} . Отметим, что в общем случае изображения, возникающие в сигнальном и холостом пучках, различны. Сложность сравнения экспериментальных картин с результатами теоретических расчетов (как, например, приведенных на рис. 3.1) связана с тем, что существующие на сегодня теории не учитывают многих эффектов, присутствующих в эксперименте: эффекта тепловой линзы, остаточного эффекта сноса пучка в кристалле, дифракции в кристалле и других. Тем не менее компьютерное моделирование позволяет получить картины с подобными особенностями [41]. Такие же изображения наблюдались позднее авторами статьи [42].

3.4.2. Наблюдение квантовых корреляций в изображениях. Предыдущие исследования показали, что возможно найти такие экспериментальные условия, при которых резонатор рассматривается как вырожденный, другими словами, экспериментально возможно добиться, чтобы разделение между различными поперечными модами было много меньше ширины линии резонатора. Выполнение этого условия необходимо для наблюдения квантовых пространственных эффектов. Первый эксперимент был в этой области посвя-

щен исследованию пространственного распределения квантовых корреляций между интенсивностями сигнального и холостого пучков [39]. С этой целью на выходе ПГС (слева на рис. 3.3) помещалась диафрагма с варьируемым диаметром. Сигнальный и холостой пучки разделялись, как и раньше, с помощью поляризационной светоделительной пластины, установленной после ирисовой диафрагмы; измеряли уровень флуктуаций N_d разности интенсивностей между двумя пучками в зависимости от величины отверстия. Экспериментальные значения этих флуктуаций, нормированных на величину дробового шума, представлены на рис. 3.5, по оси абсцисс отложен коэффициент пропускания диафрагмы (по интенсивности). Значения N_d меньше единицы свидетельствуют о наличии квантовых корреляций между соответствующими прошедшими частями сигнального и холостого пучков. Рис. 3.5, *а* получен для неконфокального резонатора. В этой конфигурации генерируемые сигнальный и холостой пучки почти идеально соответствовали модам TEM_{00} . При этом наблюдалась квантовая корреляция между интенсивностями полностью прошедших пучков (коэффициент пропускания равен 1) на уровне 20% ($N_d = 0,8$). При постепенном уменьшении диаметра диафрагмы наблюдался линейный рост N_d в зависимости от коэффициента пропускания: потери света на диафрагме

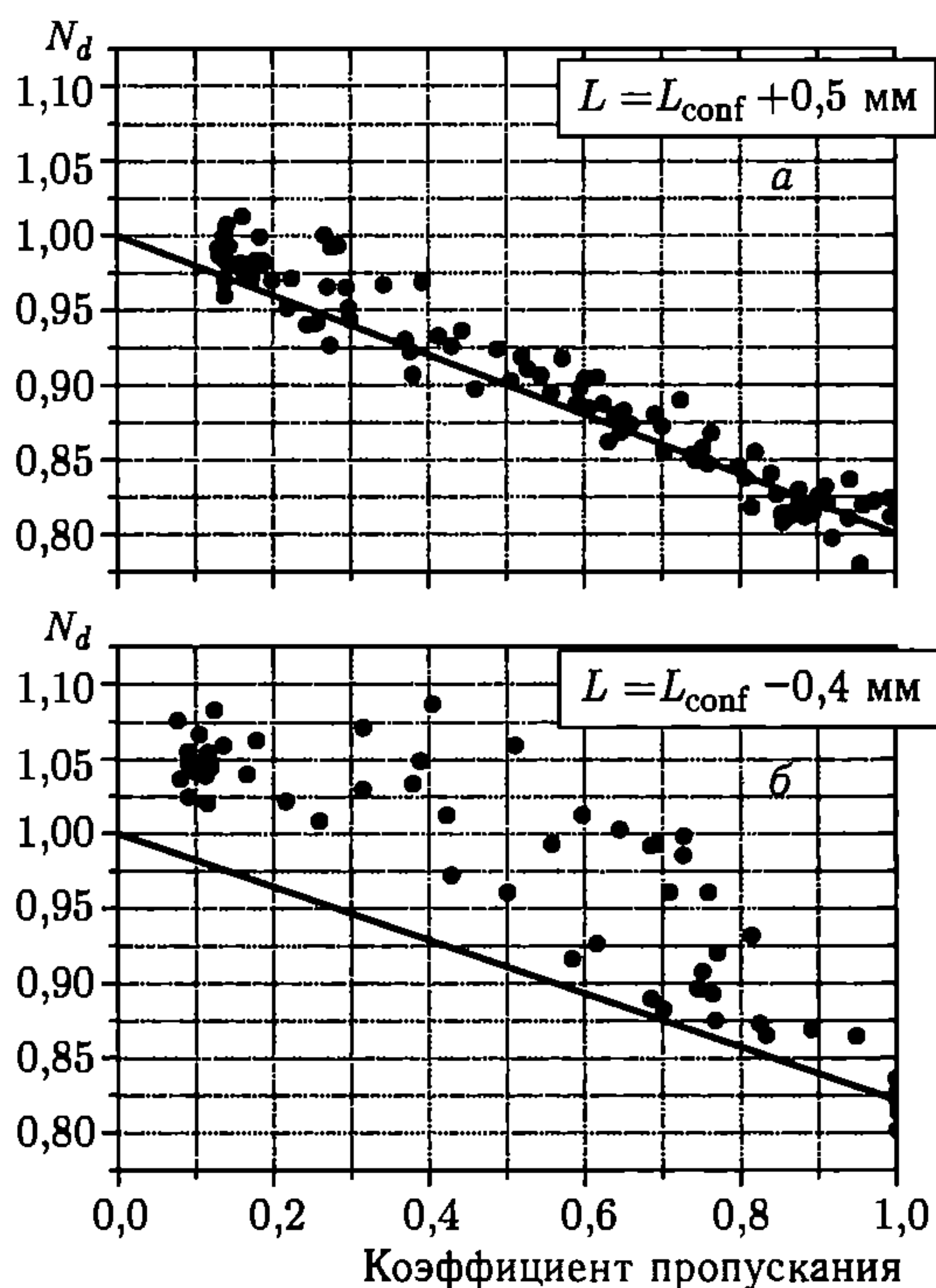


Рис. 3.5. Пространственное распределение нормированных флуктуаций N_d разности интенсивностей в зависимости от коэффициента пропускания ирисовой диафрагмы T . Точками отмечены значения N_d для длины резонатора L больше (рис. *а*) и меньше (рис. *б*) длины конфокальности. Сплошная линия соответствует значениям N_d , которые могли бы быть получены, если бы мы проводили измерения с одномодовым пучком обладающим таким же сжатием при полностью открытой диафрагме, что и в исследуемом поле

разрушали квантовый эффект как и любой другой вид потерь. Сигнальный и холостой пучки невырожденного ПГС в этом случае можно рассматривать как состоящие из фотонов, коррелированных во времени, но имеющих случайное пространственное распределение в каждом из пучков. Рис. 3.5, б соответствует конфокальному резонатору. Средние поля сигнального и холостого пучков в этом случае имеют пространственные распределения, отличающиеся друг от друга. Несмотря на это различие, два пучка по-прежнему являются пучками-близнецами. Как и раньше, можно наблюдать квантовые корреляции на уровне почти 20 % между полными интенсивностями пучков. Однако, когда диаметр диафрагмы уменьшается, результат теперь отличен от прежнего, и зависимость N_d от коэффициента пропускания не является более линейной. Детальный анализ многомодового квантового поля [43] показал, что такое нелинейное поведение доказывает невозможность интерпретации генерируемого поля как одномодового неклассического квантового состояния света. Если бы два пучка состояли из идеально коррелированных в пространстве фотонов, как показано на рис. 3.2, наблюдаемое значение N_d не зависело бы от пропускания диафрагмы. Это не так для обсуждаемого эксперимента, где фотоны, по-видимому, пространственно коррелированы только во внешних частях сигнального и холостого пучков и имеют случайное распределение в центральных частях — эта особенность излучения до сих пор не имеет теоретического объяснения.

Второй эксперимент был посвящен исследованию частотно-вырожденного ОПУ ниже порога генерации, для которого, как мы показали, предсказано много пространственных квантовых эффектов. Более детально было изучено явление внутрирезонаторного параметрического усиления изображений в непрерывном режиме [40]. Показано [44], что параметрическое усиление с накачкой на частоте 2ω , входным сигналом на частоте ω в кристалле с синхронизмом второго типа предоставляет интересные возможности: если направление поляризации входного сигнала параллельно направлению поляризации сигнального или холостого поля, усилитель работает как фазово-нечувствительный; если входной сигнал поляризован под углом $\pi/4$ к этим направлениям, усилитель работает как фазово-чувствительный и возможно бесшумовое усиление. Более того, в последней конфигурации в режиме большого усиления две проекции усиленной сигнальной волны на направления поляризации сигнального и холостого полей являются «квантовыми клонами» [45]. Бесшумовой режим параметрического усиления изображений уже наблюдался для временных флуктуаций [46] при использовании мощного импульсного лазера в безрезонаторной конфигурации, а недавно и для чисто пространственных флуктуаций [47] (см. главу 7 этой книги). В описываемом эксперименте, используя вырожденные резонаторы, мы наблюдалось большое усиление — примерно 23 дБ при мощности поля накачки только 20 мВ. Как оказалось, в обычном конфокальном резонаторе, резонансном одновременно модам накачки, сигнальным и холостым модам (для того чтобы понизить порог генерации) довольно трудно достичь стабильного фазово-чувствительного усиления. Чтобы решить эту проблему, был использован «двойной» резонатор (см. рис. 3.6), который возможно независимо настроить на резонанс моды

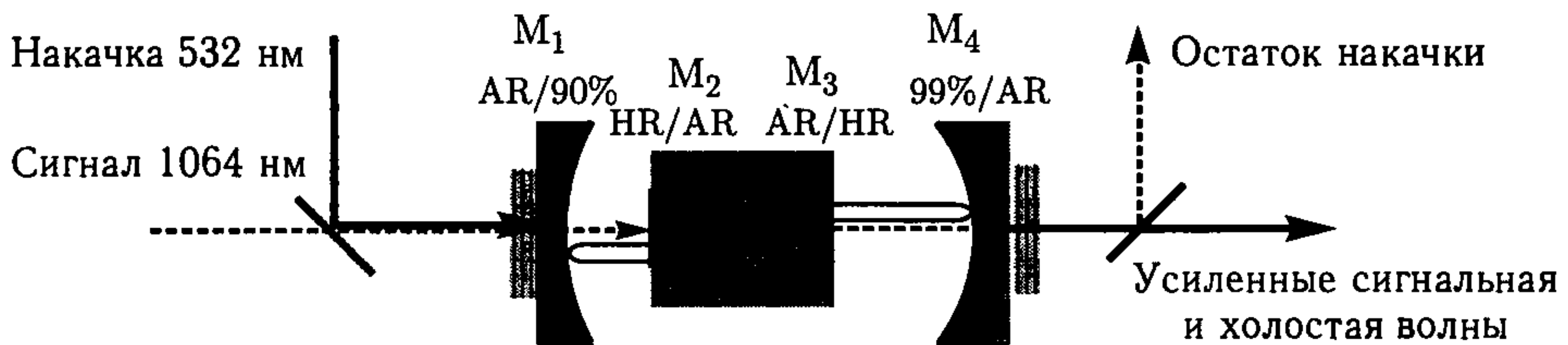


Рис. 3.6. Двойной резонатор: резонатор для моды накачки ограничен зеркалом M_1 и правой гранью M_3 кристалла; резонатор для сигнального и холостого полей ограничен левой гранью кристалла M_2 и зеркалом M_4 , так что они могут быть настроены на резонансные частоты независимо

накачки, меняя положение зеркала M_1 , и резонанс сигнальной и холостой мод, меняя положение зеркала M_4 и температуру кристалла. Тот факт, что грань кристалла M_2 была плоской не позволил нам получить конфокальный резонатор для сигнального и холостого пучков. Вместо этого использовался полуконфокальный резонатор — другой пример вырожденного резонатора, описанный в разд. 3.2. Рис. 3.7 демонстрирует результаты эксперимента, в котором в качестве входного изображения использовалась двойная щель. Как показано в разд. 3.2, полуконфокальный резонатор пропускает четную часть входного изображения (т. е. само изображение двойной щели) и четную часть его фурье-преобразования. Эта последняя часть, на самом деле, и наблюдается (см. изображения в черных прямоугольниках справа на рис. 3.7), поскольку, как оказалось, она имеет более выраженную центральную область, чем прошедшее изображение. На левой части рисунка приведена зависимость полной интенсивности сигнальной и холостой мод на выходе резонатора от разности фаз поля накачки и входной сигнальной волны. Она ясно демонстрирует режим фазово-чувствительного усиления изображения с максимальным усилением 5 дБ, которое почти постоянно в широкой области входных полей. На настоящей стадии состояния эксперимента невозможно измерить флукту-

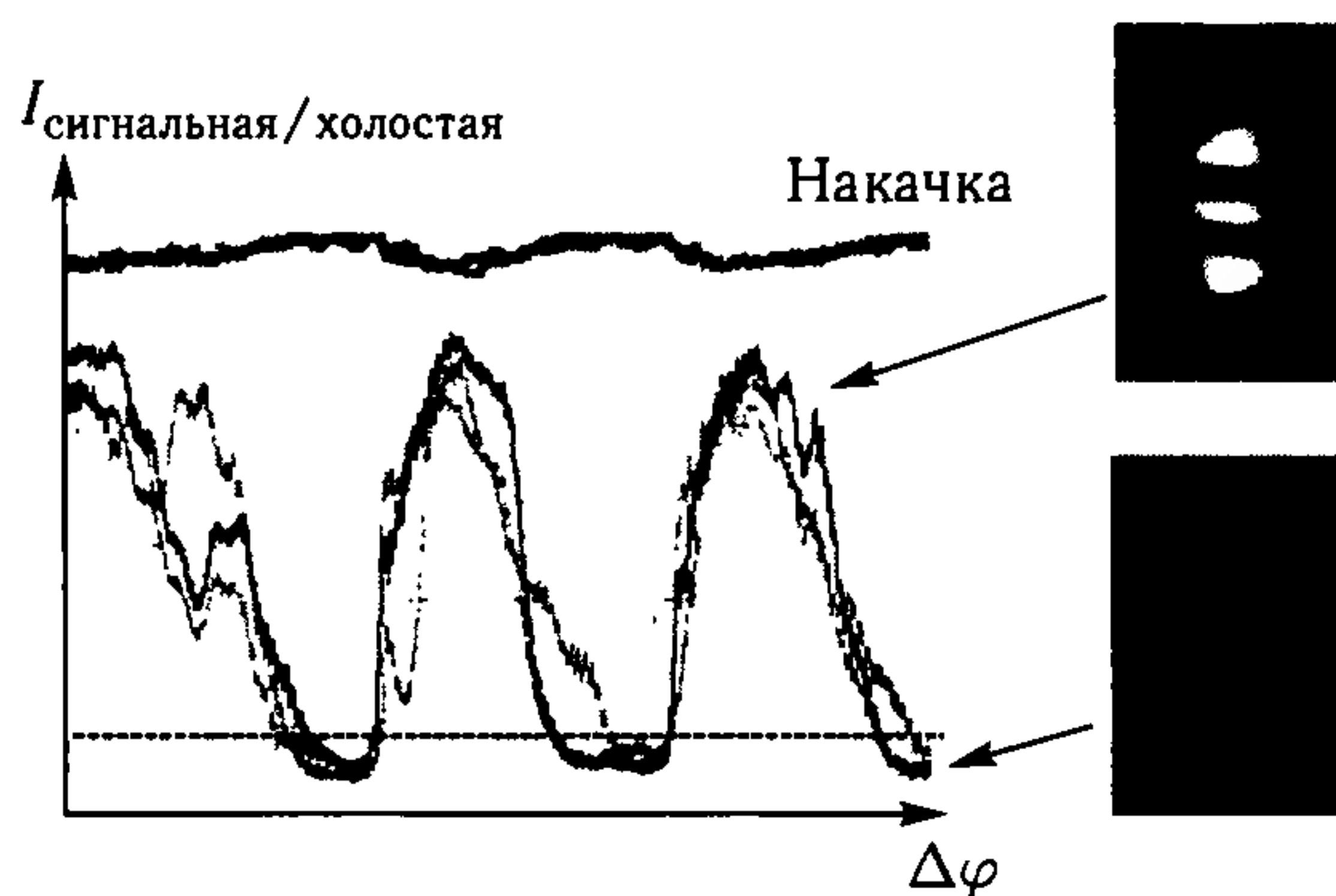


Рис. 3.7. Слева: полные интенсивности поля накачки, сигнального и холостого полей в зависимости от разности фаз входной сигнальной моды и моды накачки. Максимум (усиление) для сигнального и холостого полей возникает, когда разность фаз равна нулю, а минимум (ослабление) — когда разность фаз равна π . Пунктирная линия соответствует оценочной интенсивности сигнального и холостого полей в отсутствии усиления. Справа: поперечный профиль сигнального пучка при максимальном и минимальном усилении

ационные зависимости, так что бесшумовой характер усиления еще требует подтверждения. В усиленном поле продемонстрировано наличие квантовых корреляций: наблюдалось подавление шума на 12% ниже уровня дробового шума при измерении проекций полной интенсивности выходного поля на направления поляризаций сигнального и холостого полей. Таким образом, режим «квантового клонирования» двух поляризационных компонент усиленного изображения был экспериментально достигнут.

3.5. Заключение

Экспериментально были продемонстрированы чисто квантовые пространственные эффекты, предсказанные для ПГС с вырожденными оптическими резонаторами. Реализация экспериментов оказалась довольно трудной, так как одновременно требовалось удовлетворить многим необходимым условиям. По этой причине наблюдаемые на сегодня квантовые эффекты малы, и до сих пор мы не смогли увидеть локального сжатия или локального перепутывания.

Тем не менее эти первые демонстрации квантовых пространственных эффектов в непрерывном режиме обнадеживают и будут несомненно улучшены в дальнейшем. Заметим также, что предварительные эксперименты позволяют сказать, что «самоизображающие резонаторы», описанные в разд. 3.2 обладают многообещающим потенциалом для квантовых внутрирезонаторных изображений. Эти системы будут активно изучаться в ближайшем будущем.

Список литературы

1. *Boulouch R.* // Journal de Physique Théorique et Appliquée. 1893. V. 2. P. 316.
2. *Fabry C., Perot A.* // Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences. 1896 V. 123. P. 802.
3. *Schawlow A., Townes C.* // Phys. Rev. 1958. V. 112. P. 1940.
4. *Siegman A.* Lasers. — Mill Valley, CA: University Science Books, 1986.
5. *Treps N., Grosse N., Bowen W. P., Fabre C., Bachor H.-A., Lam P. K.* // Science. 2003. V. 301. P. 940.
6. *Arnaud J.* // Appl. Opt. 1969. V. 8. P. 189.
7. *Gigan S., Lopez L., Treps N., Maître A., Fabre C.* // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 023804.
8. *Dingjan J.* Multimode optical resonators and wave chaos. Ph.D. Thesis. — Leiden University, 2003.
9. *Lohmann A., Mendlovic D.* // J. Opt. Soc. Am. A. 1992. V. 9. P. 2009.
10. *Taranenko V. B., Staliunas K., Weiss C. O.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2236.
11. *Schwob C., Cohadon P. F., Fabre C., Marte M., Ritsch H., Gatti A., Lugiato L. A.* // Appl. Phys. B. 1998. V. 66. P. 685.
12. *Fabre C., Vaupel M., N. Treps, P. F. Cohadon, C. Schwob, and A. Maître* C. R. Acad. Sci. Paris 1 IV, P. 553 (2000).
13. *Marte M., Ritsch H., Petsas K. I., Gatti A., Lugiato L. A., Fabre C., Leduc D.* // Opt. Express. 1998. V. 3. P. 71.
14. *Oppo G. L., Brambilla M., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 2028.

15. *Oppo G. L., Brambilla M., Camesasca D., Gatti A., Lugiato L. A. // J. Mod. Opt. 1994. V. 41. P. 1151.*
16. *Sanchez-Morcillo V., Roldan E., de Valcarcel G. // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 3237.*
17. *Staliunas K. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 81.*
18. *Staliunas K., Sanchez-Morcillo V. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 1454.*
19. *Santagiustina M., Colet P., San Miguel M., Walgraef D. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 3843.*
20. *Oppo G. L., Scroggie A., Firth W. // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 1999. V. 1. P. 133.*
21. *Izus G., San Miguel M., Santagiustina M. // Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 1.*
22. *Oppo G. L., Scroggie A., Sinclair S., Brambilla M. // J. Mod. Opt. 2000. V. 47. P. 2005.*
23. *Lodahl P., Bache M., Saffman M. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 4506.*
24. *Ward H., Ouarzazi M., Taki M., Glorieux P. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 016604.*
25. *Gatti A., Wiedemann H., Lugiato L. A., Marzoli I., Oppo G. L., Barnett S. // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 877.*
26. *Lugiato L. A., Gatti A. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3868.*
27. *Gatti A., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 1675.*
28. *Szwaj C., Oppo G. L., Gatti A., Lugiato L. A. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 433.*
29. *Grynberg G., Lugiato L. A. // Europhys. Lett. 1995. V. 29. P. 678.*
30. *Marzoli I., Gatti A., Lugiato L. A. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2092.*
31. *Gatti A., Lugiato L. A., Petsas K. I., and I. Marzoli // Europhys. Lett. 1999. V. 46. P. 461.*
32. *Grangier P., Lugiato L. A. // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. P. 225.*
33. *Petsas K. I., Gatti A., Lugiato L. A., Fabre C. // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 22. P. 501.*
34. *Lopez L., Gigan S., Maître A., Treps N., Fabre C., Gatti A. // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 3806.*
35. *Kolobov M. I., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4930.*
36. *Mancini S., Gatti A., Lugiato L. A. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 12. P. 499.*
37. *Vaupel M., Maître A., Fabre C. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 5278.*
38. *Ducci S., Treps N., Maître A., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 023803.*
39. *Martinelli M., Treps N., Ducci S., Gigan S., Maître A., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2003. V. 67. P. 023808.*
40. *Gigan S., Lopez L., Delaubert V., Treps N., Fabre C., Maître A. // J. Mod. Opt. Special issue on Quantum Imaging. 2005.*
41. *Le Berre M., Ressayre E., Tallet A. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 066207.*
42. *Lassen M., Tidemand-Lichtenberg P., Buchhave P. // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 023817.*
43. *Treps N., Delaubert V., Maître A., Courty J. M., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 013820.*

- 44. *Levenson J. A., Abram I., Rivera T., Fayolle P., Garreau J. C., Grangier P.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 267.
- 45. *Levenson J. A., Abram I., Rivera T., Grangier P.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1993. V. 10. P. 2233.
- 46. *Choi S.-K., Vasilyev M., Kumar P.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1938.
- 47. *Mosset A., Devaux F., Lantz E.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 223603.

Литература, добавленная при переводе

- 48. *Kawase D., Miyamoto Y., Takeda M., Sasaki K., Takeuchi Sh.* Observing Quantum Correlation of Photons in Laguerre-Gauss Modes Using the Gouy Phase // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 050501.

ФОРМИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ СИНТЕЗА МНОГОМОДОВОГО КВАНТОВОГО СВЕТА

Николя Трепс, Ганс Бахор, Пинг К. Лем, Клод Фабр

4.1. Введение

Оптическое изображение включает в себе огромный объем информации, часто это могут быть миллионы пикселей. Оптическое изображение характеризуется амплитудой поля во всех точках выбранной поперечной плоскости [1]. В квантовой механике оно описывается существенно многомодовым квантовым состоянием. В настоящее время большинство идей и экспериментов в области квантовых изображений имеют своей целью получение света, который, обладая неклассическими свойствами, был бы в тоже время существенно многомодовым [2, 3]. Эти замечательные многомодовые особенности могут приводить как к теоретическому усложнению задачи, так и к экспериментальным трудностям.

Однако часто, имея дело с конкретными приложениями, такими как позиционирование лазерного пучка или считывание информации с образца оптическими методами, количество извлекаемой из изображения информации оказывается весьма скромным. Во многих случаях оправдано предположить, что изменения, которые претерпевает изображение, зависят только от нескольких параметров, и имеется значительная априорная информация об изображении. Мы покажем, что в этом случае существенно многомодовая проблема квантового изображения может быть сведена к более легкой, содержащей лишь нескольких мод.

Когда поперечный профиль невозмущенного изображения известен, каждое производимое измерение в точности ассоциируется с одной конкретной поперечной модой, отвечающей за шум в этом измерении. Мы покажем, что формирование флуктуаций падающего света таким образом, чтобы они по форме соответствовали флуктуациям в конкретной поперечной моде, позволяет проводить измерения с точностью выше стандартного квантового предела, увеличивая чувствительность измерения соответствующих параметров. В частности будет показано, что для одновременного измерения N параметров на уровне шума ниже дробового необходимо использовать неклассический многомодовый свет, описываемый тензорным произведением $N + 1$ мод, из которых N мод должны находиться в сжатом состоянии.

Общая логика изложенных выше соображений базируется на новом экспериментальном протоколе, который мы назвали *модовый синтез пространственно неклассического света*. Этот протокол основан на когерентной интерференции правильно подобранных поперечных мод, так чтобы получить в результате пространственно неклассический пучок света, необходимый для конкретной задачи. В следующих разделах мы кратко рассмотрим теоретические основы и сосредоточимся на экспериментальной технике, связанной с модовым синтезом квантовых изображений. Мы также обсудим приложения, касающиеся *квантовой лазерной указки* и оптического считывания квантовой информации.

4.2. Квантовый шум при регистрации матричным детектором

Рассмотрим пучок монохроматического света с частотой ω_0 , распространяющийся вдоль оси z . Используя параксиальное приближение и приближение медленно меняющихся амплитуд, запишем положительно-частотный оператор электрического поля в виде:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c T}} \hat{A}(\mathbf{r}, z), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечной плоскости; T — время усреднения детектора и

$$\hat{A}(\mathbf{r}, z) = \sum_i \hat{a}_i(z) u_i(\mathbf{r}, z). \quad (4.2)$$

В этом выражении введен базис ортогональных поперечных мод $\{u_i(\mathbf{r}, z)\}$ и оператор $\hat{a}_i(z)$ уничтожения фотона в моде $u_i(\mathbf{r}, z)$. Поле каждой из мод должно удовлетворять уравнению свободного распространения в вакууме [4]. В дальнейшем мы будем опускать указание на зависимость от z в выражениях для полевых мод.

Определим, что именно мы будем называть измерением. Мы рассматриваем пучок света, падающий на матричный детектор, каждый пиксел которого имеет площадь D_i в поперечной плоскости. Различные пикселы не перекрываются друг с другом, и весь свет детектируется. Используя выражение (4.2), находим, что число фотонов (и число электронов для детектора с единичной квантовой эффективностью), собираемое на каждом пикселе за время усреднения T , равно:

$$\hat{N}(D_i) = \int_{D_i} \hat{A}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}(\mathbf{r}) d^2 r. \quad (4.3)$$

Извлечение информации из массива пикселей детектора состоит в определении аналоговым или цифровым методом линейной комбинации сигналов от всех пикселей. Мы моделируем протокол обработки изображения с помощью введения для каждого пикселя коэффициента усиления σ_i , который может

быть положительным или отрицательным. Результирующий сигнал описывается оператором

$$\hat{N}_\sigma = \sum_i \sigma_i \hat{N}(D_i), \quad (4.4)$$

где $\hat{N}_\sigma$ определяется свойствами изображения и выбором коэффициентов усиления. Среднее значение $\hat{N}_\sigma$ пропорционально измеряемому сигналу. Можно показать, что изменение изображения при каждом производимом измерении, к которому оно чувствительно, может быть описано одним параметром p (например, величиной смещения, если мы измеряем смещение изображения). Мы будем называть p *сигналом*, а отклонение от этой величины — *шумом* измерения. Во многих практически важных случаях мы можем интересоваться *разностными измерениями*, когда $p = 0$ (т. е. когда среднее значение сигнала равно нулю). В этих случаях любые флуктуации, возникающие во всей моде, например, флуктуации полной интенсивности света, не будут влиять на измерение малых отклонений p от нулевого значения. Однако данный анализ может быть адаптирован для ситуаций, когда сигнал не равен нулю.

Для того чтобы упростить анализ мы выберем первую моду $u_0(\mathbf{r})$ из базиса поперечных мод и сопоставим ей поперечное распределение среднего электрического поля при $p = 0$, так что $u_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \langle \hat{A}(\mathbf{r}) \rangle$, где N_0 — среднее полное число фотонов в пучке. Подразумевается, что амплитуды всех других мод имеют нулевые средние значения, в то время как их флуктуации могут быть отличны от вакуумных в случае неклассических мод. Дисперсия измеряемой величины вычисляется точно и равна [4]

$$\langle \Delta \hat{N}_\sigma^2 \rangle = f^2 N_0 \langle \Delta \hat{X}_w^{+2} \rangle, \quad (4.5)$$

где f — нормировочный множитель, такой что $f^2 = \sum_i \sigma_i^2 \int_{D_i} u_0^*(\mathbf{r}) u_0(\mathbf{r}) d^2 r$;

$\hat{X}_w^+$ — оператор амплитудной квадратурной компоненты измеряемой поперечной моды $w(\mathbf{r})$, определенной следующим образом:

$$\forall \mathbf{r}, \mathbf{r} \in D_i \rightarrow w(\mathbf{r}) = \frac{1}{f} \sigma_i u_0(\mathbf{r}). \quad (4.6)$$

Эта мода и мода среднего поля u_0 совпадают с точностью до весовых множителей, связанных с усилением. Для разностных измерений (т. е. когда $N_\sigma(p = 0) = 0$) детектируемая мода ортогональна u_0 . Уравнение (4.6) заслуживает некоторых комментариев. В случае когерентного поля u_0 содержит в себе среднее поле, все же остальные моды находятся в вакуумном состоянии. В частности, дисперсия $\langle \Delta \hat{X}_w^{+2} \rangle$ равна 1. Мы обнаружили, что шум в измерении с когерентным полем пропорционален среднему числу фотонов. Более того, мы установили: чтобы уменьшить этот шум существует только одна возможность — воздействовать на измеряемую моду. Например, заполнение этой моды сжатым вакуумом будет уменьшать шум измерения.

Наконец, отметим, что возможно проводить одновременно несколько измерений типа, описываемых выражением (4.4). При условии, что эти измерения «ортогональны» друг другу, то есть приводят к линейно независимым значениям N_σ , возможно провести все эти измерения так, чтобы шумы в них были ниже стандартного квантового предела. Для каждого из них мы можем определить детектируемые моды $w_1, w_2, \dots$. Таким образом, дисперсии шума этих сигналов пропорциональны шуму амплитудных квадратур в каждой из измеряемых мод. Чтобы уменьшить их флуктуации одновременно, необходимо заполнить все эти моды вакуумом, сжатым в соответствующей квадратуре. Следовательно, для одновременного улучшения измерения N параметров на уровне шумов ниже стандартного квантового предела достаточно использовать суперпозицию N хорошо определенных многомодовых сжатых состояний и одного когерентного состояния. В следующем разделе мы покажем, как это может быть реализовано экспериментально.

4.3. Детектирование ниже уровня дробового шума

Мы показали, что результат измерений, производимых над изображением матричным детектором, зависит от шума, природа которого абсолютно ясна. Этот шум возникает вследствие квантовых флуктуаций измеряемой моды — поперечной моды, зависящей как от изображения, так и от детекторов. Для того чтобы уменьшить этот шум необходимо использовать сжатый свет с соответствующим модовым профилем. Чтобы выполнить такой эксперимент необходимо обеспечить высоко-эффективную интерференцию сжатого в соответствующих модах вакуумного состояния со средним полем. Затем такой свет падает на исследуемый образец. Это приводит к некоторым изменениям в параметрах пучка. Наконец, пучок измеряется матричным детектором с соответствующими различными коэффициентами усиления на различных пикселях.

Отметим несколько ключевых составляющих, требуемых для выполнения такого эксперимента. Во-первых, необходимо получить одномодовое сжатое вакуумное состояние, например, от оптического параметрического усилителя, работающего около порога параметрической генерации, что обеспечивает хорошее и стабильное сжатие. Во-вторых, эти сжатые вакуумные состояния должны быть получены или в соответствующей поперечной моде, или путем манипуляций должны быть туда эффективно введены). Можно было бы обсуждать непосредственное получение требуемого поперечного профиля сжатых состояний используя подходящий резонатор. Однако хрупкость сжатия превращает этот метод в экспериментально трудно реализуемый. Простейший способ — это найти эффективный метод преобразования сжатой моды TEM_{00} в требуемую поперечную моду. Это можно осуществить с помощью многих устройств, таких как пространственный модулятор света, или голографическая маска, или массив МЭМС (микроэлектронных механических систем). Метод, использованный в эксперименте, представленном в этой главе, основан на применении специальных оптических $\lambda/2$ -пластинок, которые приводят к различным фазовым сдвигам в различных частях светового пучка. Наконец, последнее, что необходимо для нашего эксперимента, это

выбрать метод для эффективной интерференции всех сжатых мод и среднего поля. Располагая двумя оптическими пучками с ортогональными поперечными профилями w_1 и w_2 , практическая задача заключается в том, чтобы смешать их когерентно и совместить по одному направлению распространения с минимальными потерями.

В этой главе мы представим два метода комбинирования поперечных мод. Первый зависит от свойств симметрии выбранных мод. Предположим, что имеется ось в поперечной плоскости, такая что w_1 — четная мода относительно этой оси, а w_2 — нечетная. Тогда устройством для смешения этих двух мод может быть модифицированный интерферометр Маха–Цендера. Модификация, которая требуется относительно обычной конфигурации интерферометра Маха–Цендера, состоит в том, чтобы сделать в одном плече четное число отражений, а в другом — нечетное. Любая четная мода не меняется вследствие отражений, в то время как для нечетной моды каждое отражение эквивалентно фазовому сдвигу на π . Когда две моды падают на два входных порта полупрозрачного зеркала, регулируя разность между длинами плеч интерферометра, можно добиться, чтобы обе моды выходили через один и тот же порт (см. рис. 4.1). Однако использование такого устройства не всегда возможно, и необходимо найти более общее решение. Наш второй метод основан на использовании оптического резонатора с согласованным импедансом, резонансные частоты которого селективны относительно поперечных мод. Создать резонатор, формирующий произвольную поперечную моду было бы сложной задачей, но решаемой. Для краткости изложения, предположим, что измеряемая мода w_1 — это основная мода TEM_{00} , и в резонаторе формируются поперечные моды высокого порядка, хорошо разделенные по частотам. Инжектируем сжатую вакуумную моду TEM_{00} и настроим длину резонатора таким образом, чтобы мода TEM_{00} была резонансной. Сжатое поле тогда будет полностью пропущено резонатором (в идеальном случае). С другой стороны, все моды w_2 , ортогональные моде TEM_{00} , будут отражаться. Сжатое поле в моде w_2 , падающее на выходное зеркало резонатора, будет полностью отражено и, поэтому, идеально смешается с прошедшим полем

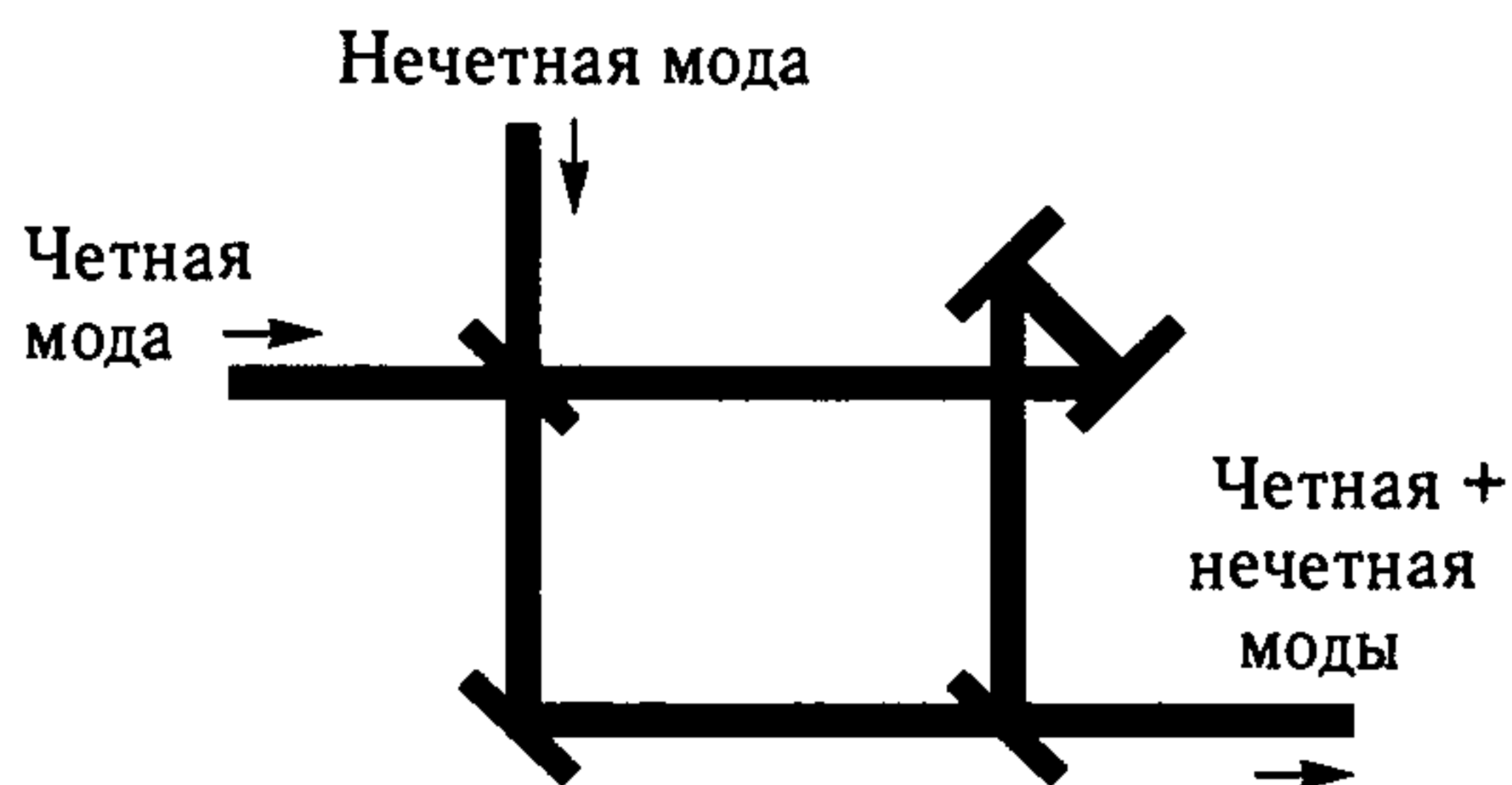


Рис. 4.1. Смешение мод с помощью модифицированного интерферометра Маха–Цендера

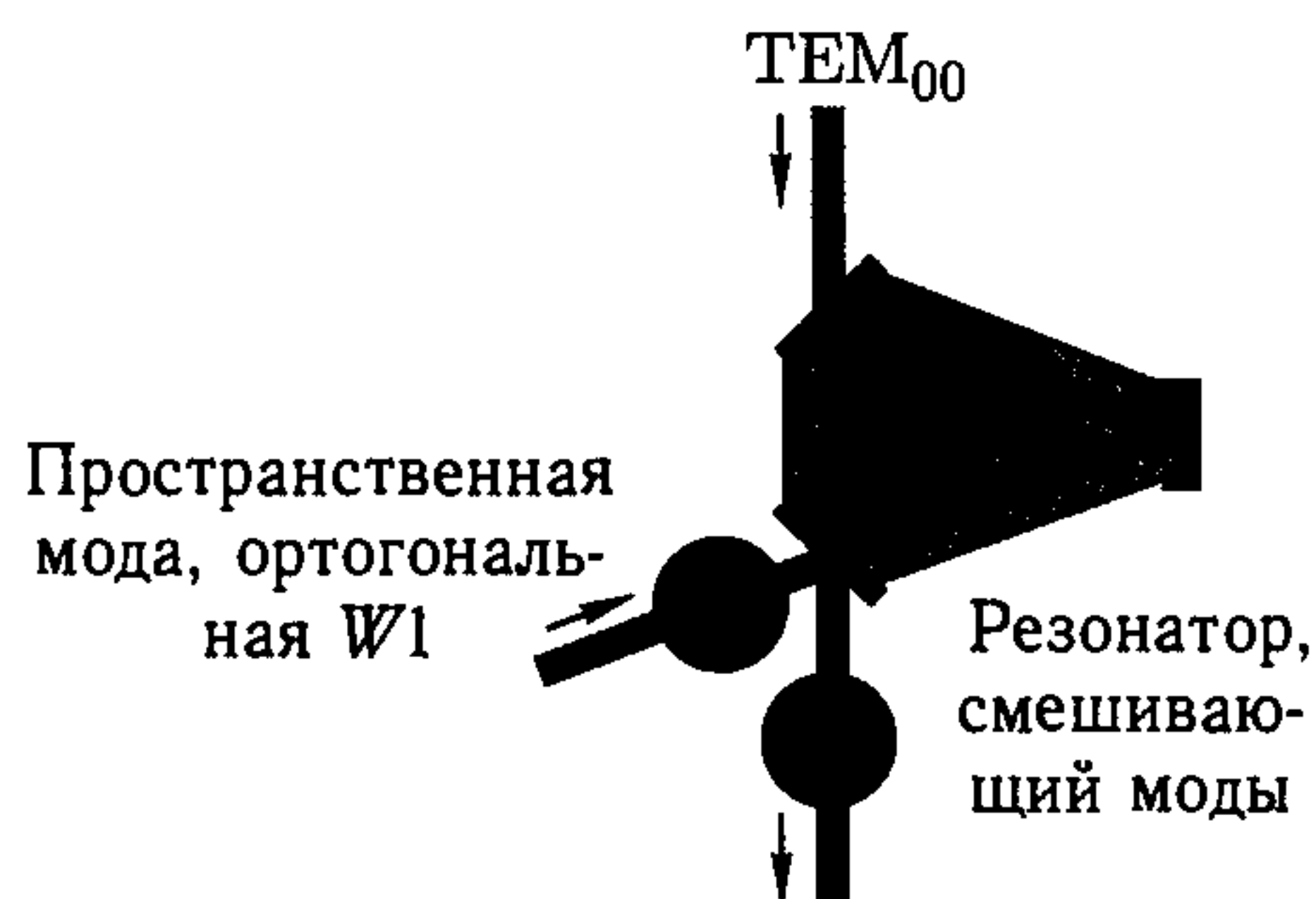


Рис. 4.2. Смешение двух мод с помощью оптического резонатора с согласованным импедансом. $W1$ — волновая пластинка, которая преобразует моду TEM_{00} в моду w_1 ; $\bar{W}1$ делает обратное преобразование

TEM₀₀. Детальная схема для общего случая двух ортогональных мод w_1 и w_2 изображена на рис. 4.2.

4.4. Квантовая лазерная указка

Первым примером приложения модового синтеза квантовых изображений является так называемая *квантовая лазерная указка*. Рассмотрим лазерный пучок, падающий на детектор, разделенный на 4 части. Этот детектор позволяет измерять смещение лазерного пучка в двух поперечных направлениях с очень высокой точностью (рис. 4.3). Например, разность между суммами двух квадрантов $a + b$ и $c + d$ дает сигнал, пропорциональный горизонтальному смещению пучка. Обозначим числа фотонов, падающих на каждый из квадрантов $\hat{N}_a$, $\hat{N}_b$, $\hat{N}_c$ и $\hat{N}_d$ соответственно. Тогда сигнал, отвечающий горизонтальному смещению пучка, представляется как $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b - \hat{N}_c - \hat{N}_d$. Это выражение имеет тот же вид, что и (4.4) с коэффициентами усиления ± 1 . Измеряемая мода (4.6) тогда сводится к «перевернутой» версии моды среднего поля (благодаря знаку «минус») как показано на рис. 4.3¹⁾. На этом рисунке мода среднего поля выбрана как TEM₀₀, и детектируемые моды для обоих

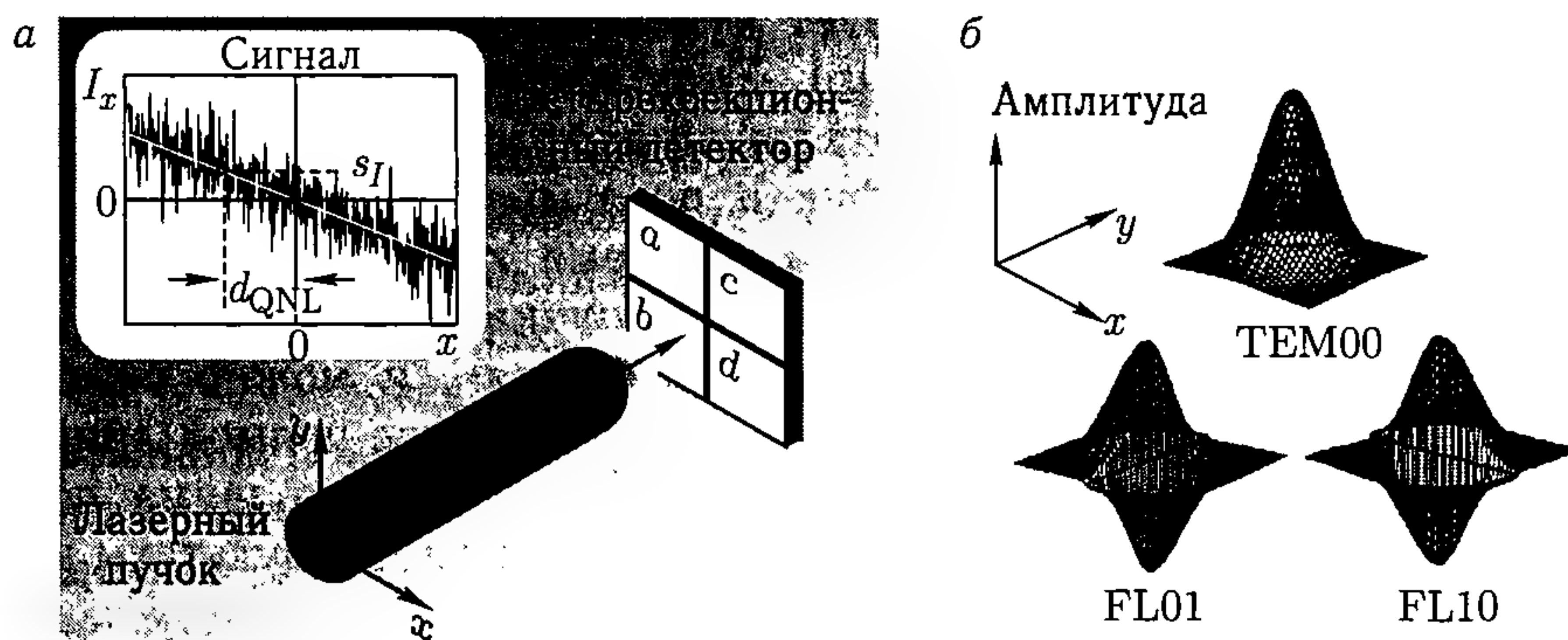


Рис. 4.3. Схема эксперимента с квантовой лазерной указкой

измерений представляют собой перевернутые версии моды TEM₀₀²⁾. В нашем эксперименте [5] использовался лазерный пучок с гауссовым профилем моды и независимо приготавливались два пучка со сжатым вакуумом. Эти два пучка были превращены в «перевернутые» моды с помощью специальных волновых пластинок. Затем пучки когерентно смешивались, используя кольцевой резонатор, как описано в предыдущем разделе. Так как малые смещения пучка света могут быть нивелированы классическими флуктуациями, обусловленными вибрациями и показателем преломления воздуха, для измерения смещения с очень малой амплитудой (меньше нанометра) выбирался сигнал на частоте 4 МГц. Эта модуляция смещения вводилась с помощью зеркала, помещенного на пьезоэлектрический привод.

¹⁾ На самом деле «переворачивается» не вся мода, а ее половинка.

²⁾ Однако в двух разных измерениях «переворачиваются» разные части моды.

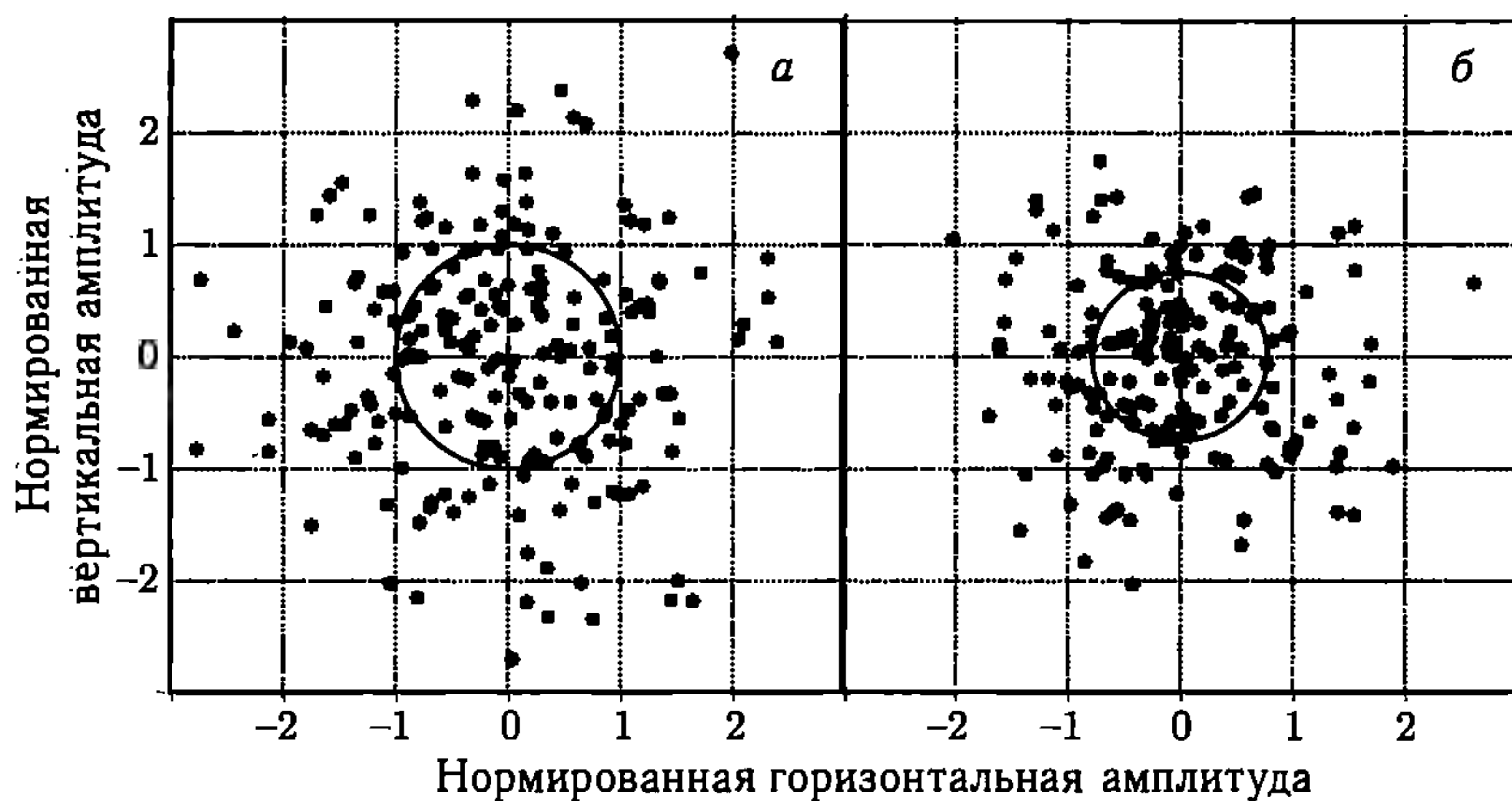


Рис. 4.4. Локализация квантовой лазерной указки

Были выполнены две серии измерений. В первой мы следили за флуктуациями положения пучка на частоте измерения, вызванными квантовой природой света. Результаты этих измерений приведены на рис. 4.4. На этих графиках каждая точка соответствует мгновенному измерению амплитуды осцилляций в двух направлениях [6]. Этот рисунок был получен при постоянном значении смещения, и отклонения от среднего значения подчинялись распределению Гаусса. График *a* показывает флуктуации когерентного лазерного пучка на плоскости, в то время как на рис. *б* изображены флуктуации неклассического многомодового пучка. Очевидно, что флуктуации последнего уменьшены в обоих направлениях, и можно сказать, что неклассический пучок света распространяется «по более прямой линии», чем когерентный пучок. Такое уменьшение пространственного шума позволяет повысить чувствительность устройства. В эксперименте, результаты которого

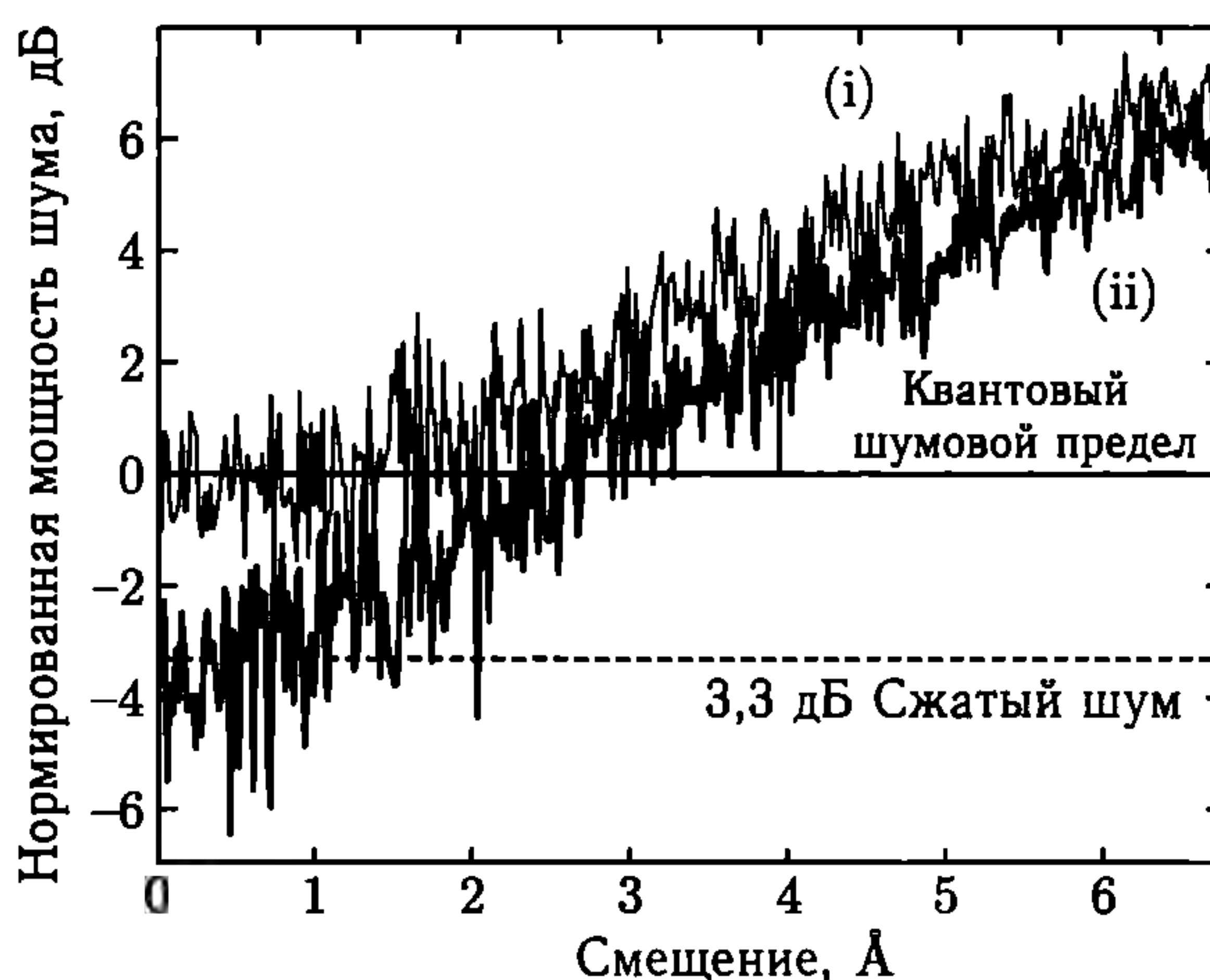


Рис. 4.5. Чувствительность к измерению малых смещений повышается при пространственном сжатии света. Верхняя кривая — сигнал, полученный при использовании когерентного света. Нижняя кривая — сигнал, полученный при использовании пространственно сжатого света

показаны на рис. 4.5, мы ввели модуляцию смещения, увеличивая амплитуду колебаний от 0 до нескольких ангстрем. Сигнал, измеренный квадрантным фотодетектором, построен в зависимости от амплитуды модуляции. Видно, что невозможно отличить сигнал от шума при малых амплитудах модуляции в случае когерентного лазерного пучка. При больших колебаниях сигнал и шум различимы. При использовании сжатого света сигнал становится отличим от шума при меньших значениях смещения, что демонстрирует улучшение чувствительности измерений.

4.5. Оптическое считывание данных

Второй пример, который мы рассмотрим как иллюстрацию теории модового синтеза квантовых изображений — это оптическая система считывания данных. Этот чисто теоретический раздел имеет своей целью продемонстрировать, что, используя модовый синтез, возможно увеличить плотность информации, которая может быть считана лазерным пучком. Рассмотрим в качестве модельной систему считывания информации реализуемую на компакт-дисках. В этих устройствах информация кодируется на диск путем изменения его поверхности, что вызывает сдвиг фазы на π в отраженном свете. Отраженное поле поэтому похоже на перевернутую моду, введенную в предыдущем разделе. Так как эта мода содержит пространственные частотные компоненты высокого порядка, она диффрагирует сильнее, чем мода TE_{M00} . Однопиксельный детектор, помещенный в дальней зоне относительно поверхности диска, будет измерять только центральную часть изображения. Тогда запись разности интенсивностей света отраженного от плоской поверхности и от деформированной поверхности может быть использована для кодирования «0» и «1». Таким образом только один бит информации может быть закодирован в фокальной области лазерного пучка. Плотность информации при этом ограничена длиной волны падающего света. Именно поэтому производители CD-дисков стремятся создать устройства, оперирующие все с более и более короткими длинами волн (400 нм для следующего поколения CD). Однако генерация столь коротковолнового света в ультрафиолетовом диапазоне становится все более и более трудной проблемой. Поэтому серьезные исследования должны быть направлены на разработку альтернативного способа, состоящего в хранении более чем одного бита информации в фокальной области.

Имея ввиду эту цель, мы предлагаем усовершенствовать технику сверхразрешения [7, 8]. Вместо измерения отраженного света однопиксельным детектором, можно использовать массив детекторов (матричный детектор). В методе сверхразрешения наличие большого числа пикселей принципиально важно для достоверного восстановления профиля поля. Однако, в данном случае, мы заранее знаем, что существует только 2^n возможных профилей отраженного света, если мы поместили n бит информации внутри фокального размера. Эта особенность также присутствует и в схеме модового синтеза, где также доступна известная априори информация. Следовательно, достаточно использовать конечное число пикселей, для того чтобы записать рассматриваемое поле так, чтобы имелась возможность различить все возможные профи-

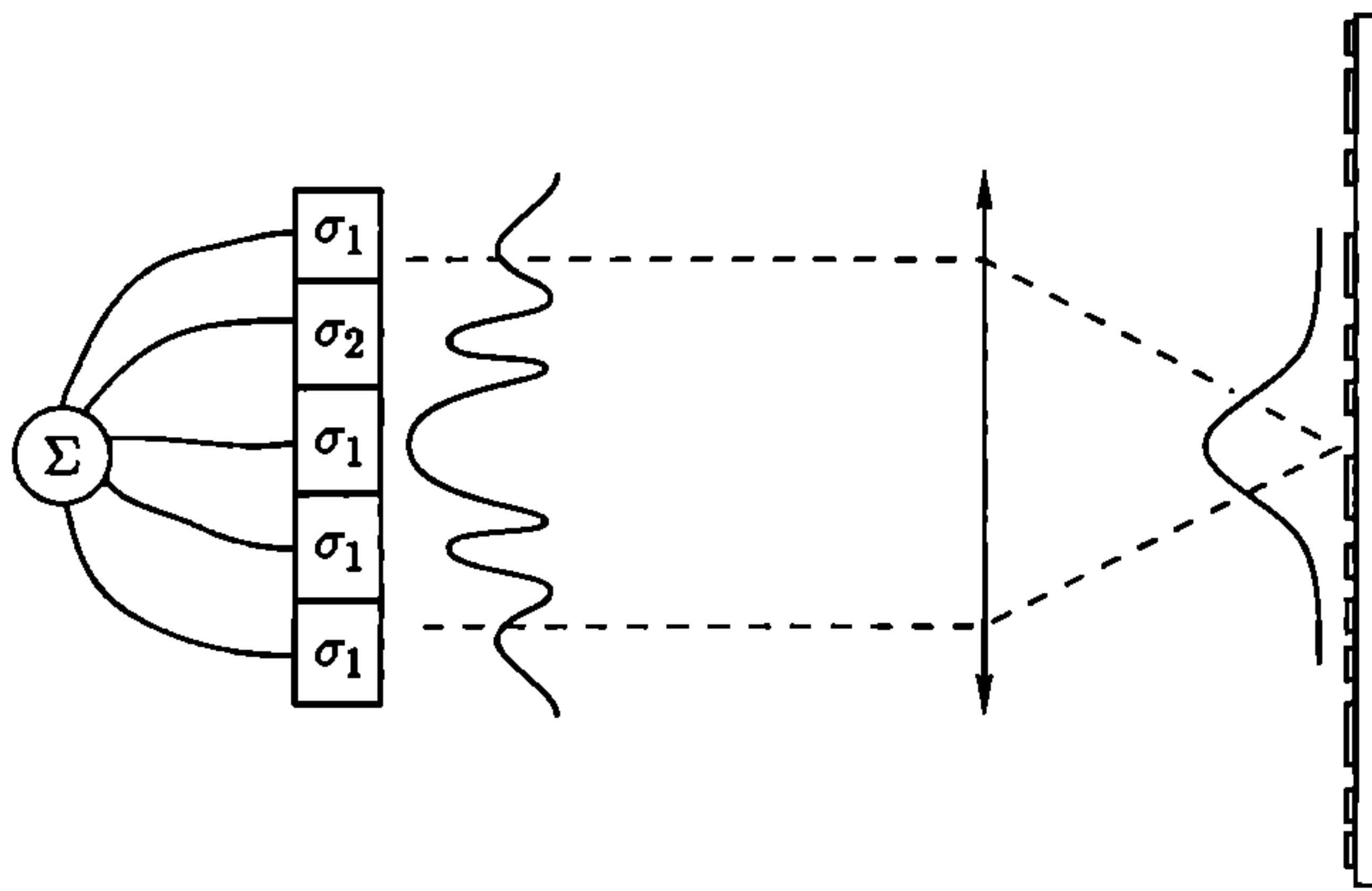


Рис. 4.6. Считывание матричным детектором гауссовского пучка после его взаимодействия с поверхностью CD-диска и прохождения через апертуру

ли. Предлагаемая схема приведена на рис. 4.6 в общих чертах. Мы рассматриваем стандартную систему считывания информации с оптического диска, в которой входной пучок света строго сфокусирован на диске с большой числовой апертурой. На диске в пределах фокальной области записано несколько бит информации. Следовательно, когда пучок света отразится от диска, на нем «отпечатается» сложная фазовая картина. Затем свет распространяется до поверхности детектора. Благодаря большой числовой апертуре и наличию малых деталей, для анализа профиля поля попадающего на детектор после распространения не достаточно проводить вычисления в параксиальном приближении, но следует использовать более сложные интегральные методы [9]. Действительно, продолжая обсуждение на примере, когда в фокальной точке содержатся 3 бита информации, существует только 8 возможных профилей поля, падающего на детектор. Тогда необходимо создать такой матричный детектор, который бы позволил, используя подходящий набор коэффициентов усиления для различных пикселей, эффективно различать каждый из этих 8 профилей. На рис. 4.6 изображен детектор с пятью пикселями только в качестве примера.

Каждый раз, когда выполняется измерение, необходимо проверять параллельно 8 возможных наборов коэффициентов усиления, которые соответствуют каждой из возможных последовательностей бит. Тот набор, который даст результат, наиболее близкий к нулю отвечает предпочтительной последовательности. Однако, этот метод восстановления информации очень чувствителен к шуму в полосе пространственных частот оптических приборов. Эта практическая ситуация находится в рамках представленной выше теории. Для каждого возможного измерения имеется соответствующая мода детектирования, связанная с шумом. Эта мода хорошо определена, поскольку известны и профиль среднего поля и коэффициенты усиления детектора. Таким образом возможно повысить отношение сигнал/шум в процессе измерения, инжектируя сжатый вакуумный свет с соответствующим профилем. Такая система могла бы быть полезна для увеличения плотности информации, закодированной на оптическом диске. Заметим, что этот подход может

потенциально улучшить любую технологию хранения информации, поскольку он не зависит от технических параметров, таких как длина волны, числовая апертура и других.

4.6. Оптимальный способ измерения сигнала

В этом последнем разделе мы бы хотели дополнить анализ оптического считывания определением оптимальной системы детектирования для данного измерения. До сих пор мы ограничивались рассмотрением матричных детекторов, которые измеряют только локальные интенсивности оптического изображения. В некоторых случаях, возможно, это не оптимальная стратегия детектирования. Тогда нам следует определить откуда берется информация и соответствующим образом оптимизировать систему детектирования. Рассмотрим снова задачу о малом смещении. Предположим, что пучок света с гауссовым поперечным профилем $E(\mathbf{r}) = \alpha u_0(\mathbf{r})$ смещен на расстояние d вдоль оси Ox . Тогда, в первом порядке разложения по малому смещению d , профиль смещенного пучка может быть записан как:

$$E_d(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) + d \frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial x} = \alpha \left(u_0(\mathbf{r}) + \frac{d}{w_0} u_1(\mathbf{r}) \right), \quad (4.7)$$

где u_1 — это мода TEM_{01} . Второе равенство справедливо, поскольку мода TEM_{01} пропорциональна первой производной от моды TEM_{00} . В результате видно, что в гауссовом пучке смещение характеризуется величиной моды TEM_{01} смещенного изображения¹⁾. Для того чтобы оптимально измерить смещение, необходимо, следовательно, измерить проекцию изображения на эту моду. Применяя гомодинное детектирование с излучением гомодина в виде моды TEM_{01} , мы измеряем флуктуации моды TEM_{01} сигнального пучка. Можно показать, что эта система имеет 100% эффективность для измерения смещения, в то время как схема с квадрантным детектором эффективна только на 80% [10]. На рис. 4.7 представлены результаты такого эксперимента. Как и в предыдущем эксперименте, гауссов пучок света смешивается (с пренебрежимыми потерями) с измеряемой модой TEM_{01} , заполненной сжатым вакуумом, посредством модифицированного интерферометра Маха–Цендера. Пучок модулируется с помощью зеркала, помещенного на пьезоэлектрический привод. Затем свет детектируется в схеме пространственного гомодинного приема, описанной выше. Плоские кривые на рис. 4.7, записанные при фиксированном значении фазы гомодина, позволяют получить сигнал, пропорциональный смещению. Верхняя плоская кривая получена при использовании модулированного когерентного пучка. Ее уровень совпадает с уровнем дробового шума, так что сигнал, соответствующий смещению, в данных условиях не наблюдаем. Нижняя плоская кривая получена с помощью сжатого, но не модулированного света. Видно, что уровень шума снижен. Средняя плоская кривая получена при использовании модулированного сжатого света и пока-

¹⁾ Подпороговые моды TEM_{01} и TEM_{10} при генерации лазера на основной моде TEM_{00} приводят к флуктуациям центра лазерного пучка [12, 13].

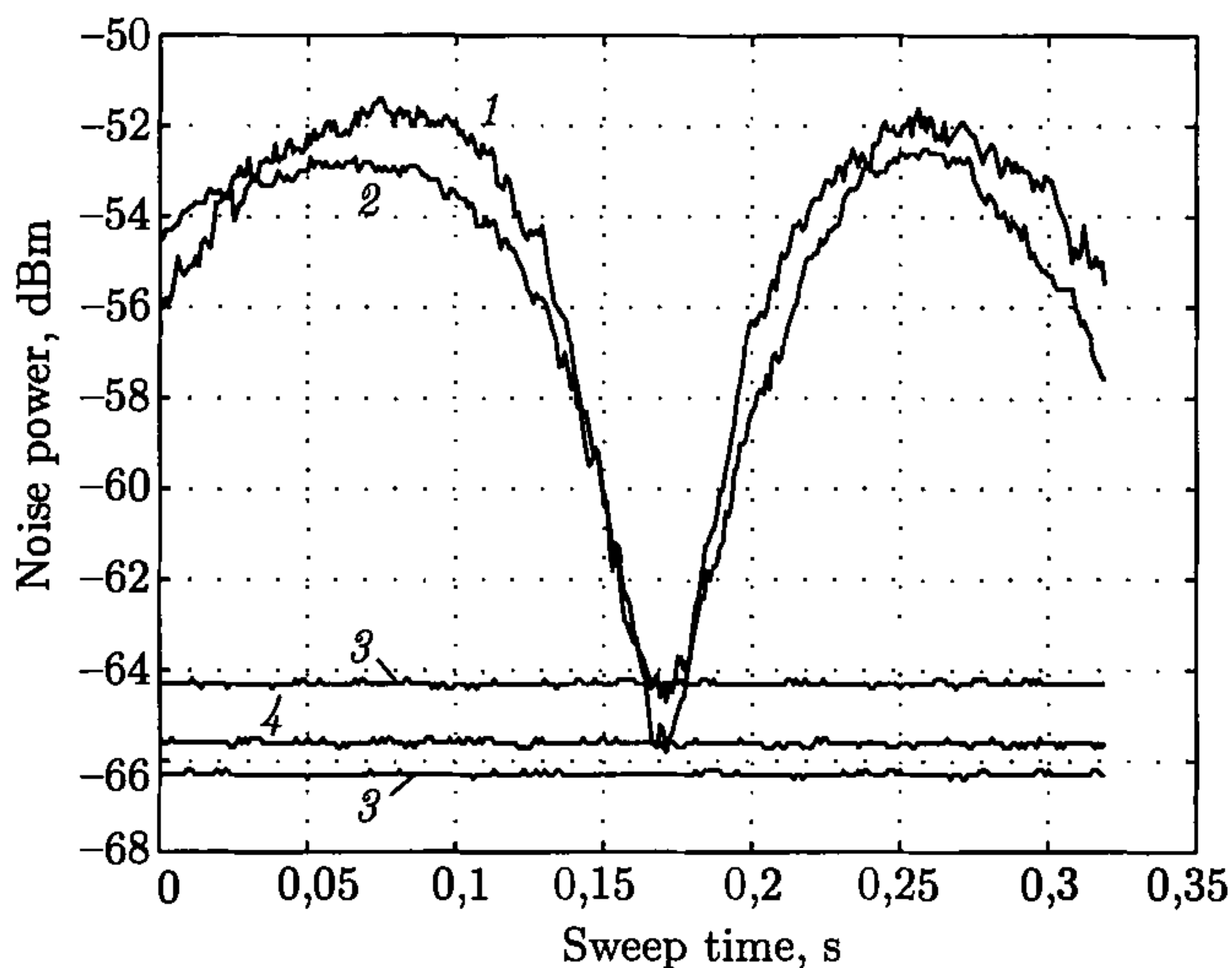


Рис. 4.7. Пространственное гомодинирование при измерении малых смещений с использованием сжатого в режиме TEM_{01} света. Плоские кривые — сигналы, измеряемые при гомодинном приеме с фиксированным значением фазы гомодина, позволяющие определить смещение. Осциллирующие кривые — сигналы, измеряемые при гомодинном приеме в случае, когда фаза гомодина является функцией времени, что дает возможность определять смещение (по провалу кривых) и наклон пучка (по верхним частям кривых)

зывает, что на фоне сниженного шума проявляется сигнал. Две осциллирующие кривые на рис. 4.7 записаны соответственно с когерентным (2) и сжатым (1) светом, когда фаза гомодина изменяется пропорционально времени. Из них видно, что сжатие уменьшает квантовый шум при измерении смещения (провалы кривых), но увеличивает его при измерении наклона пучков [11] (верхние части кривых). Данное поведение согласуется с тем фактом, что наклон и смещение — пара взаимно сопряженных переменных.

4.7. Заключение

В этой главе мы показали, что многомодовый квантовый свет может быть получен путем синтеза многих одномодовых неклассических пучков. Модовый синтез изображений может быть применен для решения задач, когда доступна значительная априорная информация, позволяющая достичь чувствительности измерения выше предела квантовых шумов.

Мы показали, что методы квантовых изображений могут быть применены для улучшения оптического считывания, используя либо матричные детекторы, либо схемы детектирования, такие как гомодинный прием, но с выбором подходящих параметров измерения. Применяя последний из упомянутых методов, мы можем также выделить сопряженные переменные измеряемых параметров, что ведет к возможности пространственного перепутывания.

Наконец, мы хотели бы отметить, что эта работа, выполненная в рамках формализма квантовых изображений, может также быть с успехом применена ко многим другим системам. Какие бы моды не имелись в виду — пространственные, частотные, временные, поляризационные и т.п. — к ним

может быть применен метод квантового модового синтеза. Следовательно, для любого многомодового измерения, ограниченного квантовыми шумами, возможно улучшить чувствительность, используя метод, описанный в этой главе.

Список литературы

1. Kolobov M. I. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539.
2. Lugiato L. A., Grangier P. // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. P. 225.
3. Martinelli M., Treps N., Ducci S., Maître A., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2003. V. 67. P. 023808.
4. Treps N., Delaubert V., Maître A., Courty J.-M., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 013820.
5. Treps N., Grosse N., Bowen W., Fabre C., Bachor H. A., Lam P. K. // Science. 2003. V. 301. P. 940.
6. Treps N., Grosse N., Bowen W. P., Hsu M. T. L., Maître A., Fabre C., Bachor H. A., Lam P. K. // J. Opt. B. 2004. V. 6. P. 664.
7. Kolobov M. I., Fabre C. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3789.
8. Bertero M., Pike E. R. // Opt. Acta. 1982. V. 29. P. 727.
9. Richards B., Wolf E. // Proc. Roy. Soc. A. 1959. V. 253. P. 359.
10. Hsu M. T. L., Delaubert V., Lam P. K., Bowen W. P. // J. Opt. B: Q. Semiclass. Opt. 2004. V. 6. P. 495.
11. Hsu M. T. L., Bowen W. P., Treps N., Lam P. K. quant-physics/0501144. 2005.

Литература, добавленная при переводе

12. Levenson M. D., Richardson W. H., Perlmutter S. H. Stochastic noise in TEM₀₀ beam position // Opt. Lett. 1989. V. 14. P. 779.
13. Ахманов С. А., Белинский А. В., Чиркин А. С. Пространственные флуктуации одномодовых лазерных пучков: предельная пространственная когерентность, случайное блуждание и естественная угловая расходимость // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1990. Т. 54. Р. 2383.

ФАНТОМНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

*Алессандра Гатти, Энрико Брамбилла, Мортен Баке,
Луиджи А. Луджиато*

5.1. Введение

Проблема *фантомных изображений* (ФИ) привлекает заслуженное внимание на протяжении последних лет [1–26]. Предложенный Д. Н. Клышко много лет назад [1] и основанный на идее использования квантового перепутывания фотонных пар, генерируемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) (или, иначе, спонтанного параметрического преобразования частоты вниз), этот метод также назывался до недавнего времени методом *перепутанных (бифотонных) изображений* [1–11]. На сегодняшний день ясно, что подходящие классически скоррелированные пучки также могут быть использованы для реализации данного метода [12–25]; интересные вопросы соотношения между этими двумя подходами будут рассмотрены в двух последних разделах данной главы.

В стандартной схеме наблюдения изображения имеется источник света, облучающий объект, набор оптических элементов изображающей системы и система регистрации. В отличие от этого, при детектировании фантомного изображения для извлечения информации о неизвестном объекте используется корреляция между двумя пучками. Рассмотрим эту методику в случае использования перепутанных пар фотонов, как она изначально была предложена Д. Н. Клышко [1], а затем систематизирована в работах [5–7]. Фотоны из пары, находящейся в перепутанном состоянии, пространственно разделяются, и каждый из них распространяется по своему оптическому пути — «зондирующему» и «воспроизводящему» (см. рис. 5.1, *а*). Прямое детектирование фотона 1 в зондирующем плече не несет информации о пространственной структуре объекта, потому что, например, детектор D_1 — точечный и фиксирован в определенном положении (т. е. не сканируется в поперечной плоскости), либо наоборот, настолько большой, что измеряется только полная интенсивность пучка 1, что не позволяет восстановить информацию о поперечной координате фотона 1 (мы будем называть такой большой детектор собирающим). Вместо этого информация об объекте восстанавливается из измерения совпадений фотоотсчетов пар сигнальных и холостых фотонов как функция поперечной координаты положения второго фотона, поскольку детектор 2 — точечный и сканируется в поперечной плоскости. Само название «фантомное изображение» является отражением того факта, что результат

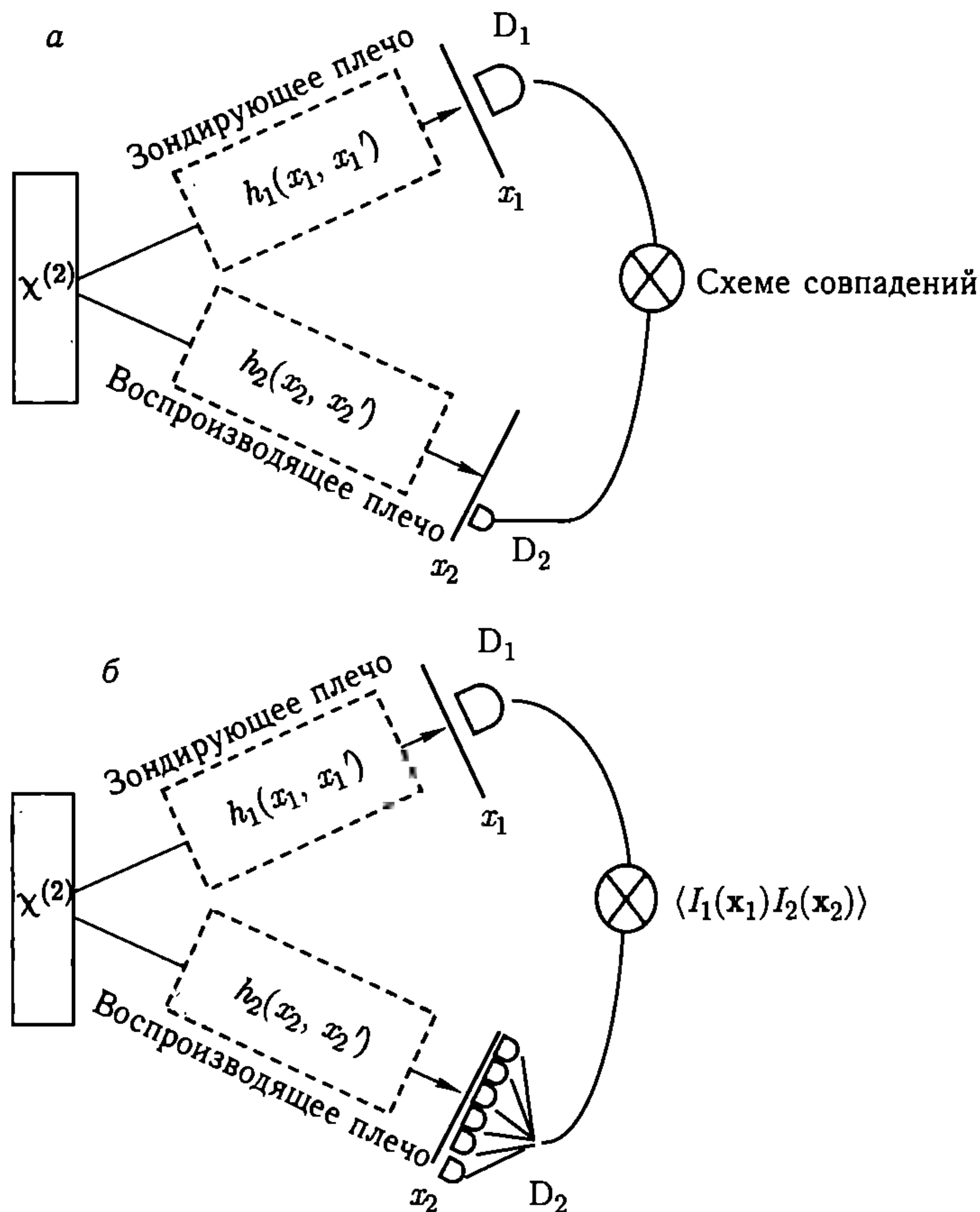


Рис. 5.1. Схема фантомного изображения с парами перепутанных фотонов. Объект, информацию о котором хотят восстановить, находится в зондирующем плече 1. h_1 и h_2 — функции импульсного отклика, описывающие распространение света, с учетом его взаимодействия с оптическими элементами (например, линзами, апертурами и др.) и объектом. а) Режим предельно низкого параметрического усиления, при котором измеряются совпадения сигнального и холостого фотонов. Информация собирается при сканировании поперечной плоскости x_2 воспроизводящего плеча точечным детектором D_2 , в то время как положение детектора D_1 фиксировано. б) Режим большого параметрического усиления. Информация извлекается из корреляционной функции интенсивностей $\langle \hat{I}_1(x_1) \hat{I}_2(x_2) \rangle$ в зависимости от координаты x_2 , сохраняя положение детектора D_1 фиксированным и используя массив точечных детекторов в воспроизводящем плече

измерений получают из сканирования положения фотона, который никогда не проходит сквозь объект.

Варьирование оптических элементов в обоих плечах схемы позволяет получать различную информацию об объекте, такую как, например, распределение интенсивности объекта (фантомное изображение) или же пространственный спектр излучения (фантомная дифракционная картина).

Методика фантомного изображения может найти применение в тех случаях, когда затруднительно непосредственное оперирование в зондирующем плече или же размещение в этом плече массива точечных детекторов (на-

пример, если мы хотим скрыть детектирование), а значит, когда мы хотим максимально упростить конфигурацию оптических элементов и детектирующей системы в зондирующем плече и фиксировать их положение, и в то же время легко можем оперировать в воспроизводящем плече (т.е. сканировать положение детектора D_2 , или же, что эквивалентно, разместить массив точечных детекторов в плече 2, или же, наконец, меняя положение элементов во втором плече переходить от измерения фантомного изображения к измерению дифракционной картины фантома).

Использование двухфотонной схемы детектирования изображения открывает более широкие возможности в сравнении со стандартной измерительной процедурой. Например, объект можно освещать в зондирующем плече светом одной частоты, а измерения в воспроизводящем плече производить на другой частоте; или же производить обработку информации об объекте оперируя только в воспроизводящем плече [11]. Кроме того, использование схемы ФИ открывает возможность когерентного детектирования изображения применяя свет, в известном смысле, пространственно некогерентный, так как каждый из двух пучков, возникающих при спонтанном параметрическом рассеянии, в отдельности можно рассматривать как имеющий статистику, подобную квазитепловому излучению, и только состояние двухлучевой системы является чистым (см. подразд. 2.2.2).

Методика ФИ может быть обобщена на случай большого числа фотонных пар, возникающих в режиме большого параметрического усиления, который уже был рассмотрен в лаве 2. При этом измеряемой величиной является корреляционная функция флуктуаций интенсивности сигнального и холостого пучков [8, 9, 16, 17] в зависимости от положения x_2 в воспроизводящем плече (см. рис. 5.1, б). Общая теория, охватывающая диапазон от предельно низкого усиления, при котором детектируются совпадения, до режима значительного усиления, будет рассмотрена в разд. 5.2. В других разделах мы обсудим схему фантомного изображения на основе перепутанных пучков: в разд. 5.3 рассмотрен корпускулярно-волновой аспект схемы ФИ; разд. 5.4 посвящен технике пространственного усреднения, которая повышает скорость обработки и увеличивает пространственную спектральную полосу системы в фантомной дифракционной картине; наконец, в разд. 5.5 рассмотрена схема ФИ, в которой вместо прямого детектирования интенсивности используется гомодинный прием.

«Квантовая» и «классическая» части этой главы отделены разделом 5.6, содержащим дискуссию по вопросу необходимо ли квантовое перепутывание для реализации ФИ. В последних двух разделах мы обсуждаем схему ФИ, использующую квазитепловые пучки с гауссовой статистикой, расщепленные светоделителем. Мы описываем эту систему сначала теоретически (разд. 5.7), а затем представляем экспериментальные данные (разд. 5.8).

Использование квазитепловых пучков в схемах ФИ побудило нас к обсуждению проблемы, представляющей определенный интерес и известной как «квантовая литография с классическими пучками» или «суб-длинноволновая интерференция с классическими пучками». Квантовое рассмотрение этого вопроса началось с работы Бото с соавторами [27], где утверждается, что

N -фотонное перепутанное состояние может быть использовано для улучшения разрешения в литографии в N раз. Эксперимент, принципиально доказывающий это утверждение, был осуществлен [28] с $N = 2$ при использовании СПР; авторы наблюдали уменьшение вдвое периода интерференционных полос в фантомной дифракционной картине. Однако в работе [8] мы показали, что такой же результат может быть получен при использовании квазитепловых пучков, и что, как в случае перепутанного света, так и в случае тепловых пучков суб-длинноволновая интерференция является лишь геометрическим артефактом. Это, разумеется, дает нам основание сомневаться в том, что эксперимент [28] может служить доказательством утверждения [27], касающегося схемы с перепутанными пучками света. Позднее суб-длинноволновая интерференция с использованием тепловых пучков обсуждалась теоретически в работе [29] и была продемонстрирована экспериментально в [30, 31].

5.2. Общая теория ФИ с использованием перепутанных пучков света

Для упрощения рассуждений и формул мы рассмотрим в этом разделе только зависимости от пространственных переменных, опустив временные аргументы, что соответствует, например, экспериментальной ситуации с использованием узкого спектрального фильтра. Теория, включающая переменные времени и частоты, изложена в [9]. Кроме того, мы предполагаем трансляционную инвариантность в поперечной плоскости, которая соответствует требованию, что поперечное сечение источника света много больше размеров объекта и всех других оптических элементов системы.

В «перепутанном» случае сигнальное и холостое поля генерируются в параметрическом процессе II-типа в кристалле с квадратичной нелинейностью. Мы начнем наше рассмотрение, определив связь между полями на входе и на выходе кристалла (соотношение вход-выход), полагая, что накачкой служит плоская монохроматическая волна (см. [8, 9] и ссылки, цитируемые там):

$$\hat{a}_{i,\text{out}}(\mathbf{q}) = U_i(\mathbf{q}) \hat{a}_{i,\text{in}}(\mathbf{q}) + V_i(\mathbf{q}) \hat{a}_{j,\text{in}}^\dagger(-\mathbf{q}), \quad i \neq j = 1, 2. \quad (5.1)$$

Это выражение соответствует формуле (2.13) главы 2 при $\Omega = 0$: $U_i(\mathbf{q}) = U_i(\mathbf{q}, \Omega = 0)$, $V_i(\mathbf{q}) = V_i(\mathbf{q}, \Omega = 0)$, где $U_i(\mathbf{q})$ и $V_i(\mathbf{q})$, определяются уравнениями (2.14)–(2.17). Сигнальное поле $\hat{a}_1$ и холостое поле $\hat{a}_2$ различаются, как обычно, при взаимодействии II-типа своими взаимно-ортогональными поляризациями.

Каждый из двух выходных пучков проходит по своему оптическому пути, описываемому соответственно функциями импульсного отклика $h_1(x_1, x'_1)$ и $h_2(x_2, x'_2)$ (см. рис. 5.1). Поля в плоскости детектирования записываются в виде:

$$\hat{c}_i(\mathbf{x}_i) = \int d\mathbf{x}'_i h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i) \hat{a}_{i,\text{out}}(\mathbf{x}'_i) + \hat{L}_i(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \quad (5.2)$$

где $\hat{L}_1, \hat{L}_2$ отвечают за возможные потери при распространении полей и зависят от вакуумных полевых операторов некоррелированных с $\hat{a}_{i,\text{out}}$. Инфор-

мация об объекте извлекается из анализа пространственной корреляционной функции интенсивностей, измеряемых детекторами D_1 и D_2 в зависимости от положения $\mathbf{x}_2$ пиксела второго детектора:

$$\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle = \langle \hat{c}_1^\dagger(\mathbf{x}_1) \hat{c}_1(\mathbf{x}_1) \hat{c}_2^\dagger(\mathbf{x}_2) \hat{c}_2(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (5.3)$$

Полная информация об объекте содержится в корреляционной функции флуктуаций интенсивности:

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle - \langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (5.4)$$

где $\langle \hat{I}_i(\mathbf{x}_i) \rangle = \langle \hat{c}_i^\dagger(\mathbf{x}_i) \hat{c}_i(\mathbf{x}_i) \rangle$ — средняя интенсивность i -го пучка. При использовании собирающего детектора в плече 1, измеряемое им значение соответствует интегралу по $\mathbf{x}_1$ обеих частей выражения (5.4). Так как операторы $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2^\dagger$ коммутируют, все операторные произведения в (5.3) и (5.4) оказываются нормально упорядоченными, а значит операторы $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ не будут давать вклад в эти корреляционные функции и их можно не принимать во внимание. В результате получаем:

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{x}'_1 \int d\mathbf{x}''_1 \int d\mathbf{x}'_2 \int d\mathbf{x}''_2 h_1^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}''_1) h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) \times \\ \times h_2^*(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}''_2) h_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) \left[\langle \hat{a}_{1\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_1) \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_2) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle - \right. \\ \left. - \langle \hat{a}_{1\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_1) \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \rangle \langle \hat{a}_{2\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_2) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle \right]. \quad (5.5)$$

Корреляционная функция четвертого порядка в выражении (5.5) может быть факторизована (см. [1] в главе 2), и, следовательно,

$$\langle \hat{a}_{1\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_1) \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_2) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle = \\ = \langle \hat{a}_{1\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_1) \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \rangle \langle \hat{a}_{2\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_2) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle + \\ + \langle \hat{a}_{1\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_1) \hat{a}_{2\text{out}}^\dagger(\mathbf{x}''_2) \rangle \langle \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle. \quad (5.6)$$

Подставляя это в уравнение (5.5), нетрудно получить, что

$$G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left| \int d\mathbf{x}'_1 \int d\mathbf{x}'_2 h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) h_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) \langle \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle \right|^2. \quad (5.7)$$

Принимая во внимание, что поля $\hat{a}_{i,\text{in}}$ находятся в вакуумном состоянии, с учетом (5.1), получим:

$$\langle \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}(\mathbf{x}'_2) \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)} U_1(\mathbf{q}) V_2(-\mathbf{q}). \quad (5.8)$$

Радиус корреляций поля в поперечном направлении или просто поперечная длина когерентности x_{coh} определяется как обратная величина к спектральной ширине функции $U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})$ (см. выражение (1.23) в главе 1). Примечательной особенностью полученного результата является то, что взятие модуля в выражении (5.7) происходит после интегрирования, что и обеспечивает возможность когерентного детектирования изображения при корреляционном измерении.

5.2.1. Некоторые конкретные схемы фантомных изображений.

Можно представить бесконечное число различных конфигураций оптических элементов в зондирующем и воспроизводящем плечах схемы, т. е. математически — функций h_1 и h_2 .

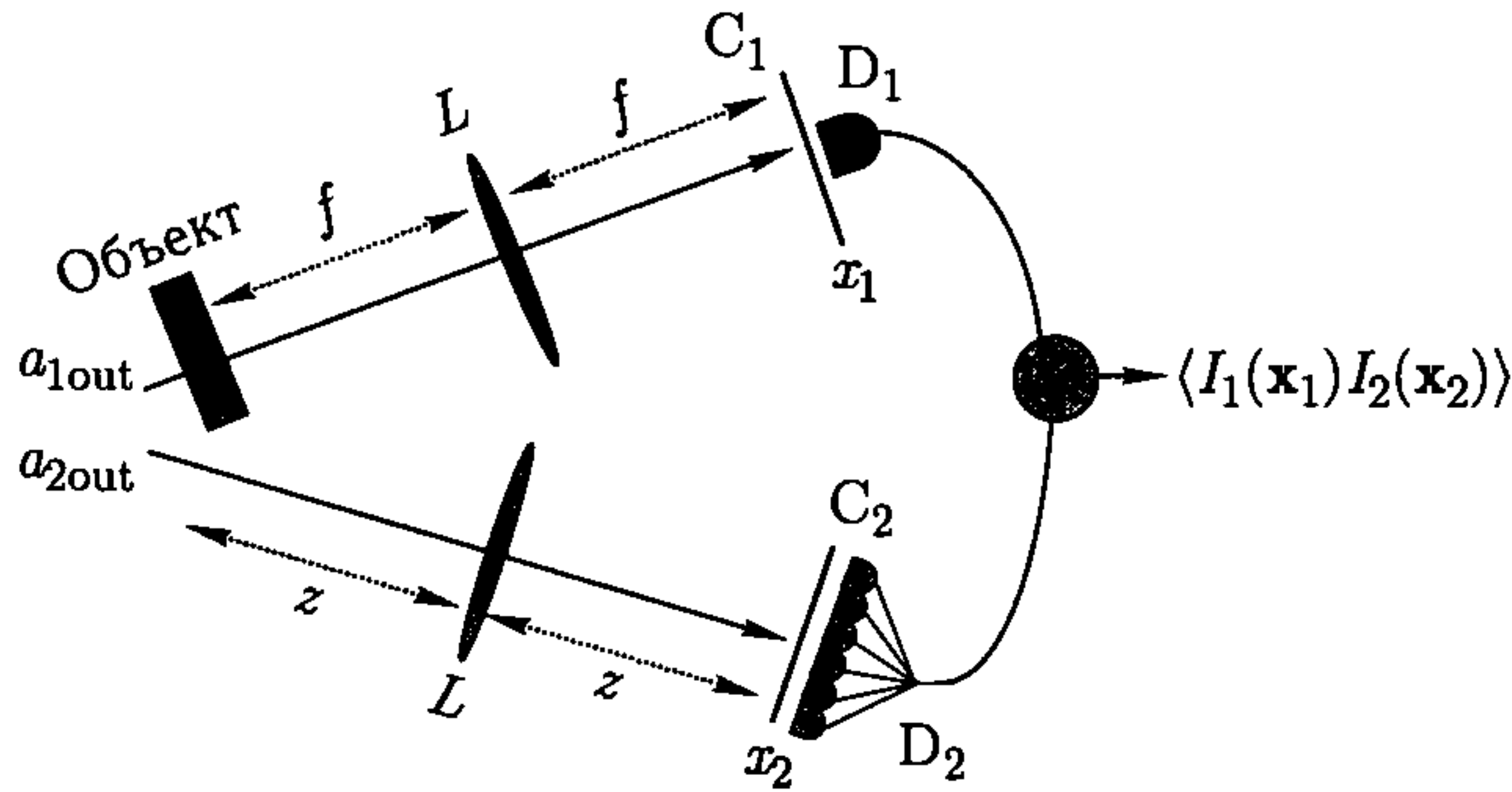


Рис. 5.2. Схема фантомного изображения: буквами L обозначены две идентичные линзы с фокусным расстоянием f ; D_1 — точечный детектор. Расстояние z может принимать значения $z = f$ или $z = 2f$

Рассмотрим два характерных примера оптических систем, схематически изображенных на рис. 5.2. В обоих случаях элементы в плече 1 фиксированы — это объект, описываемый комплексным коэффициентом пропускания $T(\mathbf{x})$, и линза, расположенная на фокусном расстоянии от объекта и от плоскости детектирования. Таким образом,

$$h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) = -\frac{i}{\lambda f} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda f} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}'_1\right) T(\mathbf{x}'_1), \quad (5.9)$$

где λ — длина волны падающего света. Плечо 2 состоит только лишь из одной линзы, расположенной на расстоянии z как от источника, так и от плоскости измерения. Для простоты полагаем, что линзы в плечах одинаковы.

Пример 1. Измерение фантомной дифракционной картины. В первом примере мы выберем $z = f$, тогда

$$h_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) = -\frac{i}{\lambda f} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda f} \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}'_2\right).$$

Подставляя эту функцию распространения в уравнение (5.7), с учетом (5.9) получим:

$$G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto \left| U_1\left(-\mathbf{x}_2 \frac{2\pi}{\lambda f}\right) V_2\left(\mathbf{x}_2 \frac{2\pi}{\lambda f}\right) \tilde{T}\left((\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1) \frac{2\pi}{\lambda f}\right) \right|^2, \quad (5.10)$$

Здесь $\tilde{T}(\mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{x}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} T(\mathbf{x})$ — амплитуда дифракционной картины объекта.

Заметим, что смещение $\mathbf{x}_1$ положения детектора D_1 приводит к соответствующему сдвигу дифракционной картины. Полный дифракционный образ

объекта может быть восстановлен при измерении корреляционной функции, если выполнены определенные условия, а именно, если измерения производятся в спектральной полосе q_0 более широкой, чем максимальное поперечное волновое число q в спектре объекта, или, что тоже самое, если $x_{\text{coh}} < l_0$, где l_0 — наименьший масштаб изменений в пространственном распределении объекта. В противоположность этому, не используя корреляционные измерения, т. е. анализируя распределение интенсивности света в плече 1 с помощью многопиксельного детектора напрямую, в случае $x_{\text{coh}} < l_0$ мы не сможем получить никакой информации об объекте. В самом деле, нетрудно получить, что

$$\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle \propto \int \frac{d\mathbf{q}}{(\lambda f)^2} \left| \tilde{T}(\mathbf{x}_1 \frac{2\pi}{\lambda f} - \mathbf{q}) \right|^2 |V_1(\mathbf{q})|^2. \quad (5.11)$$

В случае $x_{\text{coh}} < l_0$ функция $|V_1(\mathbf{q})|^2$ может быть вынесена из-под знака интеграла, а результирующее выражение перестанет зависеть от переменной $\mathbf{x}_1$.

Пример 2. Схема построения фантомного изображения. Во втором примере мы рассмотрим ситуацию, когда $z = 2f$. Тогда

$$h_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) = \delta(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}'_2) \exp\left(-i|\mathbf{x}_2|^2 \frac{\pi}{\lambda f}\right).$$

Подставив это выражение в (5.7) и учитывая (5.9), получим:

$$G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto \left| \int d\mathbf{x}'_1 \langle \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}(-\mathbf{x}_2) \rangle T^*(\mathbf{x}'_1) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}_1\right) \right|^2, \quad (5.12)$$

$$\propto \left| U_1\left(\frac{2\pi\mathbf{x}_1}{\lambda f}\right) V_2\left(-\frac{2\pi\mathbf{x}_1}{\lambda f}\right) \right|^2 |T(-\mathbf{x}_2)|^2, \quad (5.13)$$

где второе равенство записано в предположении $x_{\text{coh}} < l_0$. Так как корреляционная функция $\langle \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}(-\mathbf{x}_2) \rangle$, зависящая от разности аргументов $\mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}_2$ (см. (5.8)), не равна нулю в области радиуса x_{coh} вокруг точки $\mathbf{x}'_1 = -\mathbf{x}_2$, функция $T(\mathbf{x}'_1)$ практически постоянна в этой области и может быть вынесена из-под знака интеграла в выражении (5.12), что и позволяет записать равенство (5.13). В этом примере информация об изображении объекта содержится в корреляционной функции интенсивности. В общем случае (5.12) восстанавливаемое при помощи корреляционных измерений изображение представляет собой свертку искомого изображения объекта с коррелятором 2-го порядка (5.8); вот почему длина когерентности x_{coh} определяет пределы разрешения при анализе изображений.

Таким образом мы показали, что кросс-корреляции двух пучков позволяют нам реконструировать как изображение так и дифракционную картину объекта, и мы имеем возможность переходить от одного типа измерения к другому оперируя лишь набором элементов в воспроизводящем плече.

Что касается схемы построения фантомного изображения, если вместо точечного детектора в плече 1 использовать собирающий детектор (т. е. при-

бор измеряющий все суммарное излучение в плече 1), измеряемая величина $\int d\mathbf{x}_1 G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ в случае $x_{\text{coh}} < l_0$ будет пропорциональна

$$\int d\mathbf{x}_1 G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto |T(-\mathbf{x}_2)|^2, \quad (5.14)$$

что опять дает нам изображение объекта. Преимущество использования собирающего детектора заключается в том, что в этом случае можно вовсе избежать использования линзы в зондирующем плече, так как взаимное положение плоскости детектирования и объекта в этом плече становится несущественным (при условии, что плоскость детектирования находится за объектом). Тогда, варьируя положение объекта в зондирующем плече и положение линзы в воспроизводящем плече, можно получить изображение объекта, если соответствующие расстояния удовлетворяют формуле тонкой линзы [1, 4]:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}. \quad (5.15)$$

Здесь p_1 — расстояние между объектом и линзой, находящейся в воспроизводящем плече (рассчитанное как сумма расстояний от объекта до кристалла вдоль зондирующего пучка и от кристалла до линзы вдоль воспроизводящего пучка); p_2 — расстояние от линзы до плоскости наблюдения в воспроизводящем плече.

Наконец, анализируя общий случай, описываемый уравнением (5.12), следует отметить, что если мы проинтегрируем это выражение по переменной $\mathbf{x}_1$, то получим:

$$\int d\mathbf{x}_1 G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{x}'_1 |\langle \hat{a}_{1\text{out}}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2\text{out}}(-\mathbf{x}_2) \rangle|^2 |T(\mathbf{x}'_1)|^2, \quad (5.16)$$

что свидетельствует о некогерентности детектирования изображения собирающим детектором (процедура интегрирования следует после взятия модулей функций).

5.3. Корпускулярно-волновой аспект

В этом разделе мы обсудим некоторые фундаментальные вопросы рассматриваемой проблемы. Наряду со схемой, изображенной на рис. 5.2, мы обсудим альтернативную постановку задачи, схематически представленную на рис. 5.3, использующую в качестве объекта двойную щель. Такая задача в режиме счета совпадений рассмотрена в работе [31]. В этом случае, в отличие от предыдущего рассмотрения, излучение в зондирующем плече измеряется с помощью массива точечных детекторов, а в воспроизводящем плече располагается один точечный детектор. Информация об объекте по-прежнему содержится в корреляционной функции $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, однако в данном случае фиксированным является положение $\mathbf{x}_2$ детектора, а координата $\mathbf{x}_1$ — переменной. Сначала будем рассматривать случай соответствующий $z = f$ на рис. 5.3. Как следует из уравнения (5.11), если воспроизводящее поле I не

измеряется¹⁾, то мы не имеем возможности наблюдать интерференционные полосы при прямом детектировании в воспроизводящем плече. В работе [32]

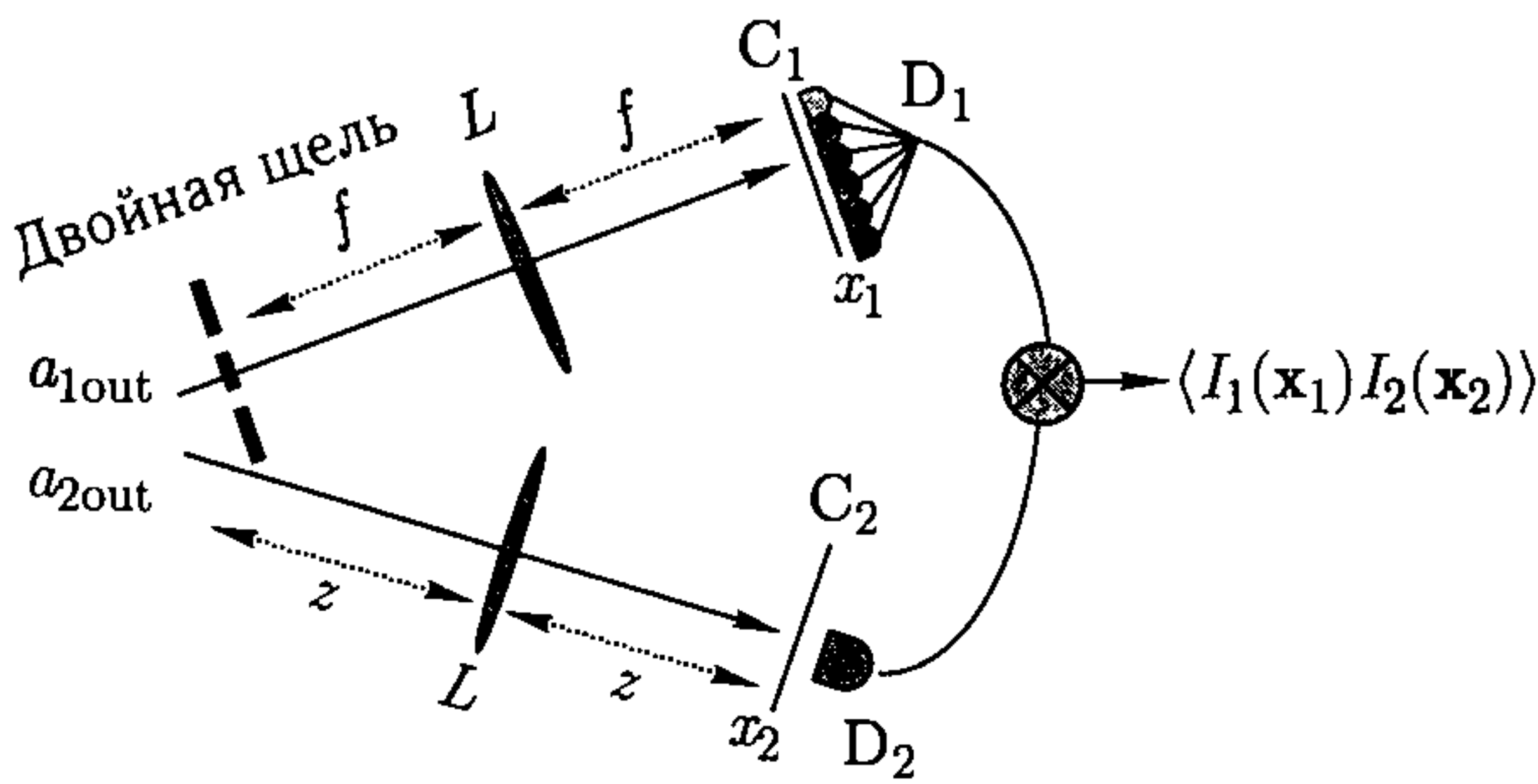


Рис. 5.3. Схема фантомного изображения: буквами L обозначены две идентичные линзы с фокусным расстоянием f ; D_1 — матрица точечных детекторов. Расстояние z может принимать значения $z = f$ или $z = 2f$

показано, что в режиме совпадений фотонов, в принципе, можно, производя измерения в воспроизводящем пучке I , получать информацию «который путь» («which-path»), т. е. сведения об пути зондирующего фотона, что оказывается достаточным, чтобы разрушить интерференционную картину. Мы сформулируем более общее утверждение, а именно: благодаря тому, что зондирующий пучок, рассматриваемый отдельно, находится в некогерентном смешанном состоянии

с тепловой статистикой (см. (2.29) в главе 2), интерференционные полосы не наблюдаемы по причине отсутствия когерентности. Однако для того чтобы обеспечить различимость полос достаточно производить измерение фотона в зондирующем пучке S , при условии детектирования в воспроизводящем плече I одиночным точечным детектором.

В самом деле, как следует из уравнения (5.10) и как было показано в подразд. 5.2.1, в схеме, изображенной на рис. 5.2, измерение всей интерференционной картины возможно при условии $x_{\text{coh}} < l_0$. В схеме, изображенной на рис. 5.3, положение детектора x_2 сохраняется неизменным, функция $\left| \tilde{T}(x_2 + x_1) \frac{2\pi}{\lambda f} \right|^2$ симметрична по отношению к переменным x_1 и x_2 , и, следовательно, интерференционная картина различима, как и в предыдущем случае (только сканируемой переменной теперь будет координата x_1 вместо x_2), даже вне зависимости от выполнения условия $x_{\text{coh}} < l_0$.

При измерении в режиме совпадения фотонов, интерференционные полосы, как объясняется в работе [1], становятся различимыми, потому что измерение фотона I в воспроизводящем плече в дальней зоне определяет импульс фотона S до прохождения им двойной щели благодаря перепутанности импульсов, обеспечивая «квантовое стирание» [33] любой информации «который путь». В макроскопическом режиме большого усиления интерференционные полосы остаются видимыми благодаря тому же механизму.

Рассмотрим теперь схему на рис. 5.3 при $z = 2f$; в этом случае, так как детектор D_2 находится в плоскости изображения объекта, измерение выявляет пространственные корреляции S/I пучков в ближней зоне. При этом в режиме совпадения фотонов интерференционные полосы не различимы, так

¹⁾ Здесь и далее через I и S без аргументов авторы обозначают холостое и сигнальное поле соответственно.

как детектирование фотона I в ближней зоне, благодаря перепутыванию по координате, обеспечивает идеальную информацию «какой путь» о фотоне S [32]. Математически этот результат описывается выражением (5.13). Если мы сохраняем координату x_2 фиксированной и варьируем переменную x_1 , как в эксперименте, схематически изображенном на рис. 5.3, то мы не получаем никакой информации об объекте.

В качестве общего заключения к подразд. 5.2.1 и разд. 5.3, следует отметить, что результаты по построению изображения и особенностям корпускулярно-волнового дуализма, продемонстрированные в «микроскопическом» случае (при измерении в схеме совпадений фотонов), сохраняются и при «макроскопическом» рассмотрении (в режиме большого параметрического усиления). Более полное обсуждение данного вопроса можно найти в работе [8].

5.4. Пространственное усреднение при измерении фантомной дифракционной картины: увеличение пространственной полосы спектра и скорости восстановления

Этот раздел основывается на результатах статьи [11]. Из анализа выражения (5.10) видно, что корреляционные измерения содержат информацию о дифракционной картине объекта, если фиксируется переменная x_1 и сканируется x_2 . Однако, поскольку усиление также зависит от x_2 , информация, которую можно извлечь, ограничена. Говоря точнее, коэффициент усиления

$$\gamma(x_2) = U_1\left(-x_2 \frac{2\pi}{\lambda f}\right) V_2\left(x_2 \frac{2\pi}{\lambda f}\right), \quad (5.17)$$

вводит отсечку пространственных частот фурье-спектра полосой пропускания q_0 параметрического источника при обработке изображения.

В работе [11] мы показали, как обойти это ограничение полосы пропускания изображения, связанное с источником. Для этого мы можем соответствующим образом провести усреднение измерений по положению x_1 детектора в зондирующей пучке: сначала следует сделать в (5.10) замену переменных, введя $x \equiv x_1 + x_2$, а затем усреднить результат по x_1 . Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} G_{\text{PDC}}^{\text{SA}}(x) &\equiv \int dx_1 G_{\text{PDC}}(x_1, x - x_1) \propto \int dx_1 \left| \gamma(x_1 - x) T_{\text{obj}}\left(x \frac{2\pi}{\lambda f}\right) \right|^2 = \\ &= \left| \tilde{T}_{\text{obj}}\left(x \frac{2\pi}{\lambda f}\right) \right|^2 \int dx_1 |\gamma(x_1 - x)|^2 \simeq \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\simeq \text{const} \left| \tilde{T}_{\text{obj}}\left(x \left(\frac{2\pi}{\lambda f}\right)\right) \right|^2, \quad (5.19)$$

где верхний индекс «SA» указывает что было выполнено пространственное усреднение. Последнее равенство (5.19) можно записать благодаря тому, что $|\gamma(x)|^2$ — ограниченная функция внутри измеряемой области x_1 , что позволяет заменить интеграл константой. Таким образом теперь не возникает отсечки

полосы изображения за счет усиления, и, значит, эта полоса значительно расширяется. Заметим, что усреднение по x_1 не означает, что D_1 — собирающий детектор. Напротив, замена переменных $x \equiv x_1 + x_2$ предполагает, что результирующая корреляционная функция $G_{PDC}^{SA}(x)$ представляет собой свертку флуктуаций интенсивности сигнальной и холостой волн, которая легко может быть рассчитана численно с использованием метода быстрого фурье-преобразования.

В работе [11] можно найти интерпретацию рассмотренного усреднения в терминах обращенной по времени картины (Клышко [1]), а также несколько примеров, демонстрирующих преимущества увеличения полосы пропускания.

На практике техника пространственного усреднения работает хорошо в режиме большого усиления, когда в каждом импульсе накачки генерируется много фотонных пар. Таким образом, зондирующее плечо содержит много фотонных пар в каждом импульсе, прошедшем через объект (в отличие от режима низкого параметрического усиления при использовании схемы совпадений, когда одновременно только один фотон падает на объект и либо проходит через него либо нет), и поэтому в плоскости измерения они рассеиваются по всей поперечной плоскости. Поскольку техника пространственного усреднения реализует усреднение по положению детектора в зондирующем плече, за один проход импульса мы получаем информацию об изображении от всех возможных положений детектора в поперечной плоскости, где есть фотоны. Это обеспечивает гораздо большую скорость сходимости при использовании метода пространственного усреднения в режиме большого параметрического усиления, что является еще одним преимуществом наряду с огромным увеличением полосы пропускания.

Если бы можно было применить метод, аналогичный технике пространственного усреднения, разработанной для восстановления дифракционной картины изображения, к восстановлению объекта, то можно было бы получить значительное увеличение разрешения изображения. К сожалению, выполнить такое пространственное усреднение невозможно.

В [11] показано, что используя вместо точечного собирающий детектор в зондирующем плече можно увеличить скорость восстановления изображения, но невозможно достичь лучшего разрешения изображения. Кроме того, при таком детектировании необходимо использовать узкополосный интерференционный фильтр, так как в противном случае наблюдается существенное ухудшение разрешения.

Техника пространственного усреднения в основном работает таким же образом и при детектировании фантомных изображений в пучках с тепловой статистикой, обсуждаемых ниже в этой главе.

5.5. Фантомные изображения при гомодинном детектировании

В [10] проанализирована схема, изображенная на рис. 5.2 с тем важным отличием, что как в зондирующем, так и в воспроизводящем плечах вместо прямого измерения интенсивности выполняется гомодинный прием; пучки смешиваются на 50/50 светоделительной пластины с излучением го-

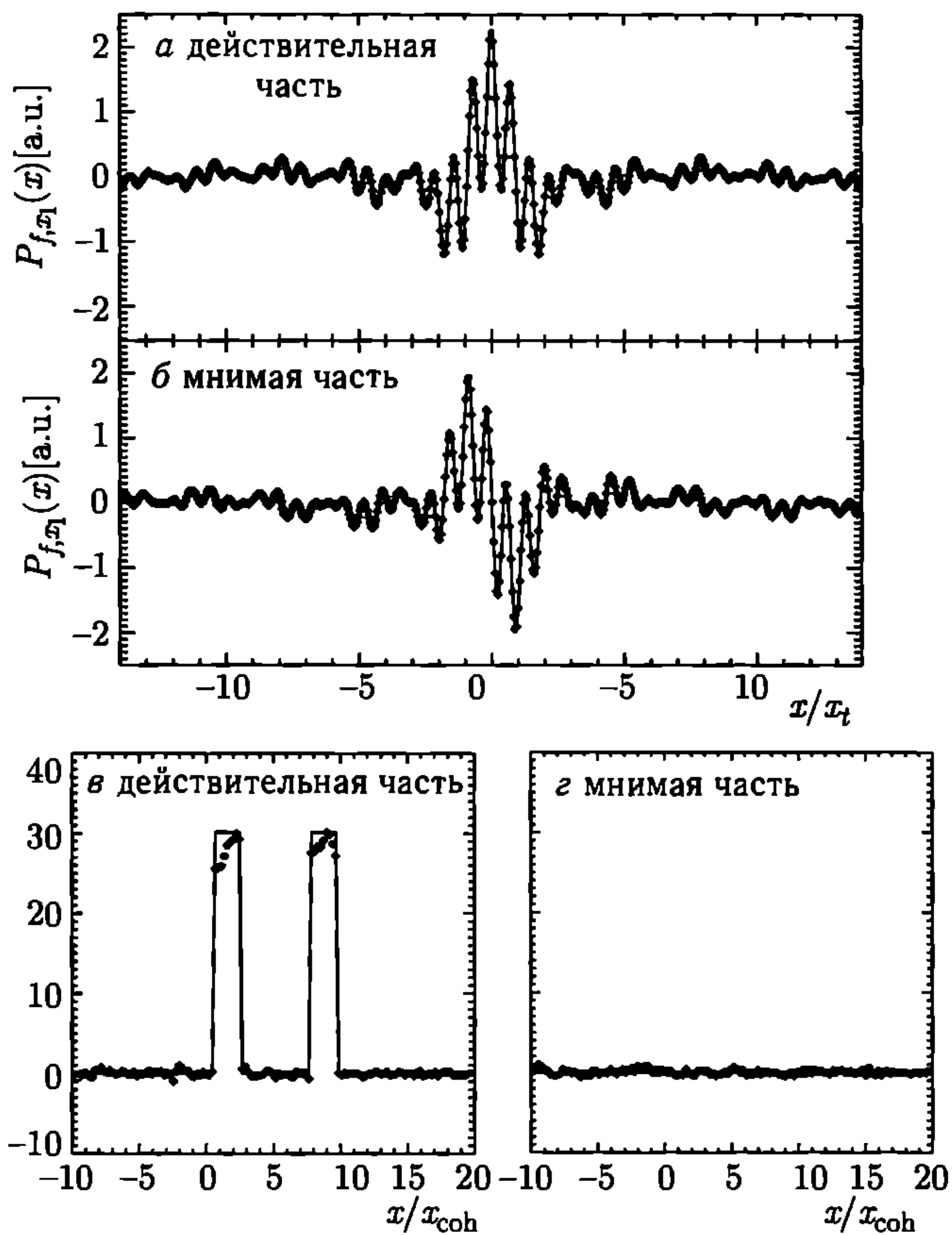


Рис. 5.4. Графики *a* и *б* иллюстрируют вещественную и мнимую части преобразования Фурье для излучения объекта (двойной щели), полученного при использовании гомодинного детектирования, пространственного усреднения и усреднения по 200 импульсам накачки. Тонкие линии соответствуют аналитическим кривым. Графики *в* и *г* получены из *a* и *б* путем обратного преобразования Фурье

модина, выделяющим ту или иную квадратурную компоненту с помощью подбора фазы ¹⁾. При детектировании фантомного изображения в воспроизводящем плече необходимо вместо конфигурации с одной линзой на расстоянии $z = 2f$, изображенной на рис. 5.2, использовать телескопическую конфигурацию с двумя линзами. В случае измерения фантомной дифракционной картины конфигурация схемы остается той же, что и на рис. 5.2 с $z = f$. Исходной мотивацией для использования схемы гомодинного приема фантомных изображений было желание обойти проблему информационной видности в макроскопическом режиме. А именно, при детектировании интенсивности измеряемая величина $\langle \hat{I}_1(x_1) \hat{I}_2(x_2) \rangle$ включает в себя однородную «подставку» $\langle \hat{I}_1(x_1) \rangle \langle \hat{I}_2(x_2) \rangle$, которая не содержит никакой информации об объекте, но, будучи достаточно большой, понижает видность изображения. При использовании гомодинного приема корреляционная функция сигнальной

¹⁾ Здесь авторы имеют ввиду балансное гомодинирование.

и холостой волн оказывается второго порядка по полю вместо четвертого, и, следовательно, «подставка» отсутствует. Другим преимуществом гомодинного приема является возможность измерения любых квадратурных компонент зондирующего и воспроизводящего полей, т. е. гомодинное детектирование позволяет наблюдать как амплитуду, так и фазу объекта. На рис. 5.4 представлены результаты для случая, когда объект — это двойная щель. На

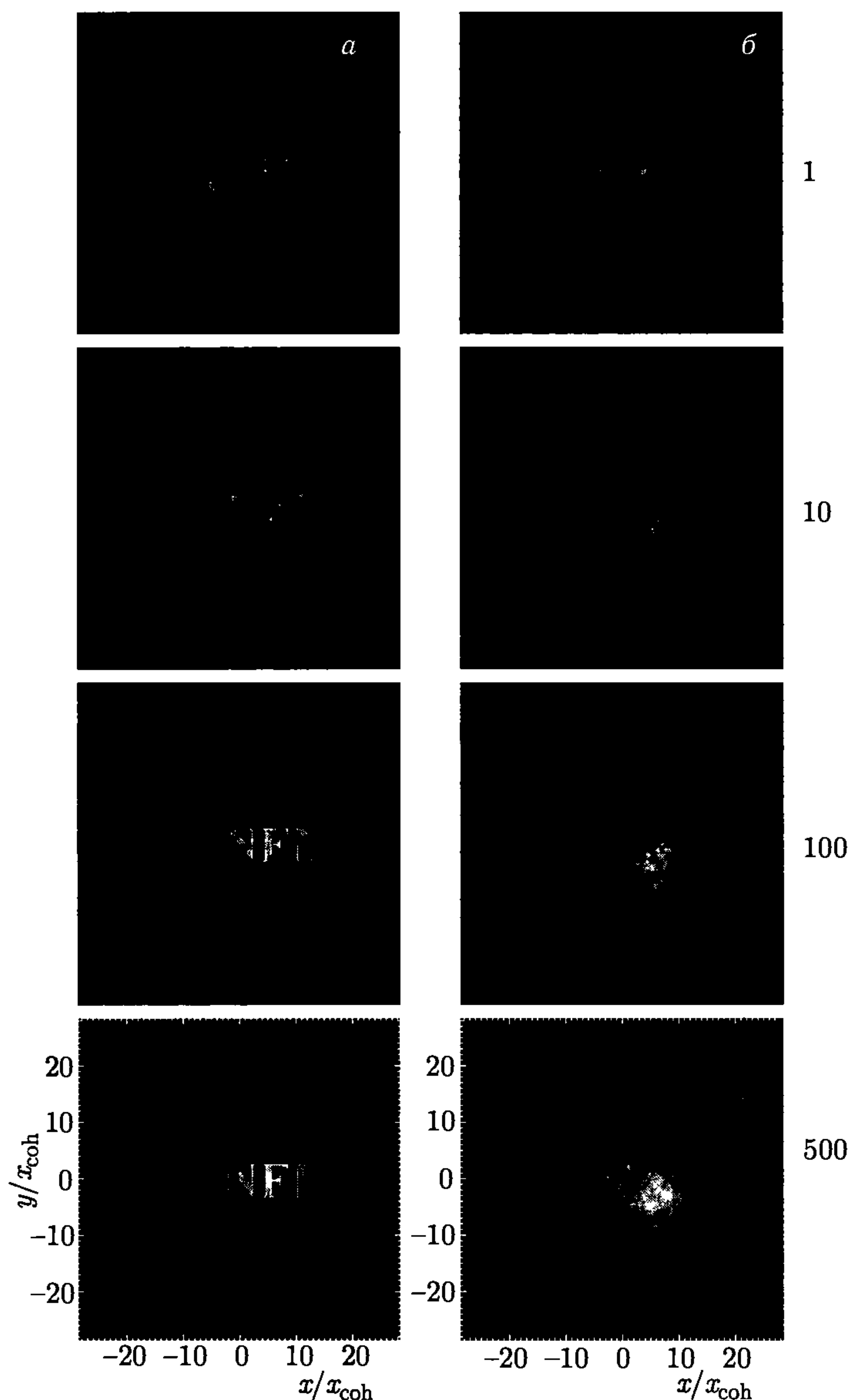


Рис. 5.5. Использование техники пространственного усреднения в $f - f$ -установке с двумя различными объектами (а) и (б) для получения фантомного изображения с помощью обратного преобразования Фурье. Корреляции рассчитаны из полного $3 + 1$ -мерного моделирования с дополнительным усреднением по импульсам накачки, число которых указано справа

рис. 5.4, *а* и *б* изображены действительная и мнимая части фурье-образа объекта, полученные путем выбора соответствующей фазы гомодина. Благодаря использованию пространственного усреднения, обсуждавшемуся в разд. 5.4, скорость сходимости процедуры восстановления увеличивается в 10 раз. Кроме того, из-за возможности оперировать с большой полосой пропускания, можно воспроизвести фурье-картину с большой точностью даже вдали от ее центральной части.

Другая интересная деталь гомодинного детектирования состоит в том, что, измеряя обе квадратурные компоненты распределения поля в дальней зоне, мы можем полностью реконструировать распределение, соответствующее объекту в ближней зоне, выполняя обратное преобразование Фурье. Мы сделали это с данными рис. 5.4, *а, б* и привели результаты расчетов на рис. 5.4, *в, г*. Видно, что реальная часть (рис. 5.4, *в*) повторяет профиль объекта с большой точностью. Это связано с возможностью оперировать с высокочастотными компонентами. Следовательно, поскольку полоса пропускания для изображения в дальней зоне велика, разрешение фантомного изображения в ближней зоне, полученного с помощью обратного фурье-преобразования, оказывается много лучше, чем при прямом наблюдении фантомного изображения в ближней зоне с использованием гомодинного приема и телескопической конфигурации в воспроизводящем плече (или же с использованием прямого детектирования, как показано на рис. 5.2 с $z = 2f$).

В двумерном случае эти особенности становятся еще более впечатляющими. На рис. 5.5 приведены примеры восстановления двух различных объектов: *а*) амплитудной маски в виде букв «INFM» и *б*) более сложной амплитудной маски с изображением волка. Мы показали фантомные изображения, полученные с помощью обратного преобразования Фурье и различного числа импульсов. Очевидно, что более простая маска (рис. *а*) восстанавливается быстрее, чем более сложная (рис. *б*). Тем не менее, в обоих случаях были получены вполне узнаваемые изображения после всего лишь нескольких проходов импульсов, а значит соответствующие дифракционные картины в дальней зоне имеют быструю сходимость и очень большую полосу пропускания. После дополнительного усреднения по импульсам (используя 500 импульсов, как показано на последних фрагментах) зернистость постепенно исчезает.

В [10] можно найти более детальное обсуждение и другие результаты.

5.6. Обсуждение: действительно ли квантовое перепутывание необходимо для наблюдения фантомных изображений?

Вопрос, вынесенный в заголовок этого раздела, возник довольно рано [4]. В недавних теоретических работах [5] приведены аргументы в пользу того, что для осуществления фантомного изображения действительно требуются перепутанные состояния. Этот вопрос вызвал горячую дискуссию после успешного экспериментального воспроизведения фантомных изображений, полученных в [4], с помощью классически коррелированных пучков [12]. В этом эксперименте классический источник испускал пары одномодовых импульсов, скоррелированных по направлению, которые использовались как

классические аналоги пар фотонов, выпускаемых при спонтанном параметрическом рассеянии (СПР) и скоррелированных по импульсам. В теоретическом обсуждении, сопровождающем эксперимент, авторы утверждали, что, хотя результаты любого одиночного эксперимента с квантовыми изображениями могли бы быть воспроизведены с помощью классических источников с соответствующей статистической скоррелированностью, такой классический источник не может имитировать источник квантового перепутывания для произвольных зондирующей и воспроизводящей систем.

В [8] мы поставили этот вопрос, начиная рассмотрение с ключевой особенности перепутанных состояний, излучаемых при СПР, — одновременного присутствия идеальных пространственных корреляций сигнального и холостого пучков в ближней и дальней зонах (см., например [1] в главе 2). Рассмотрим, что происходит, если чистое перепутанное состояние (см. (2.28) в главе 2) заменяется на классическое смешанное состояние. Выделим два смешанных состояния:

$$W = \prod_{\mathbf{q}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\mathbf{q})|^2 |n, \mathbf{q}\rangle_1 |n, -\mathbf{q}\rangle_{22} \langle n, \mathbf{q}|_1 \langle n, -\mathbf{q}| \right\}, \quad (5.20)$$

$$W' = \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\mathbf{q} = 0)|^2 |n, \mathbf{x}\rangle_1 |n, \mathbf{x}\rangle_{22} \langle n, \mathbf{x}|_1 \langle n, \mathbf{x}| \right\}. \quad (5.21)$$

Смешанное состояние (5.20) сохраняет локальные пространственные корреляции сигнального и холостого пучков по интенсивности в дальней зоне, а пространственная корреляционная функция интенсивностей в ближней зоне полностью делокализована. Как показано в [8], используя смешанное состояние (5.20) вместо чистого состояния (2.28), можно получить тот же результат (5.10) для дифракционной картины в конфигурации схемы, изображенной на рис. 5.2, с $z = f$. В то же время в конфигурации измерения фантомного изображения с $z = 2f$ не возможно получить никакой информации об объекте (в отличие от результата (5.13) для чистого состояния, которое позволяет получить изображение объекта). Наоборот, смешанное состояние (5.21) сохраняет локальные корреляции интенсивности сигнального и холостого пучков в ближней зоне. Не удивительно, что в этом случае схема с $z = 2f$ обеспечивает изображение объекта, также как и с чистым состоянием, но в схеме с $z = f$ дифракционная картина не наблюдаема. Ключевой момент состоит в том, что только чистое ЭПР-состояние проявляет идеальную скоррелированность сигнального и холостого пучков как в ближней, так и в дальней зонах. Этот анализ согласуется с основным утверждением [12], что результаты каждого одиночного эксперимента по измерению изображений с перепутанными фотонами можно воспроизвести с помощью источника света с классическими корреляциями. Основываясь на этих результатах в [8] мы утверждали, что только в присутствии квантового перепутывания возможно получить и изображение, и дифракционную картину объекта, используя один источник света и оперируя исключительно в воспроизводящем плече. Мы также указали на важность комбинированного проведения двух экспериментов — с $z = f$ и $z = 2f$ в схеме, изображенной на рис. 5.2. Эта интерпрета-

ция была воспринята достаточно хорошо научным сообществом, работающим в области квантовых изображений, и рассматривалась как возможность определить какие корреляции присутствуют в источнике света — квантовые или классические. В частности, в [13] и [14] был успешно осуществлен комбинированный эксперимент по измерению фантомного изображения и фантомной дифракционной картины с перепутанными пучками света.

Однако в дальнейших работах [15–17] мы обнаружили контрпример, который, в частности, противоречит картине, складывающейся из [8, 12]. А именно, мы показали теоретически, что, используя классические корреляции между двумя пучками света, полученными путем разделения квазитеплого пучка с помощью светоделительной пластины, возможно осуществить оба эксперимента с $z = f$ и $z = 2f$ в комбинации. Это иллюстрируется в следующем разделе, где мы прежде всего показываем, что имеет место глубокая аналогия между измерениями фантомных изображений в случае перепутанных пучков от параметрически преобразованного света и разделенных квазитепловых пучков. В последнем случае корреляции между пучками не являются идеальными ни в ближней, ни в дальней зонах, однако их достаточно, чтобы очень хорошо измерить фантомное изображение.

Мы также продемонстрировали квазитепловое построение фантомных изображений экспериментально [23, 24] (см. также [22]), что окончательно подвело итог дискуссии и подтвердило: квантовое перепутывание не является необходимым для построения фантомных изображений, даже если оно приводит к важным преимуществам в отдельных случаях, как обсуждается в следующем разделе.

5.7. Фантомные изображения в разделенных квазитепловых пучках: теория [15–17]

Как уже подчеркивалось, фантомные изображения с перепутанными пучками дают возможность когерентного детектирования изображений от некогерентных пучков, поскольку оба сигнальный и холостой пучки в отдельности являются некогерентными. В этом разделе мы покажем, что фантомные изоб-

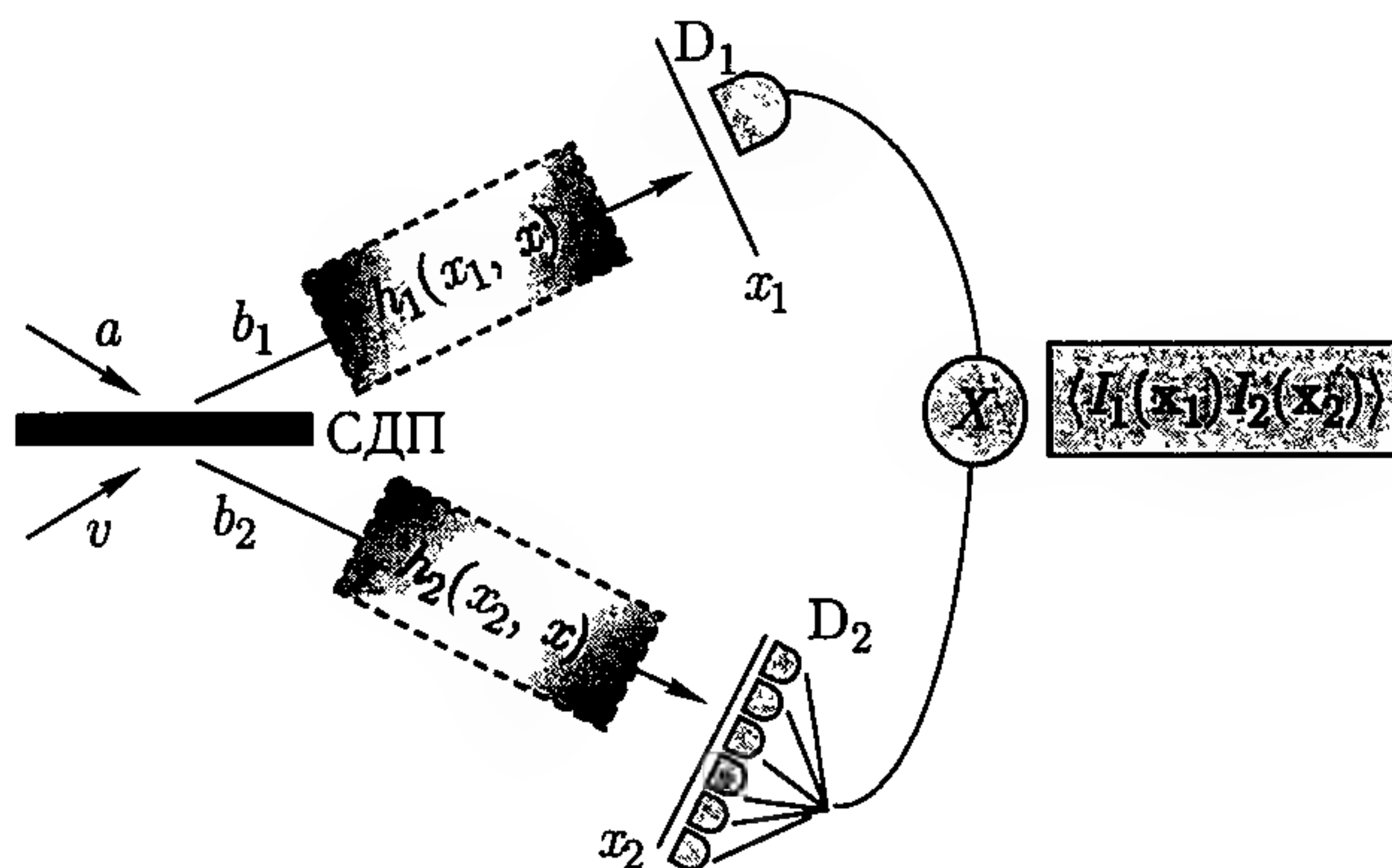


Рис. 5.6. Фантомные изображения с некогерентным тепловым светом. Тепловой пучок a разделяется на светоделительной пластине СДП на пучки b_1 и b_2 , проходящие через зондирующую и воспроизводящую системы. Остальная часть рисунка идентична рис. 5.1, б

ражения можно получить, используя подлинно некогерентный свет, такой как излучение теплового или квазитеплового источника. Здесь мы рассмотрим схему (рис. 5.6), пригодную для корреляционного построения изображений, в которой тепловой пучок разделен с помощью светоделительной пластины (СДП), и два полученных таким образом пучка используются таким же образом как СПР-пучки в перепутанных изображениях.

5.7.1. Аналогия между перепутанным и тепловым пучками при наблюдении фантомных изображений [15–17]. Начнем рассмотрение, записав соотношение вход-выход для теплового поля на светоделителе:

$$\hat{b}_1(\mathbf{x}) = r \hat{a}(\mathbf{x}) + t \hat{v}(\mathbf{x}), \quad \hat{b}_2(\mathbf{x}) = t \hat{a}(\mathbf{x}) - r \hat{v}(\mathbf{x}), \quad (5.22)$$

где t и r — комплексные коэффициенты пропускания и отражения зеркала; $\hat{a}$ — тепловое поле; $\hat{v}$ — вакуумное поле, некоррелированное с $\hat{a}$. Выражения (5.22) совпадают с приведенными в главе 1 выражениями (1.22) с тем отличием, что здесь используются операторы $\hat{a}$ и $\hat{v}$ вместо $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$, и светоделитель в общем случае не симметричный¹⁾. Мы считаем, что тепловое состояние $\hat{a}(\mathbf{x})$ характеризуется гауссовской статистикой поля, при которой любая корреляционная функция произвольного порядка выражается через корреляционную функцию второго порядка [34]²⁾:

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{x}') \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}. \quad (5.23)$$

Здесь $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}$ — среднее число фотонов в моде $\mathbf{q}$ теплового состояния. Во второй строке этого выражения неявно использовано предположение о трансляционной инвариантности источника³⁾, при которой $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. В частности, имеют место следующие свойства факторизации [34]:

$$\langle : \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{x}') \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}'') \hat{a}(\mathbf{x}''') : \rangle = \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{x}') \rangle \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}'') \hat{a}(\mathbf{x}''') \rangle + \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{x}''') \rangle \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}'') \hat{a}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (5.24)$$

Используя (5.2), где $\hat{a}_{i,\text{out}}$ заменено на $\hat{b}_i$, ($i = 1, 2$), (5.3) и (5.4), мы снова получаем выражение (5.7), с заменой $\hat{a}_{i,\text{out}}$ на $\hat{b}_i$. Следовательно, принимая во внимание преобразование (5.22) и то, что $\hat{v}$ — это вакуумное состояние, $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_2$ в (5.5) могут быть просто заменены на $r \hat{a}$ и $t \hat{a}$ соответственно. Таким образом, используя выражение (5.24), окончательно получим:

$$G_{\text{th}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |tr|^2 \left| \int d\mathbf{x}'_1 \int d\mathbf{x}'_2 h_1^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) h_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}'_1) \hat{a}(\mathbf{x}'_2) \rangle \right|^2, \quad (5.25)$$

¹⁾ Светоделительную пластину называют симметричной, если ее коэффициенты пропускания и отражения равны.

²⁾ Строго говоря, через корреляционные функции второго порядка выражаются корреляционные функции четных порядков [43].

³⁾ Здесь речь идет о статистической однородности случайного поля источника [43].

где $\langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}'_1) \hat{a}(\mathbf{x}'_2) \rangle$ представимо в виде (5.23). Здесь ясно прослеживается аналогия между результатами для перепутанных световых пучков и разделенных тепловых пучков. Кроме числового множителя $|tr|^2$ и наличия h_1^* вместо h_1 , корреляционная функция второго порядка для теплового света $\langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{x}') \rangle$ в выражении (5.25) играет такую же роль, что и корреляционная функция $\langle \hat{a}_{1out}(\mathbf{x}) \hat{a}_{2out}(\mathbf{x}') \rangle$ в (5.7) сигнального и холостого полей при параметрическом рассеянии. Поэтому из выражений (5.23) и (5.8) следует, что среднее число фотонов в тепловом пучке $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{th}$ играет такую же роль, что и $U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})$ в случае параметрического преобразования. Корреляционная функция $\langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{a}(\mathbf{x}') \rangle$ определяет свойства пространственной когерентности теплового источника [10, 34, 35]. Масштаб корреляции или поперечная длина когерентности x_{coh} определяется обратной шириной q_0 функции $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{th}$. Это же замечание относится и к корреляционной функции $\langle \hat{a}_{1out}(\mathbf{x}) \hat{a}_{2out}(\mathbf{x}') \rangle$, и к функции $U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{x})$ в случае перепутанного света. На основе этой аналогии, обращаясь снова к схеме на рис. 5.2, мы можем ожидать, что результаты детектирования дифракционной картины объекта (см. (5.10) и (5.11)), так же как и результаты в случае фантомного изображения (см. (5.13)) будут сохраняться при замене U_1V_2 на $\langle \hat{n} \rangle_{th}$. Это утверждение справедливо за исключением одной важной особенности: при исследовании дифракционной картины, как следует из (5.10), аргументом функции $\tilde{T}$ будет $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)2\pi/\lambda f$ вместо $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)2\pi/\lambda f$. Эта замена является следствием того, что в выражении (5.25) фигурирует величина $\langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}'_1) \hat{a}(\mathbf{x}'_2) \rangle$, в то время как в выражении (5.7) имеем $\langle \hat{a}_{1out}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2out}(\mathbf{x}'_2) \rangle$. В результате вместо (5.10) получаем:

$$G_{th}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto \left| \left\langle \hat{n} \left(-\mathbf{x}_2 \frac{2\pi}{\lambda f} \right) \right\rangle_{th} \tilde{T} \left((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \frac{2\pi}{\lambda f} \right) \right|^2. \quad (5.26)$$

В выражении (5.12) $\langle \hat{a}_{1out}(\mathbf{x}'_1) \hat{a}_{2out}(-\mathbf{x}_2) \rangle$ заменено на $\Gamma(\mathbf{x}'_1, -\mathbf{x}'_2)$ определенное в (5.23). В обоих случаях — для параметрических и для квазитепловых пучков — разрешение при восстановлении фантомного изображения определяется поперечной длиной когерентности x_{coh} . Кроме различия в выражениях (5.10) и (5.26), замена $\hat{a}_{1out}$ в (5.7) на $\hat{a}^\dagger$ в (5.25) приводит к другому отличию: в формуле тонкой линзы (5.15) в тепловом случае p_1 вычисляется не как сумма, а как разность расстояния между светоделительной пластинкой и линзой вдоль воспроизводящего плеча и расстояния от объекта до светоделительной пластинки вдоль зондирующего плеча [19, 22, 23].

В заключении можем сказать, что классические корреляции тепловых пучков предоставляют такие же возможности для изображений, что и перепутанные параметрические пучки. И фантомное изображение, и дифракционная картина объекта могут быть восстановлены, и мы имеем возможность перейти от одного типа измерения к другому, оперируя только в воспроизводящем плече установки.

В качестве специфического примера теплового источника в [15–17] мы рассмотрели сигнальное поле, генерируемое при параметрическом преобра-

зовании частоты вниз. В [15–17] проведено детальное численное сравнение результатов, полученных при использовании перепутывания двух параметрических пучков света и классических корреляций двух пучков, образованных путем симметричного разделения сигнального пучка. Объектом служила двойная щель, при моделировании учитывались конечность поперечного размера пучка накачки и его импульсный характер, т. е. временная зависимость. Параметры в обоих случаях выбирались одинаковыми, кроме среднего числа фотонов в пучках. При моделировании выполнялось условие примерного равенства среднего числа фотонов в обоих случаях. Результаты численных расчетов оказались близкими друг к другу как для фантомных изображений, так и для фантомных дифракционных картин при условии, что статистические данные для корреляционной функции G получены из одинакового числа импульсов накачки.

5.7.2. О разрешении. Как отмечено в предыдущем разделе, разрешение в ближней зоне (при восстановлении фантомного изображения) определяется поперечной длиной когерентности x_{coh} (т. е. размером пятна), точно так же, как и в случае параметрических пучков. Следовательно, чем более некогерентным является квазитепловой пучок, тем лучше разрешение. Примером теплового света с управляемыми свойствами когерентности может служить хаотическое излучение, полученное при рассеянии лазерного света на случайной среде [36].

С другой стороны, в дальней зоне (при восстановлении дифракционной картины) разрешение определяется поперечной длиной когерентности (или размером пятна) $x'_{\text{coh}} \propto \lambda f / w_s$ в дальней зоне, где w_s — поперечный размер квазитеплового источника [23]. В случае параметрического излучения эта величина совпадает с поперечным размером w_s накачки. Заметим, что в идеализированном случае трансляционной инвариантности, рассмотренном в наших аналитических формулах, $w_s = \infty$ и $x'_{\text{coh}} = 0$. Для любого реального случая поперечная длина когерентности, конечно, конечна.

5.7.3. Взаимосвязь с корреляционным методом Хэнбери Брауна–Твисса [37]. Подход [15–17] напоминает интерференционный метод Хэнбери Брауна–Твисса (ХБТ) для определения диаметра звезд [34, 37]. Однако основное отличие заключается в том, что измерение диаметра звезд зависит от когерентности, приобретаемой тепловым излучением звезды при его распространении к Земле. В отличие от этого, в нашем анализе «тепловых» фантомных изображений используется лишь факт некогерентности теплового излучения, и свет, облучающий объект должен иметь поперечную длину когерентности x_{coh} меньше, чем наименьший масштаб l_o изменения в пространственном распределении объекта.

Таким образом, при экспериментальном исследовании фантомных изображений можно измерить изображение объекта с хорошим разрешением.

При наблюдении дифракционной картины объекта схема прямого наблюдения не работает, поскольку излучение пространственно некогерентно по отношению к объекту (см. выражение, эквивалентное (5.11) в тепловом

случае), в то время как схема измерения фантомной дифракционной картины работает идеально (см. (5.26)).

Другое фундаментальное отличие состоит в следующем. В стандартной схеме ХБТ объект располагается в тепловом пучке до светоделительной пластинки, а не в воспроизводящем плече схемы, как в нашем случае, и как предполагает подход фантомного изображения. Эта особенность вносит важное отличие: в конфигурации ХБТ возможно восстановить фурье-образ квадрата модуля функции пропускания объекта, теряя при этом всю информацию о фазе. В отличие от этого в нашей схеме, когда объект расположен только в одном из двух плеч схемы, фазовая информация об объекте может быть извлечена и, например, можно реконструировать дифракционную картину чисто фазового объекта.

В [16] мы проводим численное моделирование для случая чисто фазового объекта.

5.7.4. Корреляционные аспекты. Схемы для построения изображений, представленные на рис. 5.2 и 5.6 обладают принципиальной особенностью. В схеме с $z = f$ восстановление дифракционной картины возможно благодаря наличию пространственных корреляций пучков света в дальней зоне (корреляции импульсов фотонов). В схеме с $z = 2f$ наличие пространственных корреляций в ближней зоне (позиционные корреляции фотонов) обеспечивает возможность восстановления изображения. Таким образом наши результаты для случая тепловых пучков могут показаться неожиданными, если иметь ввиду когерентный пучок, падающий на светоделительную пластинку, два выходных поля после которой не коррелированы (т. е. $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$). Однако, когда входным полем служит интенсивный тепловой пучок, то есть число фотонов, приходящееся на каждую моду, не слишком мало, два выходных поля хорошо коррелированы в пространстве как в ближней, так и в дальней зонах.

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим число фотонов, детектируемое на двух небольших идентичных участках (пикселах) плоскости в ближней зоне теплового пучка, т. е. сразу за светоделительной пластинкой,

$$\hat{N}_i = \int_S d\mathbf{x} \hat{b}_i^\dagger(\mathbf{x}) \hat{b}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \text{ и их разность } \hat{N}_- = \hat{N}_1 - \hat{N}_2. \text{ Используя}$$

выражения (5.22) при $|r|^2 = |t|^2 = 1/2$, нетрудно показать, что дисперсия $\langle (\delta \hat{N}_-)^2 \rangle = \langle \hat{N}_-^2 \rangle - \langle \hat{N}_- \rangle^2$ равна

$$\langle (\delta \hat{N}_-)^2 \rangle = \langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle, \quad (5.27)$$

что в точности соответствует уровню дробового шума. Примечательно, что равенство (5.27) имеет место не зависимо от статистических свойств входного пучка $\hat{a}$, и связано лишь с наличием вакуумного поля на другом входе.

С другой стороны, используя тождество $\langle (\delta \hat{N}_-)^2 \rangle = \langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle + \langle (\delta \hat{N}_2)^2 \rangle - 2\langle \delta \hat{N}_1 \delta \hat{N}_2 \rangle$, и принимая во внимание, что $\langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle = \langle (\delta \hat{N}_2)^2 \rangle$ при $|r|^2 = |t|^2$,

коэффициент пространственных корреляций записывается в виде:

$$C = \frac{\langle \delta \hat{N}_1 \delta \hat{N}_2 \rangle}{\sqrt{\langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle} \sqrt{\langle (\delta \hat{N}_2)^2 \rangle}} = 1 - \frac{\langle \hat{N}_1 \rangle}{\langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle}. \quad (5.28)$$

Для любого состояния справедливо неравенство $0 \leq |C| \leq 1$, в котором верхняя граница задается неравенством Коши–Шварца. Нижняя граница соответствует когерентному состоянию, для которого $\langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle = \langle \hat{N}_1 \rangle$. Для теплового состояния всегда имеет место некоторый избыточный шум по отношению к когерентному состоянию, так что $\langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle > \langle \hat{N}_1 \rangle$ и корреляция (5.28) никогда не исчезает. Примечательно, что высокая степень пространственных корреляций между пучками $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_2$ обеспечивается высоким уровнем избыточных шумов во входных полях. Как показано в приложении статьи [17], для тепловой системы с большим числом фотонов, если линейный размер пикселей одного порядка или больше чем x_{coh} , то $\langle \hat{N}_1 \rangle / \langle (\delta \hat{N}_1)^2 \rangle \ll 1$ и C может быть близко к своему максимальному значению (см. рис. 5.7).

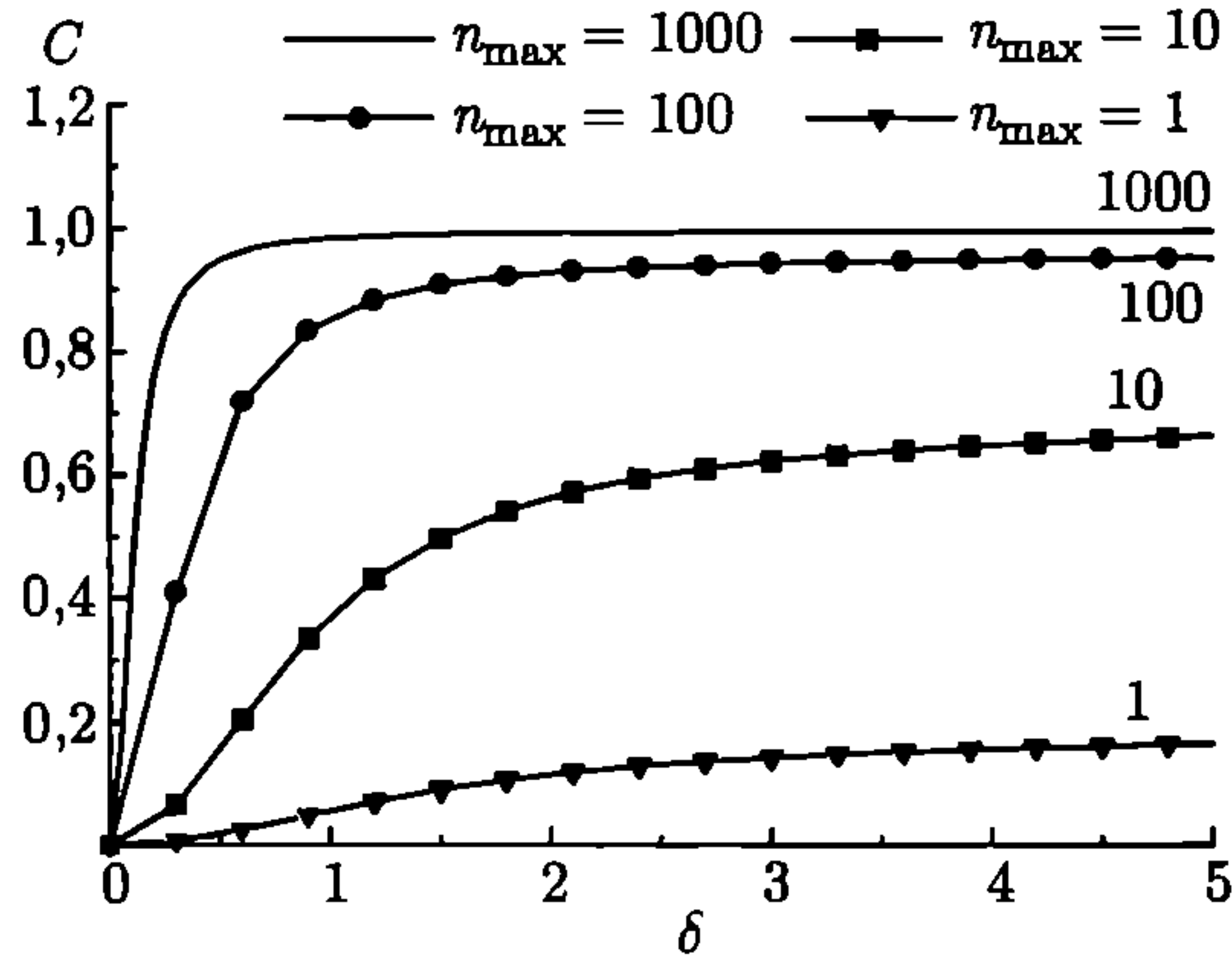


Рис. 5.7. Коэффициент пространственных корреляций C между двумя одинаковыми областями детектирования пучков, полученных при разделении теплового света, в зависимости от отношения δ линейного размера пиксела к длине когерентности; n_{max} — среднее число фотонов в наиболее интенсивной моде; $C = 1$ соответствует максимальной степени корреляции

Еще важнее, что в отсутствии потерь, как нетрудно показать, выражения (5.27) и (5.28) справедливы в любой поперечной плоскости, связанной с ближней зоной преобразованием Френеля. Предположим, что распространение пучков $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ описывается линейным унитарным ядром H , $\hat{b}_{H,i}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{b}_i(\mathbf{x}')$, $i = 1, 2$. Тогда при распространении форма преобразования на светоделителе (5.22) сохраняется, при условии, что тепловое поле $\hat{a}$ заменяется на распространяющееся поле $\hat{a}_H(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{a}(\mathbf{x}')$. Следовательно, выражения (5.27) и (5.28) справедливы также для пучков $\hat{b}_{H,1}$ и $\hat{b}_{H,2}$, поскольку эти выражения являются лишь следствием преоб-

разования на светоделителе (5.22) при $|r|^2 = |t|^2 = 1/2$. Более того, после распространения поле $\hat{a}_H$ по-прежнему описывается тепловой статистикой, поскольку гауссова статистика и свойства факторизации корреляционной функции четвертого порядка (5.24) сохраняются при линейном унитарном преобразовании. Поэтому корреляции могут быть также очень хорошими и в дальней зоне, если детектируемая область по размеру равна x'_{coh} или больше и интенсивность теплового пучка достаточно велика.

Отметим, что хотя, увеличивая среднее число фотонов, можно получить значения C близкие к 1, квантовый уровень корреляций никогда не достигается как видно из (5.27).

5.7.5. Аспекты контрастности. Важным вопросом является сравнение информационных параметров при параметрическом преобразовании частоты вниз и в тепловом режиме. Информация об объекте извлекается при вычитании из измеряемой корреляционной функции (5.3) факторизованного фонового члена $\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle$, как указано в (5.4). Значение контрастности определяется следующей величиной, вычисленной в соответствующих точках:

$$\mathcal{V} = \frac{G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle} = \frac{G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle + G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}, \quad (5.29)$$

в диапазоне $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$.

Первое замечание касается наличия $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}$ в выражении (5.26) вместо $U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})$, фигурировавшего в (5.8). Как следствие, в тепловом случае $G_{\text{th}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ пропорционально $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}^2$. В «перепутанном» случае $G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ пропорционально $|U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})|^2 = \langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{PDC}} + \langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{PDC}}^2$, где $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{PDC}} = |V_2(-\mathbf{q})|^2 = |V_1(\mathbf{q})|^2$ — среднее число фотонов, приходящееся на моду параметрических пучков, и $|U_1(\mathbf{q})|^2 = 1 + |V_1(\mathbf{q})|^2$ (см., например, ссылку [1] во второй главе). Отличие между этими двумя случаями становится незначительным, когда среднее число фотонов велико, в то время как в режиме малого числа фотонов при $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle \ll 1$ оно существенно. В самом деле для теплового случая контрастность не может быть больше 1/2 при любом значении $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}$, поскольку функция $G_{\text{th}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ масштабирована таким же образом, как и фоновый член. В отличие от этого в случае параметрического излучения контрастность может достигать значения 1 в режиме малого числа фотонов, поскольку в этом случае $G_{\text{PDC}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ пропорционально значению $\langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{PDC}}$, и этот член становится доминирующим относительно фона $\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle \propto \langle \hat{n}(\mathbf{q}) \rangle_{\text{PDC}}^2$. Следовательно, в режиме детектирования фотонных пар перепутанное излучение имеет много большее значение контрастности, чем классически коррелированные тепловые пучки (см. также [38]).

Кроме того, при обсуждении контрастности важное значение имеют время наблюдения и размер пиксела детектора. Стандартный расчет [34] показывает, что видность пропорциональна отношению времени когерентности источника τ_{coh} ко времени измерения (см. также [5, 9]). Из этого следует,

что обычные тепловые источники с очень малым временем когерентности не подходят для рассматриваемых здесь схем. Подходящий источник должен

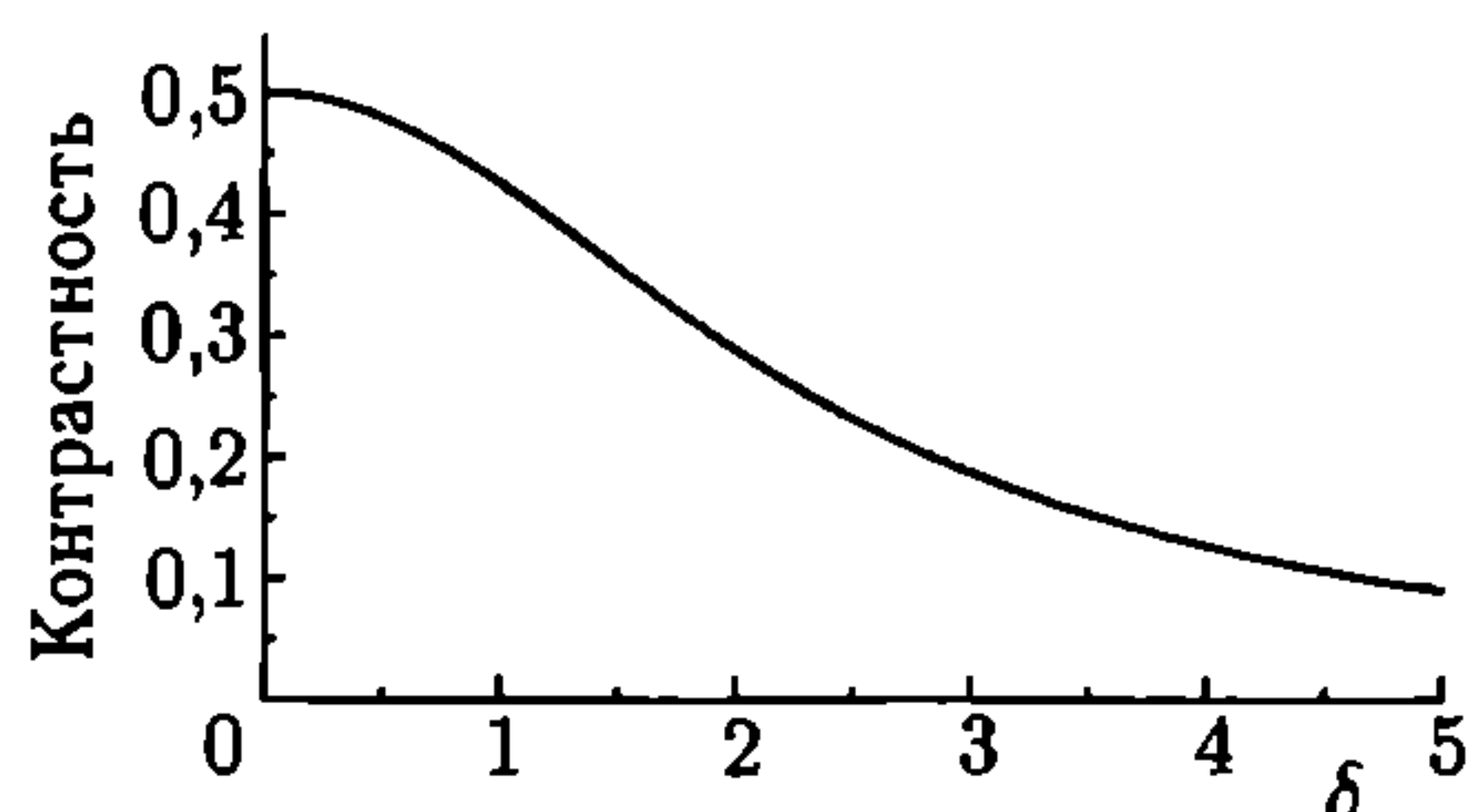


Рис. 5.8. Контрастность V_s пространственных корреляций между двумя одинаковыми областями детектирования пучков, полученных при разделении теплового света, в зависимости от отношения δ линейного размера пиксела к длине когерентности

иметь относительно большое время когерентности, как, например, натриевая лампа, для которой $\tau_{\text{coh}} \approx 10^{-10}$ с [38], или хаотичный свет, получаемый при рассеянии лазерного пучка в случайной среде [36].

Подобным образом контрастность пропорциональна отношению поперечной длины когерентности источника к линейному размеру пиксела детектора [5, 24] (см. также рис. 5.8), и этот фактор приводит к тем же заключениям, что следуют и из временного рассмотрения.

Сравнение рис. 5.7 и 5.8 показывает, что по отношению к линейному размеру пиксела кривые корреляций и контрастности имеют противоположный ход. Кроме того, поскольку при уменьшении длины когерентности разрешение улучшается, а контрастность падает, то, следовательно, и кривые разрешения и контрастности также имеют обратный ход [17, 20, 24]. Эта особенность проявляется одинаково как в ближней, так и в дальней зонах (при восстановлении изображения или дифракционной картины).

Лучшими кандидатами, позволяющими преодолеть главные проблемы контрастности, являются псевдотепловые источники [36], так как появляется возможность сконструировать размер пятна независимо в ближней и дальней зонах.

5.7.6. Некоторые исторические замечания. Важным предшественником наших работ [15–17] была статья [5], где были определены некоторые фундаментальные соотношения между случаями параметрического и теплового пучков. Важно отметить в этой связи, что в [5] не вводился существенный элемент, позволяющий проводить аналогию между построением фантомных изображений с параметрическими и разделенными тепловыми пучками, а именно — светоделитель, изображенный на рис. 5.6. Без этого светоделителя конфигурация становится эквивалентной рассмотренной ХБТ (см. подразд. 5.7.3), в которой объект помещен в тепловой пучок перед светоделителем. В этом случае, как показано в подразд. 5.7.3, невозможно наблюдать, например, чисто фазовый объект.

Анализ, проведенный в [5], сфокусирован на существовании дуализма, а не аналогии между параметрическим и тепловым случаями. Кроме того, авторы [5] указывают на проблему видности в тепловом случае, связанную со временем и размером детектирования (см. подразд. 5.7.5). В результате, их анализ не позволяет сделать вывод о тепловом источнике, как альтернативном параметрическому.

Электронная публикация [15] (предшествовавшая публикациям [16, 17]) вызвала живой интерес к вопросу «теплового» фантомного изображения,

что инициировало ряд важных теоретических [18–20] и экспериментальных [21–25] работ.

5.7.7. Эмпирическое сравнение фантомных изображений в перепутанном и тепловом свете. В подразд. 5.7.5. подробно рассмотрена проблема контрастности в «тепловой» конфигурации и указано, как уже отмечалось в [5], что такая проблема не возникает в параметрическом случае, где контрастность может достигать значения единицы в схеме совпадений. Тот факт, что квантовая конфигурация оказывается лучше, конечно, не вызывает удивления. В этом разделе мы постараемся на базе качественных аргументов определить ситуации, когда это преимущество становится существенным. В то же время мы покажем, что в других случаях «тепловой» подход может быть более удобен.

Проблему контрастности, связанную со временем измерения и размером пиксела детектора можно полностью преодолеть, используя псевдотепловой свет [36] благодаря тому, что при этом возможно легко управлять требуемыми временем когерентности и поперечной длиной когерентности как в ближней, так и в дальней зонах. Однако, как показано в подразд. 5.7.5, в тепловом случае контрастность всегда меньше, чем 0,5, и почти всегда много меньше единицы. Здесь проблема контрастности и проблема отношения сигнала к шуму фактически совпадают. С другой стороны, важно отметить, что, несмотря на малую контрастность, возможно идеально восстановить изображение или дифракционную картину объекта, производя большое число измерений, необходимое для построения корреляционной функции $G(x_1, x_2)$. Кроме того, в некоторых случаях возможно уменьшить число измерений, применяя технику пространственного усреднения, описанную в разд. 5.4.

При построении фантомных изображений с помощью перепутанных пучков параметрического излучения в режиме совпадений главной проблемой представляется длительное время, необходимое для восстановления информации, поскольку совпадения происходят редко и требуется огромное число измерений.

Как мы сказали ранее, проблема видности в тепловом случае также в конечном счете сводится к проблеме времени, необходимого для восстановления информации. Поэтому сравнение между параметрическим и тепловым подходами лучше всего проводить на языке времени.

Когда осуществляется макроскопическая модуляция объекта (амплитудная или фазовая), мы ожидаем более быстрой процедуры при использовании псевдотеплового источника. Дополнительные преимущества при этом — возможность легко достичь высокого разрешения и использовать более дешевую экспериментальную аппаратуру.

С другой стороны, когда модуляция становится очень мала, значение отношения сигнала к шуму начинает играть решающую роль, и можно ожидать изменения в соотношении времен восстановления информации в двух рассматриваемых подходах. В пределе, когда необходима высокая точность измерений, «тепловой» подход становится не выгодным, а преимущество квантовой конфигурации — бесспорным. Другой случай преимущества в использовании параметрического излучения возникает, когда техника фантомного

изображения применяется для квантовых информационных схем, например, когда требуется скрыть информацию от третьего лица.

5.8. Фантомные изображения с разделенными тепловыми пучками: эксперимент

В этом разделе приведены некоторые экспериментальные результаты, полученные в [23, 24].

Экспериментальная установка изображена схематически на рис. 5.9. Источником псевдотеплового света служит рассеивающая среда, освещенная пучком света He-Ne- или Nd-YAG-лазера. Среда представляет собой медленно вращающийся матовый диск, помещенное перед рассеивающей ячейкой, содержащей мутный раствор 3 мкм латексных сфер. При освещении диска широким коллимированным пучком He-Ne-лазера ($\lambda = 0,6328$ мкм, диаметр $D_0 \approx 10$ мм), случайная интерференция волн от источника приводит к возникновению на большом расстоянии ($z \approx 600$ мм) спекл-картины, зависящей от времени, характеризующейся хаотической статистикой и временем корреляции τ_{coh} порядка 0,5 с (для знакомства со статистикой лазерных спеклов см., например, [39]). Заметим, что матовый диск можно использовать и отдельно для получения хаотических спеклов, время корреляции которых зависит от скорости вращения матового диска и от диаметра лазерного пучка, как было сделано в классических экспериментах с псевдотепловым светом [36, 40, 43]. Действительно, в некоторых из экспериментов, описанных ниже, так и будет сделано. Однако это приводит к появлению проблемы: генерируемая картина спеклов повторяется после полного оборота диска. Этого можно избежать, сдвигая диск в сторону после каждого полного оборота. Мутный раствор обеспечивает более простой способ генерации действительно случайной статистики света благодаря случайному движению частиц раствора. Отметим, что мутная среда не может быть использована отдельно, поскольку часть лазерного излучения не будет рассеяна, что приведет к остаточному когерентному вкладу. На расстоянии $z_0 = 400$ мм от теплового источника диафрагма диаметром $D = 3$ мм выделяет телесный угол, в котором видна часть спекл-картины, позволяя сформировать почти

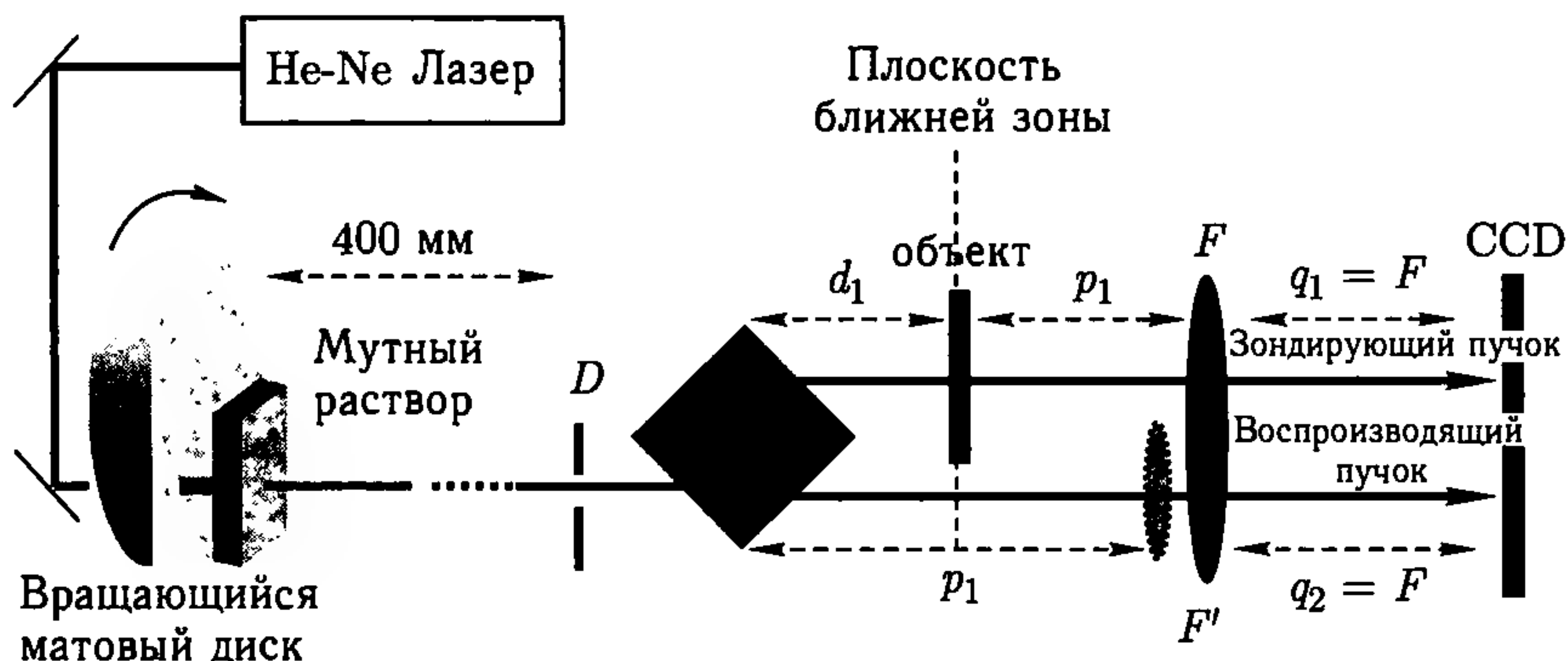


Рис. 5.9. Схема экспериментальной установки (см. описание в тексте)

коллимированный спекл-пучок с огромным числом (порядка 10^4) спеклов размера $\Delta x \approx \lambda z_0 / D_0 \approx 25$ мкм [39]. Спекл-пучок расщепляется светоделителем на два парных квазитепловых пучка («пучки-близнецы»), которые проявляют высокий (хотя и классический) уровень пространственных корреляций. Два пучка, возникающих после светоделителя, имеют слегка неколлинеарные направления распространения и падают на два различных неперекрывающихся участка CCD-камеры. Данные собираются в течение времени экспонирования (1–3 мс), которое много короче времени τ_{coh} , что позволяет записать высококонтрастную картину спеклов. Кадры снимаются со скоростью 1 Гц, так что каждый набор данных соответствует некоррелированной картине спеклов.

5.8.1. Фантомные изображения высокого разрешения [23]. В [23] мы выполнили восстановление как изображения (рис. 5.10), так и дифракционной картины объекта (рис. 5.11), оперируя только оптическими элементами в воспроизводящем плече установки и используя один классический источник. Оптическая установка объектного (зондирующего) плеча 1 фиксирована. Объект, состоящий из тонкой иглы диаметром 160 мкм, расположенной внутри прямоугольной апертуры шириной 690 мкм, находится в зондирующем плече на расстоянии d_1 от светоделителя.

Плоскость объекта, расположенная на расстоянии ≈ 200 мм от светоделителя, будет выбрана нами как контрольная плоскость и будет означать для нас плоскость *ближней зоны* (не следует путать эту плоскость с ближней зоной источника, поскольку плоскость объекта находится в дальней зоне по отно-

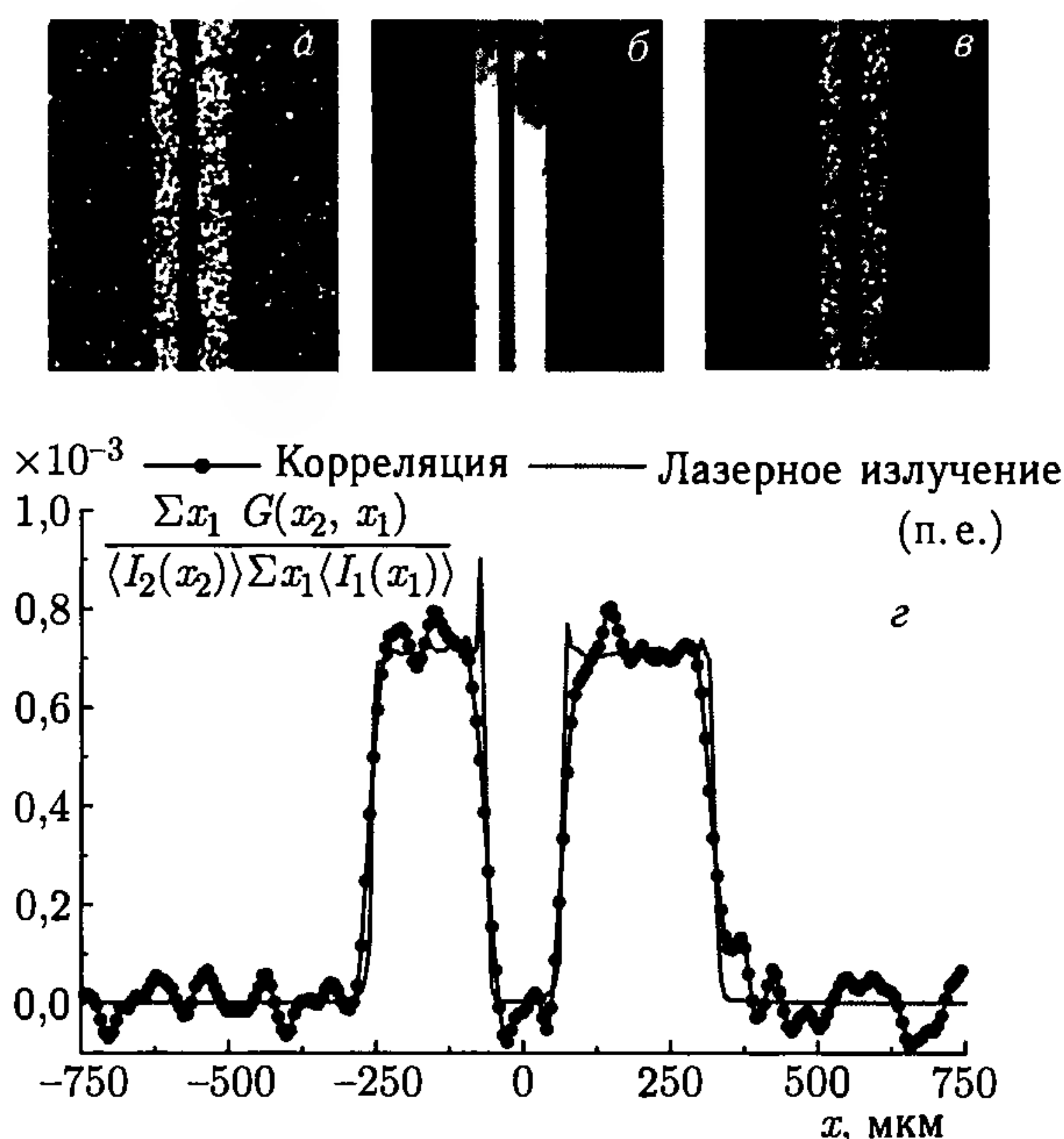


Рис. 5.10. Восстановление объекта: а) корреляции флуктуаций интенсивности; б) изображение, наблюдаемое при использовании лазерного света; в) данные рис. а и б усреднены в вертикальном направлении по 500 точкам; г) то же, что и на рис. а, но с усреднением по 30 000 вместо 5000

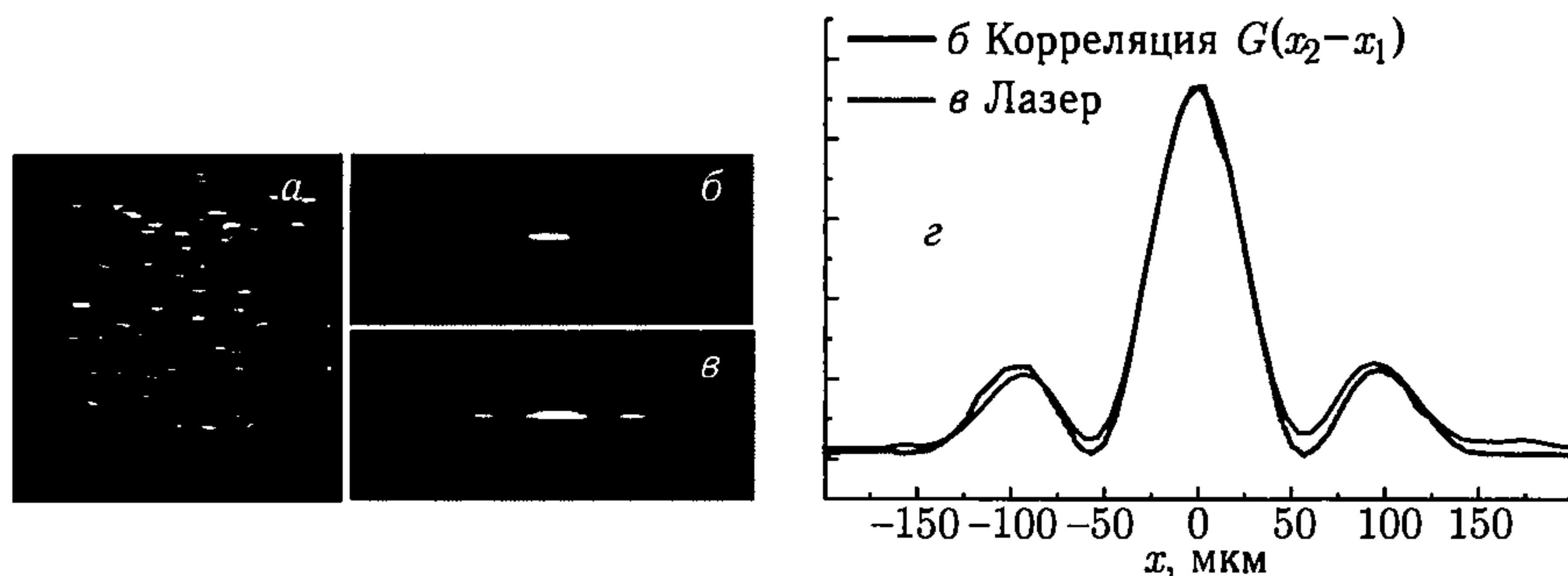


Рис. 5.11. Восстановление дифракционной картины: *а*) распределение интенсивности в плече 1 для одиночного импульса накачки; *б*) корреляционная функция $G(x_2 - x_1)$; *в*) дифракционная картина объекта, наблюдаемая при использовании лазерного света; *г*) горизонтальные срезы картин *б* и *в*

шению к источнику). Линза с фокусным расстоянием $F = 80$ мм помещается после объекта на расстоянии p_1 от объекта и $q_1 = F$ от CCD-камеры. В результате CCD-камера находится в дальней зоне относительно объекта. Однако, поскольку свет некогерентный, дифракционная картина объекта не видна на CCD-камере, как показано на рис. 5.11, *а*. Рассмотрим две различных установки воспроизводящего плеча 2. В первом случае поместим в плечо 2 непосредственно перед линзой F дополнительную линзу с фокусным расстоянием F' . Эквивалентное фокальное расстояние F_2 системы двух линз меньше, чем расстояние до CCD-камеры $q_2 = F$ ($1/F_2 = 1/F + 1/F'$). Это позволило нам найти положение плоскости, сопряженной плоскости CCD-камеры, временно поместив объект в плечо 2 и определив положение, при котором на CCD-камере наблюдается хорошо сфокусированное изображение объекта, освещенного лазерным светом (рис. 5.10, *б*). Затем объект возвращался в зондирующее плечо. Расстояния в воспроизводящем плече приблизительно удовлетворяли формуле тонкой линзы, записанной в форме $1/(p_2 - d_1) + 1/q_2 \approx 1/F_2$, обеспечивая коэффициент уменьшения $m \approx 1,2$. Используя полученное распределение интенсивности в воспроизводящем плече, рассчитывался коррелятор каждого из пикселей с полным числом фотоотсчетов в плече 1, что соответствует схеме с собирающим детектором в зондирующем плече. После усреднения по 5000 измерений получаем изображение иглы с хорошим разрешением (рис. 5.10, *а*), которое можно сравнить с изображением при освещении объекта лазерным светом (рис. 5.10, *б*). На рис. 5.10, *в* данные рис. 5.10, *а* и *б* усреднены в вертикальном направлении по 500 пикселям, позволяя сравнить горизонтальные профили кривых. Видно, что пространственное разрешение, полученное при корреляционных измерениях изображения в некогерентном свете, сравнимо с разрешением при когерентном освещении. Если производить усреднение по 30 000 данных, то контрастность существенно увеличивается (рис. 5.10, *г*).

Во втором варианте эксперимента линза F' просто удалена из схемы, изображенной на рис. 5.9, так что CCD-камера оказывается в фокальной плоскости линзы F и для воспроизводящего плеча. Рассчитывались пространственные кросс-корреляции интенсивностей в зависимости от смещения

$x_2 - x_1$ между положениями пикселей в двух плечах, и выполнялось дополнительное усреднение по положениям пикселей для каждого фиксированного значения $x_2 - x_1$ [10, 11]. Таким образом, усреднения только по 500 независимым изображениям достаточно, чтобы продемонстрировать воспроизведение формы дифракционной картины объекта (рис. 5.11). Она похожа на дифракционную картину, полученную при лазерном освещении (рис. 5.11, в). Горизонтальные профили дифракционных картин 5.11, б и 5.11, в, изображенные на рис. 5.11, г, показывают очень хорошее соответствие.

Как показано в подразд. 5.7.2, посвященного вопросу разрешения схем фантомного изображения и фантомной дифракции, существуют характерные размеры спеклов в ближней и дальней зонах. Эти пространственные свойства когерентности можно исследовать, измеряя корреляционные функции четвертого порядка в отсутствии объекта. Сперва измерялась автокорреляционная функция воспроизводящего пучка $\langle \hat{I}_2(x) \hat{I}_2(x') \rangle$ на установке в присутствии линзы F' , так что воспроизводящий пучок, записанный ССД-камерой соответствовал (уменьшенному) изображению в ближней зоне. Эти данные показаны на рис. 5.12 (квадраты) как функция $|x - x'|$. Пренебрегая вкладом дробовой составляющей шума при $x = x'$ и используя формулу Сигерта для гауссовой статистики, получим:

$$\langle \hat{I}_2(x) \hat{I}_2(x') \rangle = \langle \hat{I}_2(x) \rangle \langle \hat{I}_2(x') \rangle + |r|^4 |\Gamma_n(mx, mx')|^2, \quad (5.30)$$

где Γ_n — корреляционная функция (5.23) в ближней зоне. «Пьедестал» кривой на рис. 5.12 соответствует произведению средних значений интенсивностей, а узкий пик в окрестности $x = x'$ — второму члену уравнения (5.30). Аппроксимация этого пика гауссовой функцией дает среднеквадратичное значение $\sigma_n = (14,3 \pm 0,2)$ мкм, что приводит к значению длины когерентности в плоскости ближней зоны $\Delta x_n \approx 2m\sigma_n = (34,3 \pm 0,6)$ мкм. Треугольниками на рис. 5.12 отмечена корреляционная функция интенсивностей в дальней зоне, полученная при измерении автокорреляционной функ-

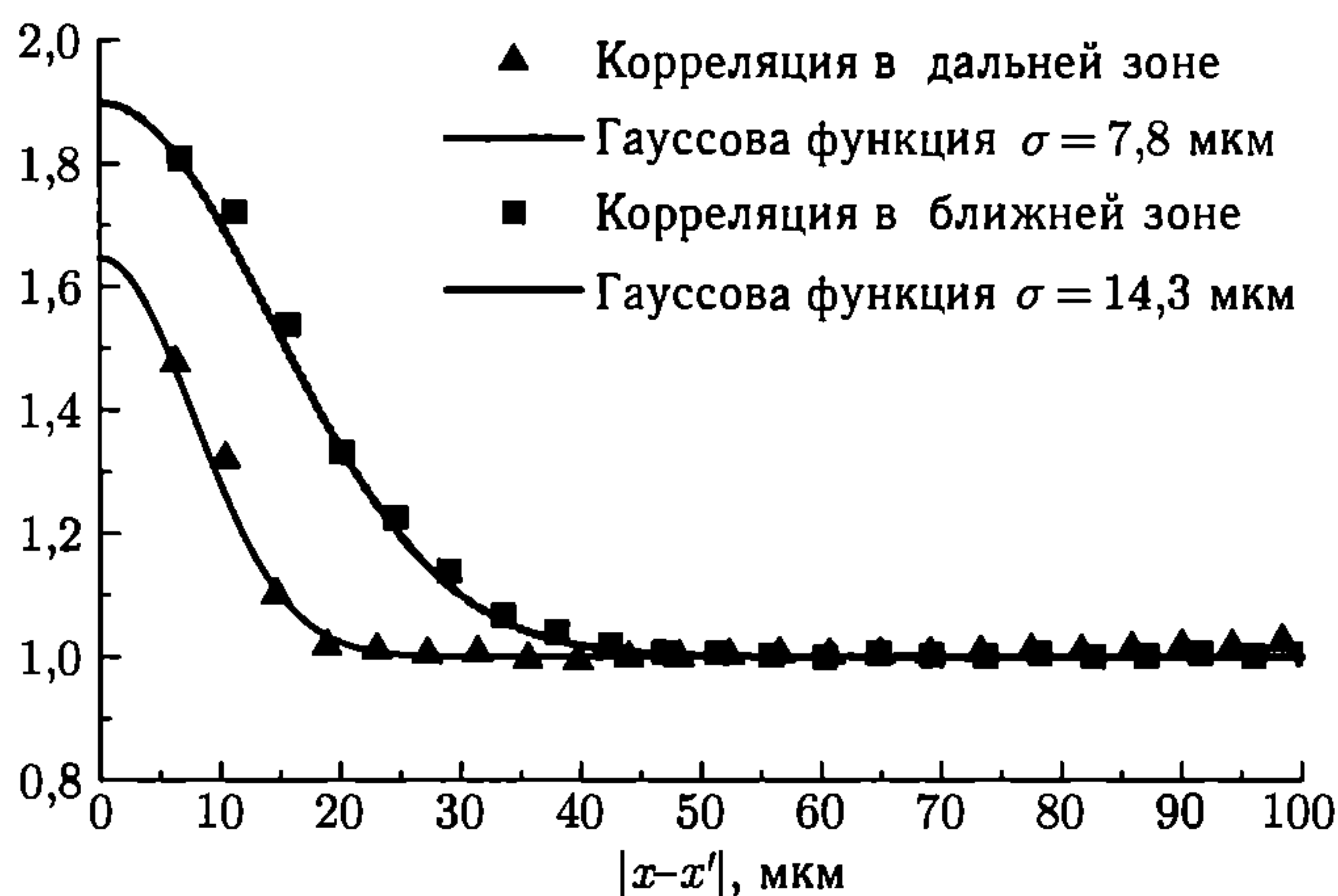


Рис. 5.12. Нормированная автокорреляционная функция четвертого порядка в ближней и дальней зонах. Сплошные кривые — аппроксимация корреляционных пиков гауссовскими функциями

ции пучка 1 в фокальной плоскости линз F . Аппроксимация гауссовой функцией дает $\sigma_f = (7,8 \pm 0,3)$ мкм, из которого можно сделать вывод о длине когерентности в дальней зоне $\Delta x_f \approx 2\sigma_f = (15,6 \pm 0,6)$ мкм. Это, в свою очередь, соответствует неопределенности поперечных волновых векторов $\Delta q = \frac{2\pi}{\lambda F} \Delta x_f = (1,94 \pm 0,07) \cdot 10^{-3}$ мкм $^{-1}$. Следовательно, мы получаем для наших классических пучков

$$\Delta x_n \Delta q = 0,066 \pm 0,003, \quad (5.31)$$

в то время как прежде предполагалось, что предельное неравенство $\Delta x_n \Delta q > 1$ можно преодолеть только используя перепутанные пучки (см., например, [13, 14]). Более того, результат (5.31) примерно в четыре раза меньше, чем результаты, полученные в [13, 14], где применялись перепутанные фотоны. Отметим, что (5.31) не означает нарушение ЭПР-предела, в отличие от экспериментов с отдельными фотонными парами [14, 41]. Фактически в любой плоскости условная вероятность детектирования фотона в точке $\mathbf{x}_2$ в пучке 2, при условии детектирования фотона в точке $\mathbf{x}_1$ в пучке 1 определяется как:

$$P(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) \propto \frac{\langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle}{\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle} = \langle \hat{I}_2(\mathbf{x}_2) \rangle + |rt|^2 \frac{|\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2}{\langle \hat{I}_1(\mathbf{x}_1) \rangle}. \quad (5.32)$$

Оба члена в (5.32) дают примерно одинаковые вклады (см. рис. 5.12), но первый, возникающий как фон («подставка»), много шире второго, поскольку диаметр пучка много больше длины когерентности. Следовательно, с хорошей точностью условная дисперсия в пространстве совпадает с размером пятна пучка. Произведение дисперсий в ближней и дальней зонах удовлетворяет соотношению Фурье, в соответствии с ограничением, полученным в [13]. Ключевым моментом здесь является то, что условная дисперсия и разрешение фантомного изображения в общем случае не совпадают, поскольку разрешение определяется длиной когерентности корреляционной функции поля $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Они совпадают только в специальном случае, когда фоном можно пренебречь, как, например, в режиме счета совпадений при параметрическом преобразовании частоты вниз, рассмотренном в [13, 14]. Только в этом случае, который, в принципе, соответствует 100% видности, ограничение [13] справедливо также для разрешения.

В нашем эксперименте, где видность лимитирована 50%, произведение разрешений в ближней и дальней зонах не ограничено, потому что длины когерентности (размеры спеклов) в двух плоскостях являются величинами независимыми. В ближней зоне размер спекла зависит от диаметра лазерного пучка D_0 и от расстояния z от источника, $\Delta x_n \propto \lambda z / D_0$ [39]. Как мы проверили, когда диафрагма находится достаточно близко к ближней зоне, ее диаметр D не сильно влияет на Δx_n . Однако этот диаметр определяет размер спекла в дальней зоне, который в грубом приближении равен $\Delta x_f \propto \lambda F / D$ [39]. Подставляя параметры нашей экспериментальной установки, находим $\Delta x_n \approx 30$ мкм и $\Delta x_f \approx 17$ мкм, что находится в хорошем

соответствии с оценочными значениями, полученными из анализа корреляций (рис. 5.12). Выделим два ключевых аспекта нашего эксперимента: 1) наличие большого числа маленьких спеклов в ближней зоне внутри широкого пучка; 2) время измерения много меньше τ_{coh} . Это привело к формированию в дальней зоне интерференционной картины спеклов, характеризуемой малой длиной когерентности, потому что $\Delta x_f \propto 1/D$. В этом отношении наш источник отличался от классического, использованного в [12, 13], где каждое испускание состоит из одиночного узкого импульса, и произведение разрешений ограничено дифракцией импульса.

Наконец, мы укажем, что в [26], где представлены эксперименты по наблюдению чисто фазового объекта в перепутанных пучках света, введение содержит ошибочную интерпретацию, что освещение объекта в нашем эксперименте [23] когерентно из-за присутствия диафрагмы, которая выделяет уменьшенное число спеклов. Как отмечено выше, число спеклов в пучке, прошедшем через диафрагму огромно ($\simeq 10^4$). Кроме того, в плоскости объекта (в ближней зоне) размер спекла составляет порядка 30 мкм, что, как показано выше, много меньше пространственного масштаба, характеризующего объект (например, диаметр иглы равен 160 мкм, как упоминалось выше). Следовательно, освещение является некогерентным, что ясно также из отсутствия интерференционной картины на рис. 5.11, а. В следующем подразделе мы покажем, какие изменения возникают, когда освещение становится когерентным.

Заметим, что освещение является некогерентным также с точки зрения временной зависимости, даже если время накопления меньше времени когерентности. По существу, чтобы восстановить фантомную дифракционную картину, необходимо произвести усреднение более чем по тысяче измеренных данных, т. е. по временному интервалу, сильно превосходящему время когерентности. Также эта особенность будет ясно проявляться в обсуждении следующего раздела.

5.8.2. Эксперименты по измерению фантомной дифракционной картины: дополнительность когерентности и корреляций [24]. В [24] мы вместо He-Ne-лазера использовали Nd-YAG-лазер, но сохранили ту же геометрическую конфигурацию, что изображена на рис. 5.9 и рассмотрена в [23]; это же касается и объекта. Рассмотрим случай измерения фантомной дифракционной картины (рис. 5.9 без линзы F').

В первой серии измерений размер источника выбирался равным $D_0 = 10$ мм, и объект освещался большим числом спеклов, чей размер $\Delta x_n = 36$ мкм был много меньше разделяющей щели. Свет был пространственно некогерентным, как описано в предыдущем подразделе. Результаты показаны в верхнем ряду рис. 5.13. На рис. 5.13, а изображено мгновенное распределение интенсивностей объектного пучка, демонстрирующее картину спеклов и отсутствие интерференционных полос от двойной щели, что и ожидалось при некогерентном освещении. При ближайшем рассмотрении можно заметить, что форма спеклов имеет сходство с интерференционной картиной двойной щели, однако, поскольку спеклы смещаются случайным образом в поперечной плоскости от импульса к импульсу, усреднение

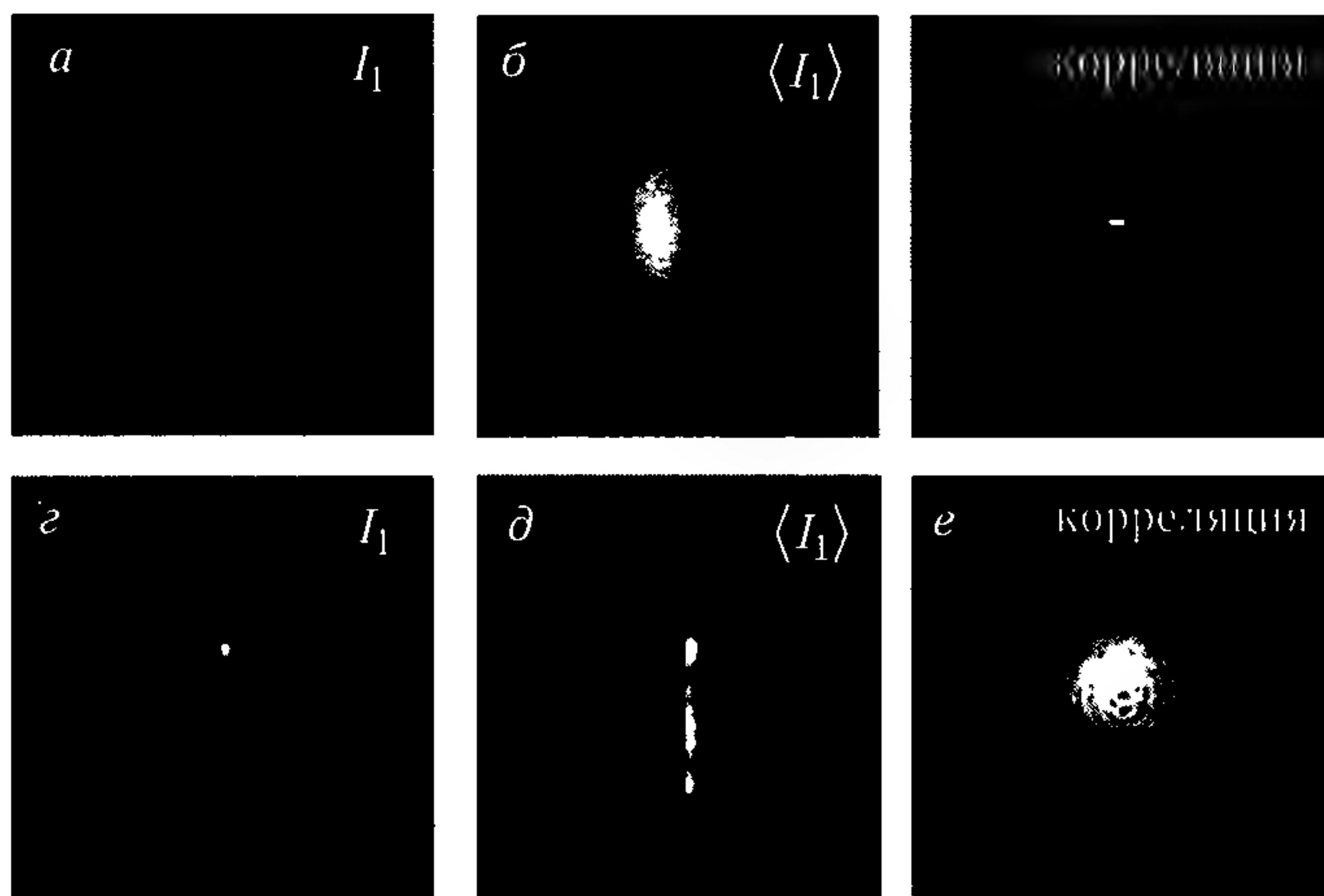


Рис. 5.13. Данные экспериментов по изучению фантомной дифракционной картины: переход от некогерентного к частично когерентному свету. Верхний ряд (рис. а–в) получен при освещении источником размера $D_0 = 10$ мм, с размером спеклов в ближней зоне $\Delta x_n = 36$ мкм. В трех нижних рис. г–е размер источника выбирался равным $D_0 = 0,1$ мм, с $\Delta x_n = 3,2$ мм; а и г — мгновенное распределение интенсивности I_1 в объектном пучке; б и д — распределение интенсивности $\langle I_1 \rangle$, усредненное по 350 импульсам; в и е — корреляционная функция $G(x_1, x_2)$ в зависимости от координаты x_2 при фиксированном значении x_1 , усредненная по 20 000 импульсов

по нескольким импульсам приводит к однородному широкому пятну (рис. 5.13, б). На рис. 5.13, в построена функция $G(x_1, x_2)$ в зависимости от координаты пиксела в воспроизводящем плече x_2 , и показан результат корреляций распределения интенсивностей в воспроизводящем плече с интенсивностью, измеренной на одном фиксированном пикселе в объектном (зондирующем) плече. Заметим, что в отличие от [23] метод пространственного усреднения [10, 11] здесь не применялся, это делало скорость сходимости медленнее, однако сама схема оказывается идейно ближе к методу фантомной дифракции, в котором информация извлекается только из сканирования по координатам пикселей в воспроизводящем плече. Фантомная дифракционная картина проявляется после нескольких тысяч усреднений, и хорошо видна после 20 000 усреднений. Это подтверждается данными на рис. 5.14, а, где сравниваются горизонтальный профиль дифракционной картины, полученной при корреляционных измерениях и аналогичный профиль, полученный при лазерном облучении объекта.

Вторая серия измерений выполнена при меньшем размере источника $D_0 = 0,1$ мм, помещая пластину с небольшим отверстием после матового стекла. В результате пространственная когерентность света, облучающего объект, увеличивается. Поскольку размер спекла в плоскости диафрагмы D теперь составляет ≈ 3 мм, в среднем объект освещается одним спеклом много большего размера, чем разделяющая щель. Результаты приведены в нижней строке рис. 5.13. Как и ожидалось, теперь наблюдаются интерференционные полосы в мгновенном распределении интенсивностей в объектном плече 1 (рис. 5.13, г), которые становятся более отчетливыми после усреднения по нескольким сотням импульсов (рис. 5.1, д). Заметим, что форма интерфе-

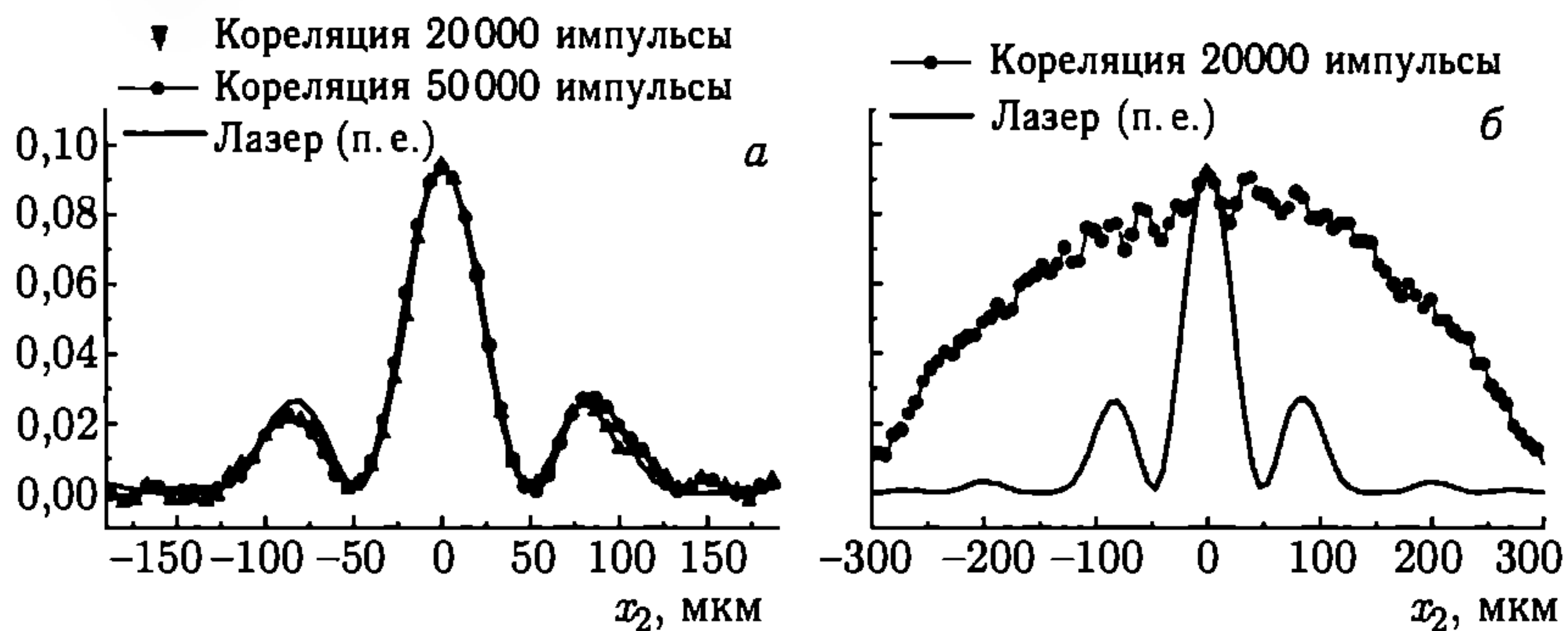


Рис. 5.14. Горизонтальный профиль корреляционной функции $G(x_1, x_2)$ в зависимости от координаты x_2 при фиксированном значении x_1 (см. рис. 5.13, в, е): а) в случае некогерентного освещения, $D_0 = 10$ мм; данные получены при усреднении по 20 000 (треугольники) и 50 000 (кружки) импульсов; б) в случае частично когерентного освещения, $D_0 = 0,1$ мм (20 000 импульсов). Для сравнения приведена дифракционная картина, полученная при освещении лазером (светлая сплошная линия)

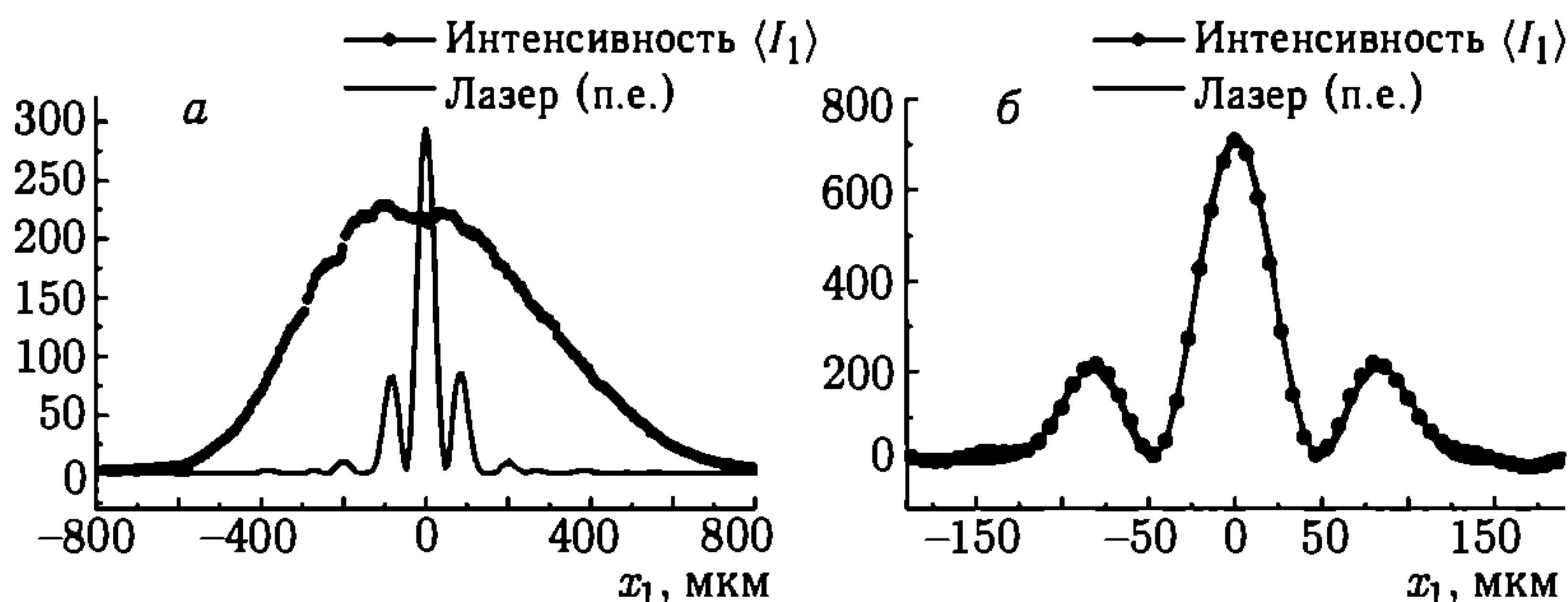


Рис. 5.15. Горизонтальный профиль среднего распределения интенсивности $\langle \hat{I}_1(x_1) \rangle$ в объектном плече (см. рис. 5.13, б, д): а) наблюдаемый при некогерентном освещении с $D_0 = 10$ мм (350 импульсов) и б) построенный для случая частично когерентного освещения с $D_0 = 0,1$ мм (500 импульсов). Для сравнения приведена дифракционная картина, полученная при освещении лазером (светлая сплошная линия)

ренционной картины теперь растянута в вертикальном направлении, потому что свет, испускаемый малым источником, не коллимирован. Горизонтальный профиль $\langle \hat{I}_1 \rangle$, построенный на рис. 5.14, б, показывает очень хорошее согласие результатов с дифракционной картиной, полученной при лазерном освещении объекта. Напротив, в корреляционной функции интенсивностей в двух плечах не появляется никаких интерференционных полос при исследовании зависимости от координаты x_2 (рис. 5.13, е). Отметим, что при выполнении этой серии измерений мутная среда убиралась, чтобы повысить мощность. В данном случае это возможно, поскольку очень малый размер источника позволяет за один поворот стеклянного диска сгенерировать большое число независимых картин.

Рис. 5.13–5.15 наглядно демонстрируют замечательную дополнительность наблюдения интерференционных полос в корреляционной функции (фантомная дифракция) и в распределении интенсивностей объектного пучка (обычная дифракция). Из них также видна фундаментальная роль пространствен-

ной некогерентности источника при наблюдении фантомной дифракционной картины: чем более некогерентен источник света, тем более пространственно коррелированными оказываются два пучка, и тем больше информации об объекте возможно извлечь из дифракционной картины. Чем более когерентным является источник, тем более плоской (сглаженной) оказывается пространственная корреляционная функция двух пучков, и тем меньше информации об объекте содержится в фантомной дифракции. Такая ситуация полностью аналогична дополнителности однофотонной и двухфотонной интерференции в эксперименте Юнга с двумя щелями с фотонами от параметрического источника [42], который объясняется дополнителностью когерентности и перепутанности. В нашем случае теплового пучка точнее сказать, что имеет место дополнителность когерентности и пространственных корреляций, показывая, что также и в этом отношении классические пространственные корреляции, полученные при разделении теплового пучка, играют роль аналогичную перепутыванию параметрических фотонов.

Эти результаты нетрудно понять, применяя формализм, развитый в подразд. 5.7.1 и, в частности, глядя на выражение (5.25) для корреляционной функции флуктуаций интенсивности $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. В пределе пространственно когерентного света корреляционная функция поля $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{x}_1) \hat{a}(\mathbf{x}_2) \rangle$ становится постоянной относительно изменения пространственных переменных в интересующем нас диапазоне, и двойной интеграл в (5.25) превращается в произведение для двух обычных схем изображения, позволяя видеть дифракционную картину объекта только в объектном плече 1. В результате при построении корреляционной функции в зависимости от координаты $\mathbf{x}_2$, никакой дифракционной картины объекта не наблюдается; т.е. никакой фантомной дифракции не происходит. Такое же измерение можно провести и в параметрическом случае, проясняя таким образом аналогию между ролью когерентности при параметрическом и тепловом излучении.

Отметим, что, как показано на рис. 12 в статье [24], если уровень некогерентности излучения в ближней зоне увеличивается, то контрастность дифракционной картины также увеличивается; обратная зависимость имеет место для фантомного изображения объекта.

В заключение отметим, что недавно были выполнены эксперименты по наблюдению фантомных изображений в стандартном тепловом свете [25].

Список литературы

1. *Klyshko D. N.* // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1988. V. 94. P. 82 [Sov. Phys. JETP. 1988. V. 67. P. 1131];
Belinskii A. V., Klyshko D. N. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1994. V. 487. P. 105 [JETP. 1994. V. 78. P. 259].
2. *Ribeiro P. H. S., Padua S., Machado da Silva J. C., Barbosa G. A.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 4176.
3. *Strekalov D. V., Sergienko A. V., Klyshko D. N., Shih Y. H.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 3600.
4. *Pittman T. B., Shih Y. H., Strekalov D. V., Sergienko A. V.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. R3429.

5. Saleh B. E. A., Abouraddy A. F., Sergienko A. V., Teich M. C. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 043816.
6. Abouraddy A. F., Saleh B. E. A., Sergienko A. V., Teich M. C. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 123602.
7. Abouraddy A. F., Saleh B. E. A., Sergienko A. V., Teich M. C. // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19. P. 1174.
8. Gatti A., Brambilla E., and Lugiato L. A. // Phys. Rev. Lett. V. 90, 133603-1 (2003).
9. Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. // Laser Physics. 2995. V. 15. P. 176, специальный выпуск в честь 70-летнего юбилея Герберта Вальтера.
10. Bache M., Brambilla E., Gatti A., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 023823.
11. Bache M., Brambilla E., Gatti A., Lugiato L. A. // Opt. Expr. 2004. V. 12. P. 6067.
12. Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 113601.
13. Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W., Howell J. C. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 033601.
14. D'Angelo M., Kim Y.-H., Kulik S. P., Shih Y. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 233601.
15. Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. quant-ph/0307187.
16. Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 093602.
17. Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 013802.
18. Cheng J., Han S. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 093903.
19. Cao D.-Z., Xiong J., Wang K. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 013801.
20. Cai Y., Zhu S.-Y. // Opt. Lett. 2004. V. 29. P. 2716.
21. Scarcelli G., Valencia A., Shih Y. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 051802(R).
22. Valencia A., Scarcelli G., D'Angelo M., Shih Y. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 063601, представлены результаты экспериментов фантомного изображения с помощью тепловых фотонов, но не рассматривались вопросы фантомной дифракции и разрешения.
23. Ferri F., Magatti D., Gatti A., Bache M., Brambilla E., Lugiato L. A. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 183602.
24. Gatti A., Bache M., Magatti D., Brambilla E., Ferri F., Lugiato L. A. Coherent imaging with incoherent light from a pseudo-thermal source // J. Mod. Opt. 2006. V. 53. P. 739.
25. Zhang D., Chen X.-H., Zhai Y.-H., Wu L.-A. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 173601.
26. Abouraddy A. F., Stone P. R., Sergienko A. V., Saleh B. E., Teich M. C. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 213903.
27. Boto A. N., Kok P., Abrams D. S., Braunstein S. L., Williams C. P., Dowling J. P. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 2733.
28. D'Angelo M., Chekhova M. V., Shih Y. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 013602.
29. Wang K., Cao D.-Z. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 041801;
Cao D.-Z., Li Z., Zhai Y.-H., Wang K. // Eur. Phys. J. D. 2005. V. 33. P. 137.
30. Xiong J., Huang F., Cao D. Z., Li H. G., Sun X. J., Wang K. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 173601.
31. Scarcelli G., Valencia A., Shih Y. // Europhys. Lett. 2004. V. 68. P. 618.
32. Zeilinger A. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. V. S288.

33. *Scully M. O., Druehl K.* // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 2208.
34. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика: Пер. с англ. / Под ред. В. В. Самарцева. — М.: Физматлит, 2000.
35. *Звелто О.* Принципы лазеров: Пер. с англ. / Под ред. Шмаонова Т. А. — М.: Мир, 1984.
36. *Martiessen W., Spiller E.* // Am. J. Phys. 1964. V. 32. P. 919.
37. *Hanburry-Brown R., Twiss R. Q.* // Nature (London). 1956. V. 177. P. 27.
38. *Belinsky A. V., Klyshko D. N.* // Phys. Lett. A. 1992. V. 166. P. 303.
39. *Goodman J. W.* // Laser speckle and related phenomena. Topics in Applied Physics. V. 9 / Ed. by J. Dainty. — Berlin: Springer Verlag, 1975. — P. 9.
40. *Arecchi F. T.* // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 912.
41. *Howell J. C., Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 210403.
42. *Abouraddy A. F., Nasr M. B., Saleh B. E., Sergienko A. V., Teich M. C.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. P. 063803.

Литература, добавленная при переводе

43. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
44. *Bache M., Magatti D., Ferri F., Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A.* Coherent imaging of a pure phase object with classical incoherent light // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. P. 53802.
45. *Ferri F., Magatti D., Sala V. G., Gatti A.* Longitudinal coherence in thermal ghost imaging // Appl. Phys. Lett. 2008. V. 92. P. 261109.
46. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A.* Quantum Imaging // Progress in Optics. V. 51, Ch. 5. P. 251 / Ed. by E. Wolf. — Elsevier North-Holland, 2008.

КВАНТОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ

Михаил Колобов

6.1. Сверхразрешение в классической оптике

Классический предел разрешения оптических приборов был сформулирован в хорошо известных работах Абба и Рэлея в конце XIX века [1]. Этот классический предел устанавливает, что разрешение оптических систем ограничено дифракцией на зрачке системы. Вследствие дифракции точечный источник на входе системы создает дифракционную картину конечного размера на выходе. Когда два точечных источника размещаются все ближе и ближе друг к другу, дифракционные картины от каждого из них начинают перекрываться, и их все труднее различить. Наименьшее расстояние между двумя точечными источниками на входе системы, которое еще допускает их различимость, зависит от многих факторов и его трудно характеризовать количественно. Было предложено несколько критериев для определения различимости, и наиболее известный из них — это классический критерий Рэлея. Согласно этому критерию дифракционные картины двух точечных источников считаются предельно разрешимыми, если центральный максимум одной из них совпадает с первым минимумом другой. Для случая дифракционной картины Айри, соответствующей дифракции Фраунгофера излучения точечного источника на круглом отверстии, этот критерий определяет наименьшее расстояние между двумя точечными источниками на входе равным $R = 0,61\lambda/\alpha$, где λ — длина волны света, α — отношение радиуса зрачка системы к расстоянию от зрачка до плоскости изображения. Расстояние R называют предельным разрешением Рэлея.

Как следует из сказанного, классический предел разрешения Рэлея основывается на простом визуальном наблюдении и подразумевает разрешающую способность человеческого глаза. Он не является фундаментальным физическим пределом, как, например, скорость света или соотношение неопределенности Гейзенберга. В настоящее время общепризнанно, что современные ССД-камеры позволяют существенно превзойти пределы визуального наблюдения. Например, были выполнены эксперименты по измерению смещений в нанометровом диапазоне, позволившие определить преломление в стекловолокне [2–4], исследования микроскопических фазовых объектов [5], движения биологических внутриклеточных везикул [6], измерения сверхслабого поглощения, используя эффект миража [7], и проведены эксперименты в атомной силовой микроскопии [8]. Во всех этих измерениях разрешение

превышает классический рэлеевский предел и определяется не дифракцией, а различными видами флуктуаций, присутствующими в экспериментах. Улучшенное разрешение, превышающее дифракционный предел, обычно называют «сверхразрешением», и часто придают этому термину различный смысл. Ниже мы дадим точное определение понятия *сверхразрешение*, в том значении, в котором будем использовать его в этой главе.

В современной классической оптике разрешение оптической системы принято характеризовать не двухточечным рэлеевским критерием, а в терминах пространственной полосы пропускания этой системы. Типичная оптическая система имеет конечную полосу пространственных частот, которые могут пройти через систему, вплоть до некоторой критической частоты, зависящей от размера зрачка системы. При этом говорят, что такая оптическая система ограничена по полосе пропускания или, иначе, дифракционно-ограничена, поскольку именно дифракционные эффекты на ее зрачке ответственны за конечное разрешение.

Когерентная дифракционно-ограниченная отображающая система в классической оптике описывается линейным уравнением, связывающим комплексную амплитуду $e(s)$ изображения с комплексной амплитудой $a(s)$ входного объекта [9]:

$$e(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s, s') a(s') ds', \quad (6.1)$$

Функция импульсного отклика $h(s, s')$, возникающая в этом интегральном уравнении, представляет изображение в точке s в плоскости изображения от точечного источника в точке s' объектной плоскости. Если система трансляционно инвариантна или изопланарна, импульсный отклик зависит только от разности $s - s'$ и интеграл в (6.1) становится сверткой:

$$e(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s - s') a(s') ds'. \quad (6.2)$$

В оптике импульсный отклик $h(s - s')$ обычно называется *функцией рассеяния точки* (ФРТ) системы, а его фурье-образ — *передаточной функцией* (ПФ) или коэффициентом передачи. Для ограниченных по полосе пропускания оптических систем передаточная функция равна нулю вне полосы пропускания системы. *Сверхразрешение* определяют как метод восстановления пространственных частот объекта вне полосы пропускания или, другими словами, увеличение разрешения выше дифракционного предела [9]. Важно подчеркнуть, что в том случае, когда поле объекта и поле изображения связаны с помощью свертки (6.2), сверхразрешение в указанном смысле невозможно. Для того чтобы достичь сверхразрешения необходимо обладать некой априорной информацией о входном объекте. В этой главе в качестве такой информации мы будем предполагать, что объект имеет конечный размер. В этом случае пространственный спектр Фурье объекта является целой аналитической функцией, и, следовательно, может быть полностью определен

путем аналитического продолжения той части спектра, которая прошла через зрачок системы [10, 11]. Такая экстраполяция пространственного спектра объекта за пределы полосы пропускания эквивалентна увеличению разрешения выше предела Рэля. Эта идея сверхразрешения родилась в 1960-х годах и активно обсуждалась в литературе [10–16].

Однако стало ясно, что такое аналитическое продолжение пространственного спектра объекта крайне чувствительно к наличию шумов в системе. Фактически, проблема экстраполяции пространственного спектра за пределы полосы пропускания является типичным случаем так называемых «некорректно поставленных задач» [17]. Это обстоятельство серьезно затрудняет потенциальные возможности сверхразрешения. Практически, для того чтобы достичь сверхразрешения необходимо измерить дифракционно-ограниченное изображение на выходе оптической системы и затем пытаться восстановить исходный объект, используя специально разработанные численные алгоритмы. В общем случае попытка получить существенное сверхразрешение выше рэлеевского предела приводит к резкому уменьшению отношения сигнал-шум в восстанавливаемом объекте по сравнению со значением этой величины в исходном объекте. Главные выводы, которые можно сделать из ряда работ, посвященных классическому сверхразрешению, сводятся к следующему [9]:

1) Существенное сверхразрешение в смысле экстраполяции за пределы полосы пропускания возможно только в том случае, когда размер исходного объекта не слишком велик по сравнению с пределом разрешения Рэля.

2) Количественно сверхразрешение растет с увеличением отношения сигнала к шуму в исходном объекте логарифмически, т. е. достаточно медленно.

6.2. Квантовая теория сверхразрешения

Этот и следующие разделы основываются на работах [18, 19], где развита квантовая теория оптического сверхразрешения. Мы отсылаем читателя к этим статьям для более детального изучения.

6.2.1. Квантовая теория оптических изображений. Сперва мы сделаем обзор классической теории оптических изображений и введем базисные функции и физические параметры, которые будут использованы при построении квантовой теории.

Оптическая схема дифракционно-ограниченного когерентного оптического изображения показана на рис. 6.1. Для упрощения мы рассмотрели одномерный случай. Объект конечного размера X находится в объектной плоскости. Первая линза L_1 осуществляет пространственное фурье-преобразование объекта в плоскости зрачка; зрачок имеет конечный размер d . Дифракция на этом зрачке и является физическим источником конечного разрешения в нашей схеме (мы пренебрегаем дифракцией на линзах). Вторая линза L_2 осуществляет обратное фурье-преобразование и создает дифракционно-ограниченное изображение в плоскости изображения.

Как было сказано выше, для того чтобы достичь сверхразрешения необходимо иметь некоторую априорную информацию об объекте. В нашем случае мы знаем априори, что объект сосредоточен в области размера X и равен

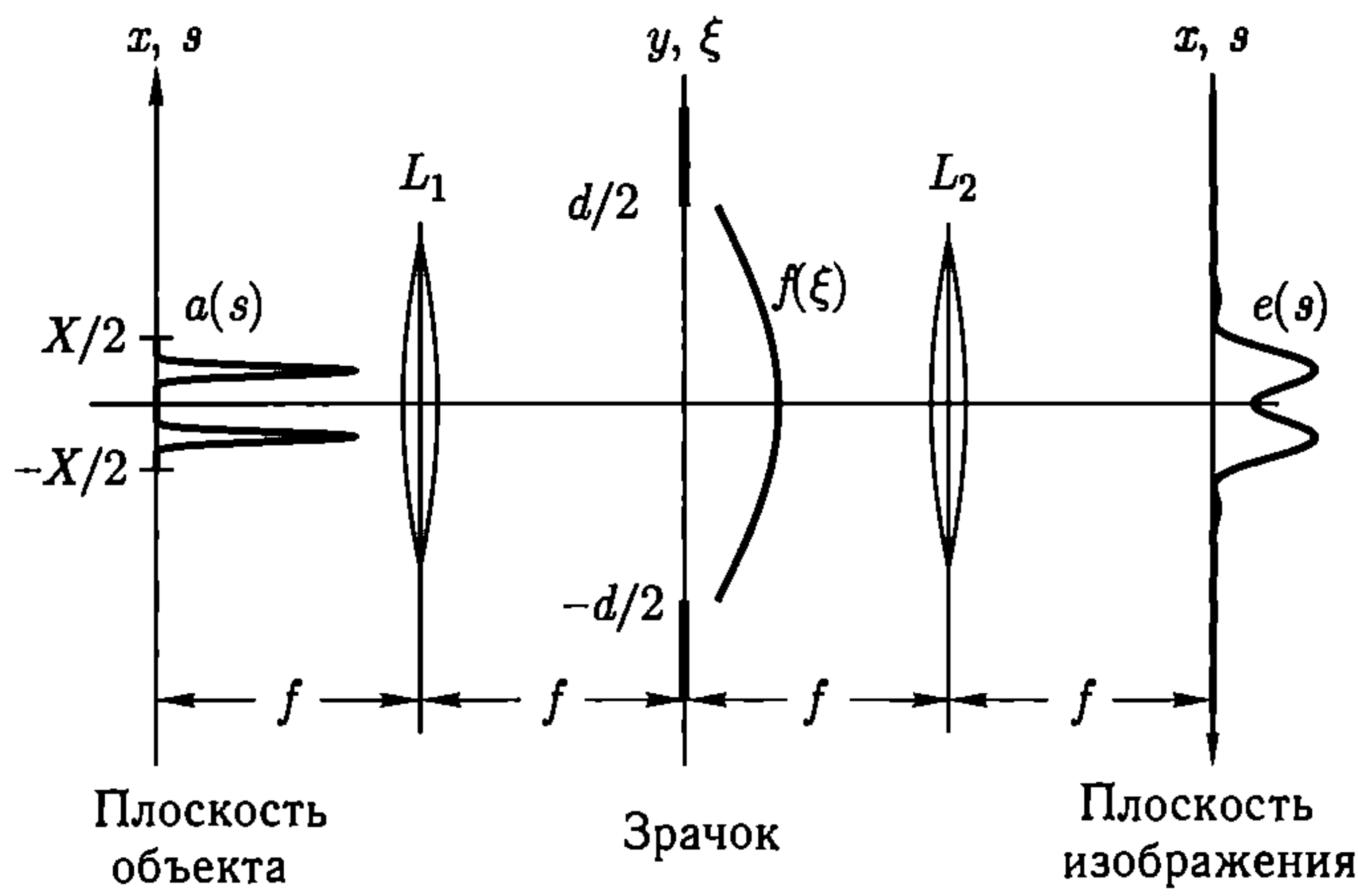


Рис. 6.1. Оптическая схема одномерного когерентного дифракционно-ограниченного оптического изображения

нулю за пределами этой области. Пространственное фурье-преобразование такого объекта является целой аналитической функцией. Следовательно, зная часть фурье-спектра в области d зрачка, можно построить аналитическое продолжение всего спектра и, значит, получить неограниченное разрешение.

Введем безразмерные координаты в плоскости объекта и изображения, $s = 2x/X$, а также в плоскости зрачка, $\xi = 2y/d$ (см. рис. 6.1). В безразмерных координат s преобразование L классической амплитуды объекта $a(s)$ в классическую амплитуду изображения $e(s)$ дается выражением:

$$e(s) = (La)(s) = \int_{-1}^1 \frac{\sin [c(s - s')]}{\pi(s - s')} a(s') ds', \quad -\infty < s < \infty. \quad (6.3)$$

Здесь $c = \frac{\pi dX}{2\lambda f}$ — произведение пространственных полос пропускания.

Задача восстановления объекта $a(s)$ с помощью измеренного изображения $e(s)$ в отсутствии шума сводится к обращению интегрального оператора L . Оператор L^* , сопряженный к L , имеет вид [20]:

$$(L^*f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[c(s - s')]}{\pi(s - s')} f(s') ds', \quad |s| \leq 1. \quad (6.4)$$

Произведение $A = L^*L$ — самосопряженный оператор:

$$(Af)(s) = \int_{-1}^1 \frac{\sin[c(s - s')]}{\pi(s - s')} f(s') ds', \quad |s| \leq 1, \quad (6.5)$$

который исследовали Слепян и Поллак [21]. Ортонормированная система собственных функций оператора A имеет вид:

$$\varphi_k(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \psi_k(s), & |s| \leq 1, \\ 0, & |s| > 1, \end{cases} \quad (6.6)$$

где $\psi_k(s)$ — линейные вытянутые сфероидальные функции [16, 21], а λ_k — соответствующие собственные значения. Функции $\varphi_k(s)$ составляют базис в пространстве $L^2(-1, 1)$ и могут рассматриваться как «элементы информации» входного объекта. Собственные значения λ_k — это бесконечный набор положительных чисел, принимающих реальные значения и подчиняющихся неравенствам $1 \geq \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > 0$. Для малых k значения λ_k медленно убывают с индексом k вплоть до критического значения индекса $k = S$, называемого числом Шеннона:

$$S = \frac{2c}{\pi} = \frac{dX}{\lambda f}, \quad (6.7)$$

выше которого λ_k быстро сходятся к нулю.

Используя свойства вытянутых сфероидальных функций,

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin[c(s-s')]}{\pi(s-s')} \psi_k(s') ds' = \lambda_k \psi_k(s), \quad (6.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[c(s-s')]}{\pi(s-s')} \psi_k(s') ds' = \psi_k(s), \quad (6.9)$$

получаем:

$$L\varphi_k = \sqrt{\lambda_k} \psi_k, \quad L^* \psi_k = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k. \quad (6.10)$$

Раскладывая амплитуду объекта в ряд по функциям $\varphi_k(s)$ и амплитуду изображения — по функциям $\psi_k(s)$, нетрудно установить связь между коэффициентами разложения объекта и изображения. Действительно, поскольку функции $\varphi_k(s)$ образуют полный ортонормированный набор на интервале $[-1, 1]$, можно выразить амплитуду объекта как

$$a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(s), \quad |s| \leq 1, \quad (6.11)$$

где коэффициенты a_k имеют вид:

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} a(s) \varphi_k(s) ds. \quad (6.12)$$

Аналогичное разложение можно записать и для амплитуды изображения через функции $\psi_k(s)$:

$$e(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \psi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \quad (6.13)$$

где коэффициенты e_k имеют вид:

$$e_k = \int_{-\infty}^{\infty} e(s) \psi_k(s) ds. \quad (6.14)$$

Подставляя эти разложения в (6.3) и учитывая первое из соотношений (6.10), получим следующее соотношение между a_k и e_k :

$$e_k = \sqrt{\lambda_k} a_k. \quad (6.15)$$

В квантовой теории классическая амплитуда объекта $a(s)$ становится безразмерным оператором уничтожения фотонов в объектной плоскости $\hat{a}(s)$, а классическая амплитуда изображения — соответствующим оператором уничтожения фотонов в плоскости изображения $\hat{e}(s)$. Эти операторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}(s), \hat{a}^\dagger(s')] = \delta(s - s'), \quad [\hat{e}(s), \hat{e}^\dagger(s)] = \delta(s - s'), \quad (6.16)$$

и нормированы таким образом, что $\langle \hat{a}^\dagger(s) \hat{a}(s) \rangle$ имеет смысл среднего числа фотонов на единицу безразмерной длины в объектной плоскости, а $\langle \hat{e}^\dagger(s) \hat{e}(s) \rangle$ — в плоскости изображения.

В квантовой теории мы можем по-прежнему использовать разложения (6.11) и (6.13), понимая теперь под коэффициентами разложения a_k и e_k операторы уничтожения фотонов $\hat{a}_k$ и $\hat{e}_k$. Используя свойства вытянутых сфероидальных функций, можно показать, что операторы $\hat{a}_k$ в объектной плоскости удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0. \quad (6.17)$$

Такие же коммутационные соотношения должны быть выполнены для операторов уничтожения фотонов $\hat{e}_k$ в плоскости изображения. Однако, соотношение (6.15) не сохраняет коммутационных соотношений (6.17). Причина этого состоит в том, что уравнение классического изображения (6.3) учитывает только ненулевые амплитуды поля в интервале $|s| \leq 1$ объектной плоскости. Остальная часть этой плоскости $|s| > 1$ игнорируется, поскольку там классическая амплитуда поля равна нулю. В квантовой теории эта область должна приниматься во внимание, для того чтобы обеспечить сохранение коммутационных соотношений.

Чтобы получить каноническое преобразование для операторов рождения и уничтожения фотонов из объектной плоскости в плоскость изображения,

нам следует разделить координатную ось s на два интервала: «центр», $|s| \leq 1$, соответствующий области локализации классического объекта, и «крылья», $|s| > 1$, вне этой области. Ортонормированный базис в этих областях объектной плоскости имеет вид [18]:

$$\varphi_k(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \psi_k(s) & \text{при } |s| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |s| > 1, \end{cases} \quad \chi_k(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } |s| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} \psi_k(s) & \text{при } |s| > 1. \end{cases} \quad (6.18)$$

Можно записать операторы уничтожения в объектной плоскости в базисе двух введенных наборов $\{\varphi_k(s)\}$ и $\{\chi_k(s)\}$:

$$\hat{a}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k \varphi_k(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{b}_k \chi_k(s). \quad (6.19)$$

Здесь $\hat{b}_k$ — операторы уничтожения фотонов в вытянутых модах χ_k на крыльях координатной оси, которые выражаются через полевые операторы $\hat{a}(s)$ следующим образом:

$$\hat{b}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(s) \chi_k(s) ds. \quad (6.20)$$

Подставляя разложение (6.19) в (6.3) получаем связь между операторами уничтожения в плоскости объекта и изображения:

$$\hat{e}_k = \sqrt{\lambda_k} \hat{a}_k + \sqrt{1-\lambda_k} \hat{b}_k. \quad (6.21)$$

Нетрудно проверить, что это преобразование сохраняет коммутационные соотношения для операторов, $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = [\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] = [\hat{e}_k, \hat{e}_l^\dagger] = \delta_{kl}$.

Выражение (6.21) полностью эквивалентно преобразованию на светоделительной пластинке. В самом деле, если рассматривать операторы уничтожения фотонов в модах, определяемых вытянутыми сфероидальными волнами $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$, как поля на входе светоделителя с амплитудными коэффициентами пропускания $\sqrt{\lambda_k}$ и коэффициентами отражения $\sqrt{1-\lambda_k}$, то $\hat{e}_k$ будет соответствовать оператору уничтожения фотонов в k -й моде прошедшей волны.

Из рис. 6.1 можно предположить, что вакуумные флуктуации, приходящие в плоскость изображения из области фурье-плоскости вне зрачка системы, $|\xi| > 1$, следует также учитывать. Действительно, если мы представляем поле в фурье-плоскости в виде оператора, то мы обязаны учесть вклады от этих участков в результирующее поле в плоскости изображения. Однако, преимущество разложения (6.13) состоит в том, что поле от этих участков не вносит вклада в коэффициенты разложения $\hat{e}_k$ изображения, поскольку оно ортогонально вытянутым сфероидальным волновым функциям. Это свойство было отмечено Бертеро и Пайком в [20] для классического шума вне полосы пропускания, и остается в силе в квантовой теории.

6.2.2. Квантовая теория оптической фурье-микроскопии. Можно разложить входной объект и выходное изображение по введенным собственным функциям и получить связь между коэффициентами разложения. Затем, измеряя изображение на выходе с помощью, например, чувствительной ССД-камеры, можно вычислить коэффициенты разложения изображения. Используя связь между коэффициентами разложения изображения и объекта, можно восстановить объект с разрешением лучше классического дифракционного предела.

Численное моделирование, выполненное нами в [23], показало, однако, что для расчета коэффициентов разложения необходимо производить измерение выходного изображения в нереально большой области плоскости изображения вследствие осцилляций, характерных для вытянутых функций. В связи с этим в [22] мы предложили измененный вариант схемы, в котором ССД-камера расположена не в плоскости изображения, а в плоскости зрачка, и измеряемой величиной является пространственный фурье-спектр. Мы назвали эту модифицированную схему сверхразрешающей фурье-микроскопией. Преимущество этой установки состоит в том, что теперь пространственный фурье-спектр измеряется в конечной области, ограниченной размерами зрачка. Для того чтобы оценить влияние квантовых флуктуаций на разрешение фурье-микроскопии, нам необходимо сформулировать квантовую теорию для модифицированной схемы.

Обозначим через $\hat{f}(\xi)$ и $\hat{f}^\dagger(\xi)$ соответственно безразмерные операторы уничтожения и рождения фотонов в плоскости зрачка. Эти операторы подчиняются стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{f}(\xi), \hat{f}^\dagger(\xi')] = \delta(\xi - \xi'), \quad (6.22)$$

и нормированы так, что $\langle \hat{f}^\dagger(\xi) \hat{f}(\xi) \rangle$ имеет смысл среднего числа фотонов, приходящихся на единицу безразмерной длины в плоскости зрачка. Пространственное преобразование Фурье $(T\hat{a})(\xi)$, выполняемое линзой L_1 , можно выразить через эти безразмерные переменные:

$$\hat{f}(\xi) = (T\hat{a})(\xi) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(s) e^{-ics\xi} ds. \quad (6.23)$$

Важно отметить, что пределы интегрирования в этом выражении покрывают всю объектную плоскость, поскольку речь идет об операторах, а не о классических c -числовых величинах.

Мы можем записать операторы уничтожения в плоскости зрачка через два набора функций $\{\varphi_k(s)\}$ and $\{\chi_k(s)\}$:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k \chi_k(\xi). \quad (6.24)$$

Здесь $\hat{f}_k$ — это операторы уничтожения фотонов в вытянутых сфероидальных модах φ_k для центральной части плоскости зрачка, а $\hat{g}_k$ — операторы уничтожения фотонов в вытянутых модах χ_k на крыльях плоскости.

В нашем расчете мы будем применять следующие свойства вытянутых сфероидальных функций [16]:

$$\int_{-1}^1 \varphi_k(s) e^{-ics\xi} ds = (-i)^k \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \psi_k(\xi), \quad (6.25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(s) e^{-ics\xi} ds = (-i)^k \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \varphi_k(\xi), \quad (6.26)$$

Используя преобразования поля (6.23) из объектной плоскости в плоскость зрачка, с учетом (6.18) и свойства (6.25), (6.26), находим следующие функции распространения для центра и крыльев световой волны:

$$(T\varphi_k)(\xi) = (-i)^k [\sqrt{\lambda_k} \varphi_k(s) + \sqrt{1 - \lambda_k} \chi_k(s)], \quad (6.27)$$

$$(T\chi_k)(\xi) = (-i)^k [\sqrt{1 - \lambda_k} \varphi_k(s) - \sqrt{\lambda_k} \chi_k(s)]. \quad (6.28)$$

Подставляя (6.19) и (6.24) в преобразование поля (6.23) и учитывая (6.27) и (6.28), приходим к следующим соотношениям между операторами уничтожения фотонов в вытянутых модах в плоскости объекта и зрачка:

$$\hat{f}_k = (-i)^k (\sqrt{\lambda_k} \hat{a}_k + \sqrt{1 - \lambda_k} \hat{b}_k), \quad (6.29)$$

$$\hat{g}_k = (-i)^k (\sqrt{1 - \lambda_k} \hat{a}_k - \sqrt{\lambda_k} \hat{b}_k). \quad (6.30)$$

Эти соотношения аналогичны преобразованию, осуществляемому светоделительной пластинкой с амплитудными коэффициентами пропускания $(-i)^k \sqrt{\lambda_k}$ и коэффициентами отражения $(-i)^k \sqrt{1 - \lambda_k}$, и сохраняют коммутационные соотношения операторов рождения и уничтожения в плоскости зрачка.

Предположим, что мы имеем возможность измерять пространственные фурье-амплитуды $\hat{f}(\xi)$ в плоскости зрачка в пределах области пропускания зрачка, используя чувствительную CCD-камеру. Эта прошедшая часть пространственного фурье-спектра соответствует первой сумме выражения (6.24); часть, отвечающая второй сумме, поглотилась непрозрачной частью зрачка. Следует подчеркнуть, что, поскольку нам необходимо знать комплексные амплитуды поля, а не их интенсивности, нужно использовать схему гомодинного детектирования. Используя (6.24), (6.20) и (6.29), можно рассчитать операторные значения коэффициентов $\hat{a}_k^{(r)}$ восстановленного объекта:

$$\hat{a}_k^{(r)} = \frac{\hat{f}_k}{(-i)^k \sqrt{\lambda_k}} = \hat{a}_k + \sqrt{\frac{1 - \lambda_k}{\lambda_k}} \hat{b}_k, \quad (6.31)$$

где верхний индекс (r) означает, что данные величины «реконструированы». Как следует из (6.31), восстановление входного объекта не точное из-за на-

личия второго слагаемого в этом выражении. Этот член содержит операторы уничтожения фотонов $\hat{b}_k$, отвечающие вакуумным флуктуациям электромагнитного поля в области вне объекта. Важно отметить, что эти вакуумные флуктуации препятствуют восстановлению все более и более «старших» коэффициентов $\hat{a}_k$ объекта из-за наличия множителя $\sqrt{(1 - \lambda_k)/\lambda_k}$. Действительно, после достижения индексом k некоторого критического значения, собственные числа λ_k быстро становятся очень малыми. Это приводит к резкому «усилению» роли вакуумных флуктуаций в реконструированном объекте, что ограничивает число коэффициентов восстановления $\hat{a}_k$.

6.3. Квантовые ограничения при восстановлении оптических объектов

6.3.1. Восстановление классических не шумящих объектов. В этом разделе мы численно проиллюстрируем роль квантовых флуктуаций в реконструкции простого объекта со сверхразрешением выше классического дифракционного предела. Однако, до того как мы будем учитывать квантовые флуктуации света во входном объекте, продемонстрируем сначала потенциальные возможности техники сверхразрешения с помощью вытянутых сфероидальных функций на примере восстановления не шумящего классического объекта, т. е. в пренебрежении квантовыми флуктуациями. Этот случай соответствует классическому пределу квантовой теории, развитой в предыдущем разделе, и может быть получен просто при рассмотрении средних значений операторов.

Ниже мы будем обозначать классические комплексные амплитуды, отвечающие квантово-механическим операторам, теми же буквами, но без «шляпок». Например, $a(s) = \langle \hat{a}(s) \rangle$, $a_k = \langle \hat{a}_k \rangle$ и т. д. Поскольку классическая комплексная амплитуда объекта равна нулю вне интервала $|s| \leq 1$, то $\langle \hat{b}_k \rangle = 0$. Применяя разложение (6.19), можно записать классическую амплитуду как:

$$a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(s). \quad (6.32)$$

Классическая комплексная амплитуда $f(\xi)$ поля в плоскости зрачка получается из (6.23):

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^1 a(s) e^{-ics\xi} ds, \quad (6.33)$$

где пределы интегрирования охватывают лишь область локализации объекта, $|s| \leq 1$. Принимая во внимание свойство вытянутых функций (6.25), можем записать пространственный фурье-спектр $f(\xi)$ в виде следующего разложения:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k a_k \psi_k(s), \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (6.34)$$

Этот пространственный фурье-спектр объекта распространяется шире области пропускания зрачка $|\xi| \leq 1$. Пространственные фурье-компоненты в непрозрачной области поглощаются и не могут быть измерены CCD-камерой, помещенной в плоскости зрачка. При сверхразрешении пытаются реконструировать эти поглощенные фурье-компоненты. Из выражения (6.31) мы получаем классические восстановленные коэффициенты:

$$a_k^{(r)} = a_k. \quad (6.35)$$

Поскольку мы пренебрегли квантовыми флуктуациями, восстановленные коэффициенты совпадают с коэффициентами разложения объекта на входе. Классическую амплитуду реконструированного объекта $a^{(r)}(s)$ можно записать в виде следующего разложения по вытянутым сфероидальным функциям:

$$a^{(r)}(s) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k \varphi_k(s). \quad (6.36)$$

Поскольку на практике невозможно рассчитать бесконечное число коэффициентов a_k , мы ограничили суммирование в этом разложении первыми L вытянутыми функциями. При $L \rightarrow \infty$ реконструированный объект стремится к точному, $a^{(r)}(s) \rightarrow a(s)$. Практически сверхразрешение выше рэлеевского предела определяется числом L членов разложения, используемых для восстановления объекта в (6.36).

Наряду с задачей реконструкции объекта, можно поставить вопрос о восстановлении его пространственного фурье-спектра:

$$f^{(r)}(\xi) = \sum_{k=0}^{L-1} (-i)^k a_k \psi_k(s), \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (6.37)$$

Аналогично реконструкции объекта, при $L \rightarrow \infty$ восстановленный спектр стремится к точному, $f^{(r)}(\xi) \rightarrow f(\xi)$.

Для численного моделирования мы выбрали простой объект, состоящий из двух узких гауссовых пиков,

$$a(s) = A \left[\exp \left(-\frac{(s - s_0)^2}{2\sigma^2} \right) + \exp \left(-\frac{(s + s_0)^2}{2\sigma^2} \right) \right], \quad |s| \leq 1, \quad (6.38)$$

шириной σ , отстоящих друг от друга на расстояние $2s_0$. Мы взяли значения параметров $2s_0 = 1$ и $\sigma = 0,1$, так что пики хорошо разделены во входной плоскости. Нормировочная константа A выбрана так, чтобы интеграл от интенсивности объекта по всей его области локализации был равен среднему полному числу фотонов $\langle \hat{N} \rangle$ в объекте:

$$\int_{-1}^1 a^2(s) ds = \langle \hat{N} \rangle. \quad (6.39)$$

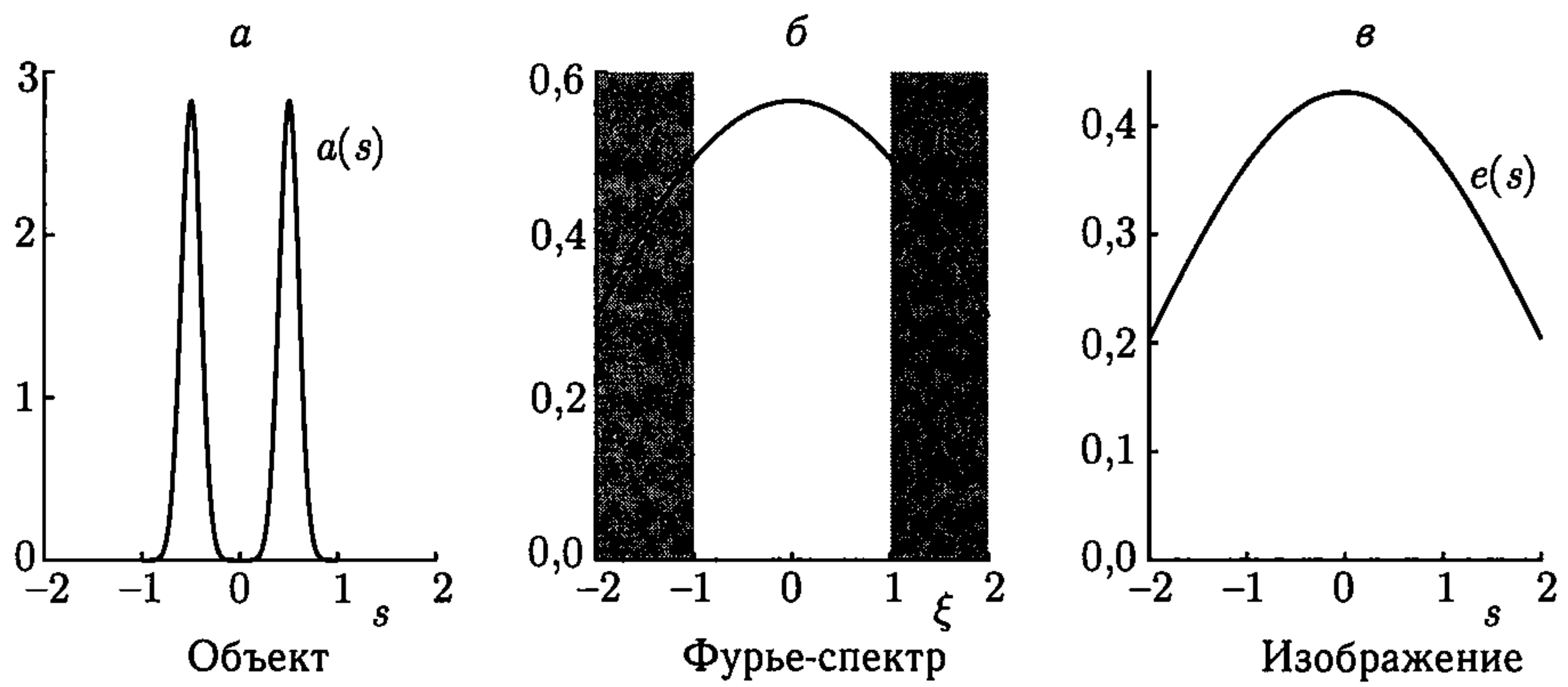


Рис. 6.2. Объект $a(s)$ в виде двойного пика, используемый при численном моделировании (а), его пространственный спектр Фурье $f(\xi)$ в плоскости зрачка (б), и изображение $e(s)$, получающееся в плоскости изображения (в). Серые области отмечают пространственный спектр, поглощаемый непрозрачной частью зрачка

Предельное расстояние рэлеевского разрешения $R = \pi X/(2c)$ в безразмерных координатах s равно π/c , где c — произведение пространственных полос пропускания. При численном моделировании мы полагали $c = 1$. В этом случае при $2s_0 < \pi$ мы находимся выше рэлеевского предела.

На рис. 6.2, а построен нормированный объект на входе $a(s)/\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}$, на рис. 6.2, б приведен его пространственный спектр Фурье $f(\xi)$ в плоскости зрачка, а на рис. 6.2, в — выходное изображение $e(s)$ в плоскости изображения. Сравнивая входной объект с изображением, ясно видно, что в соответствии с критерием Рэля два гауссовых пика в плоскости изображения неразрешимы. На рис. 6.2, б серым цветом выделена непрозрачная часть зрачка. Часть пространственного фурье-спектра объекта в этой области поглощается и, следовательно, не может быть измерена CCD-камерой, помещенной в плоскость зрачка. Ниже мы проиллюстрируем реконструкцию этих поглощенных фурье-компонент с помощью метода вытянутых сфероидальных функций.

Для численного моделирования нам необходимо рассчитать два набора вытянутых сфероидальных функций: $\varphi_k(s)$, определенные в интервале $|s| \leq 1$, и $\psi_k(s)$, определенные для всех s , $-\infty < s < \infty$. Первый набор необходим для разложения входного объекта $a(s)$, а второй — для восстановления пространственного фурье-спектра $f^{(r)}(\xi)$. Для численных расчетов $\varphi_k(s)$ мы использовали алгоритм, разработанный в [24]. Согласно этому алгоритму, вытянутые сфероидальные функции $\varphi_k(s)$ представляются в виде ряда по полиномам Лежандра $P_k(s)$:

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \sqrt{k + \frac{1}{2}} P_k(s), \quad |s| \leq 1. \quad (6.40)$$

Коэффициенты $\gamma_k^{(n)}$ ищутся как собственные вектора симметричной матрицы A , имеющей следующие ненулевые элементы:

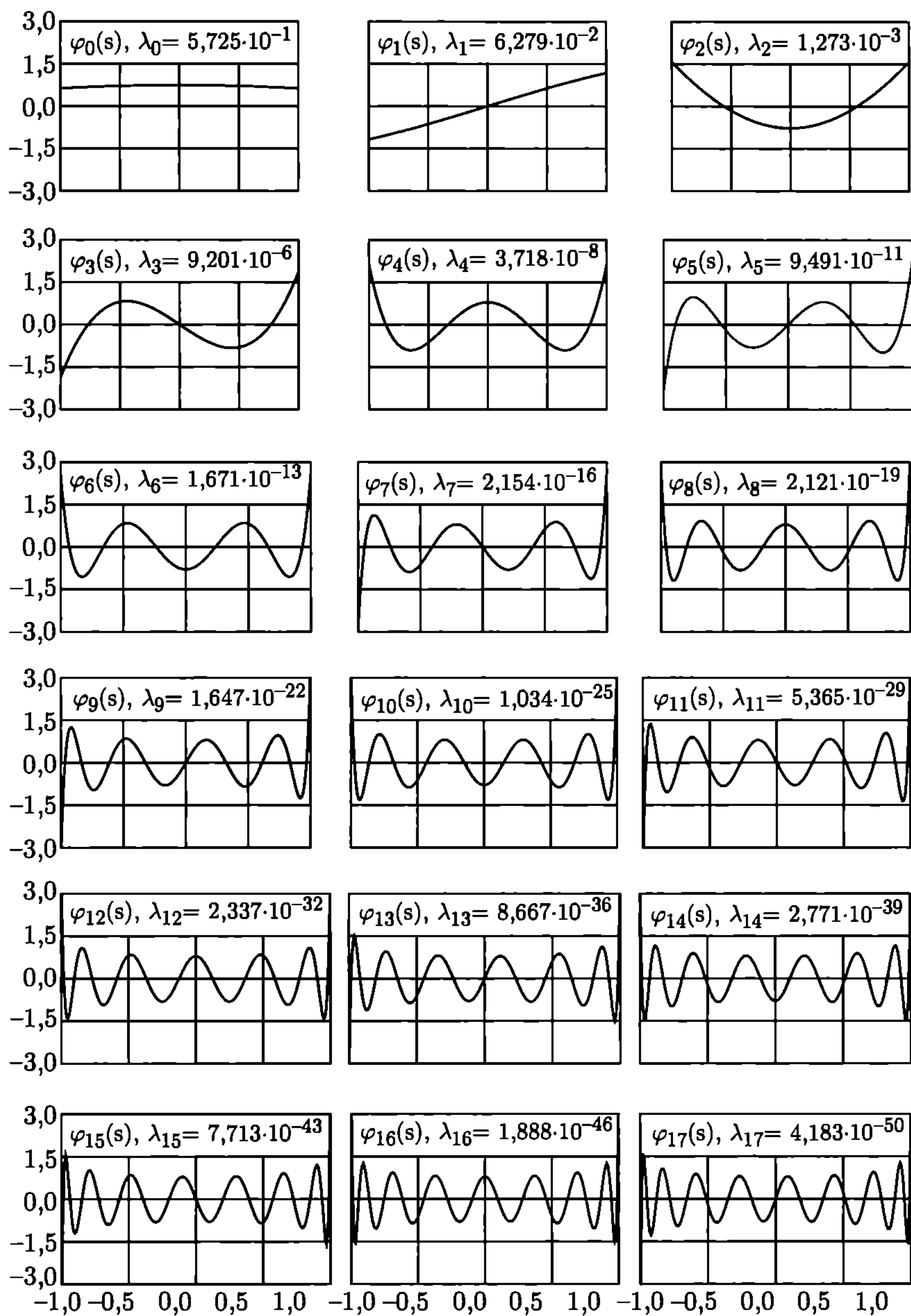


Рис. 6.3. Примеры вытянутых сфероидальных функций $\varphi_k(s)$ и отвечающих им собственных значений λ_k , рассчитанных с помощью нашей численной программы

$$A_{k,k} = k(k+1) + c^2 \frac{2k(k+1) - 1}{(2k+3)(2k-1)}, \quad (6.41)$$

$$A_{k,k+2} = A_{k+2,k} = c^2 \frac{(k+2)(k+1)}{(2k+3)\sqrt{(2k+1)(2k+5)}}, \quad (6.42)$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$

Мы написали программу в пакете для численных расчетов «Математика», которая реализует этот алгоритм. Преимуществом этого метода является то, что при его реализации не требуется прямое решение задачи на собственные значения и собственные функции λ_k и $\varphi_k(s)$, неустойчивой из-за быстрого убывания собственных значений. Этот алгоритм позволил нам при $c = 1$ рассчитать как минимум 17 первых вытянутых сфероидальных функций, несмотря на быстрое убывание собственных значений функций высокого порядка (например, $\lambda_{17} = 4,183 \cdot 10^{-50}$). На рис.6.3 представлены первые 17 вытянутых сфероидальных функций $\varphi_k(s)$, построенных с помощью нашего численного алгоритма.

Для численных расчетов второго набора вытянутых сфероидальных функций $\psi_k(s)$ мы использовали следующее свойство полиномов Лежандра (см. (10.1.14) в [25]):

$$\int_{-1}^1 P_n(s) e^{-ics\xi} ds = 2i^n j_n(\xi), \quad (6.43)$$

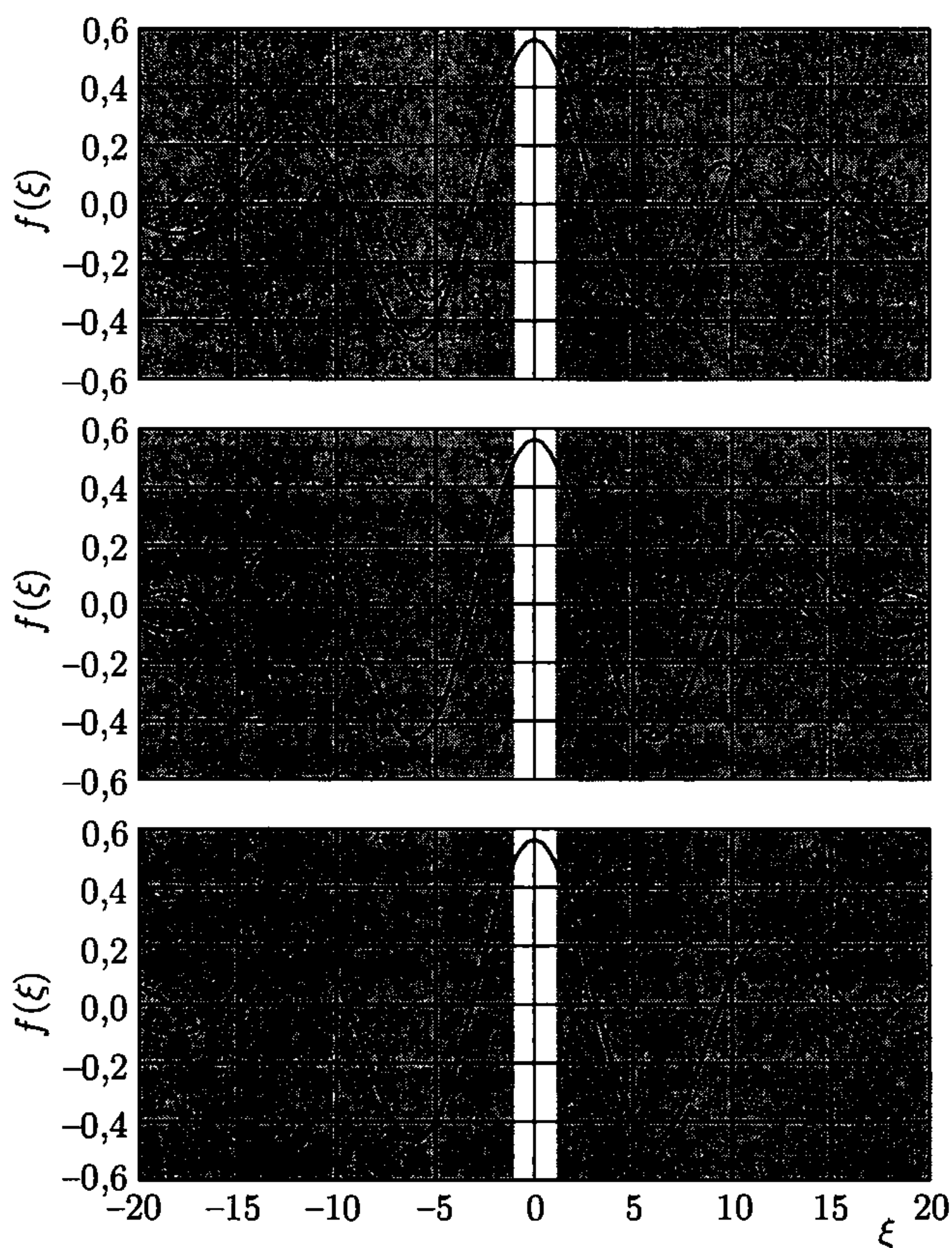


Рис. 6.4. Точный пространственный спектр объекта, изображенного на рис.6.2, *a* (сплошная линия) и спектр, реконструированный с $L = 5, 7$ и 11 вытянутыми сфероидальными функциями (пунктирная линия). Здесь и на рис.6.5 серым цветом отмечены поглощенные области пространственного спектра

где $j_n(s)$ — сферические функции Бесселя первого порядка [25]. Применяя это соотношение, нетрудно получить следующее представление для $\psi_n(\xi)$:

$$\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{2c}{\pi}} i^n \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \gamma_k^{(n)} \sqrt{k + \frac{1}{2}} j_k(c\xi), \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (6.44)$$

Мы представили результат восстановления пространственного фурье-спектра входного объекта на рис. 6.4. На этом рисунке мы показали точный пространственный фурье-спектр входного объекта (сплошная линия) в зависимости от безразмерной координаты ξ в плоскости зрачка. Только часть спектра, попадающая в область пропускания зрачка, $|\xi| \leq 1$, проходит в плоскость изображения. Пространственные фурье-гармоники в непрозрачной области зрачка, отмеченные серым цветом, поглощаются. В этом заключается причина очень большого дифракционного уширения в плоскости изображения, показанного на рис. 6.2, в. Пунктирной линией на рис. 6.4 отмечен пространственный фурье-спектр объекта, восстановленного с помощью $L = 5, 7$ и 11 вытянутых сфероидальных функций. Видно, что восстановленный спектр приближается к точному во все более широкой области пространственных частот $|\xi|$ с увеличением числа вытянутых сфероидальных функций.

При восстановлении с помощью 7 вытянутых сфероидальных функций оба спектра оказываются очень близки друг к другу для значений пространственных частот $|\xi| \leq 8$. Это соответствует сверхразрешению в 8 раз превосходящему предел Рэлея.

6.3.2. Восстановление объектов с квантовыми флуктуациями. Для численного моделирования квантовых флуктуаций мы выбрали s -числовое представление квантово-механических операторов $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ в (6.31), что отвечает антинормальному порядку операторов рождения и уничтожения фотонов. В этом представлении операторы $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ можно заменить на s -числовые гауссовы случайные переменные α_k и β_k соответственно, которые можно записать в виде:

$$\alpha_k = a_k + \delta\alpha_k, \quad \beta_k = \delta\beta_k. \quad (6.45)$$

Здесь $a_k = \langle \hat{a}_k \rangle$ — средние значения коэффициентов разложения поля в области локализации объекта; $\delta\alpha_k$ и $\delta\beta_k$ — флуктуации с гауссовой статистикой. Заметим, что среднее значение $\langle \hat{b}_k \rangle$ равно нулю, потому что компоненты классического поля вне объекта равны нулю. Мы выбрали представление с антинормальным упорядочиванием операторов, поскольку оно остается верным даже в случае многомодового сжатого состояния светового поля на входе схемы.

Введем квадратурные компоненты флуктуаций $\delta\alpha_k$ и $\delta\beta_k$:

$$\delta\alpha_k = \delta X_k^\alpha + i\delta Y_k^\alpha, \quad \delta\beta_k = \delta X_k^\beta + i\delta Y_k^\beta. \quad (6.46)$$

Когда свет на входе схемы находится в когерентном состоянии в области локализации объекта и в вакуумном состоянии вне этой области, корреляци-

онные функции флуктуаций квадратурных компонент равны:

$$\langle \delta X_k^\mu \delta X_{k'}^\mu \rangle = \langle \delta Y_k^\mu \delta Y_{k'}^\mu \rangle = \frac{1}{4} \delta_{kk'}, \quad (6.47)$$

где $\mu = \alpha, \beta$.

Если вместо когерентного света использовать многомодовый сжатый свет для освещения объекта и многомодовый сжатый вакуум — для «подсветки» пространства вне объекта с последующим гомодинным детектированием в плоскости зрачка, то эти корреляционные функции будут иметь вид:

$$\langle \delta X_k^\mu \delta X_{k'}^\mu \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \delta_{kk'}, \quad \langle \delta Y_k^\mu \delta Y_{k'}^\mu \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \delta_{kk'}, \quad (6.48)$$

где r — параметр сжатия. В этих формулах мы предположили, что входной свет сжат по амплитуде, а для упрощения выбрали одинаковый параметр сжатия для всех существенных мод, присутствующих в разложении реконструированного объекта.

Относительное значение квантовых флуктуаций зависит от отношения сигнал-шум во входном объекте, которое для света в когерентном состоянии определяется средним полным числом фотонов, прошедших через объект за время наблюдения. Например, для лазерного пучка с $\lambda = 1064$ нм и оптической мощностью 1 мВт за время наблюдения 1 мс среднее число фотонов составляет $\langle \hat{N} \rangle = 5,3 \cdot 10^{12}$.

На рис. 6.5, а показан результат восстановления пространственного фурье-спектра объекта, изображенного на рис. 6.2, а, с учетом квантовых флуктуаций когерентного состояния. Точный пространственный фурье-спектр объекта изображен сплошной линией. Как и на рис. 6.4, серым цветом отмечены области поглощения зрачка. Мы использовали для восстановления 7 вытянутых сфероидальных функций и полагали среднее число фотонов входного объекта равным $\langle \hat{N} \rangle = 10^{12}$. Пять тонких линий отвечают пяти случайным гауссовым реализациям квантовых флуктуаций когерентного состояния $\hat{a}_k$ и вакуумных флуктуаций $\hat{b}_k$. Пунктирная линия соответствует спектру, восстановленному с помощью 7 вытянутых сфероидальных функций без учета шума. Можно видеть, что роль квантовых флуктуаций становится тем важнее, чем более высокие пространственные частоты нас интересуют. Чем выше рассматриваемая пространственная частота, тем больше случайные реализации фурье-спектра отклоняются от среднего значения, обозначенного пунктирной линией.

На рис. 6.5, б мы увеличили среднее полное число фотонов, выбрав $\langle \hat{N} \rangle = 10^{13}$. Это соответствует увеличению отношения сигнал-шум во входном объекте и должно приводить к лучшему сверхразрешению. Этот результат продемонстрирован на рис. 6.5, б, где можно видеть, что отклонения случайных реализаций от среднего значения спектра уменьшились по сравнению с рис. 6.5, а.

Тот же результат можно достичь, используя многомодовый сжатый свет вместо того, чтобы увеличивать мощность источника, освещающего объект. Это показано на рис. 6.5, в, где мы использовали $\langle \hat{N} \rangle = 10^{12}$, как и на

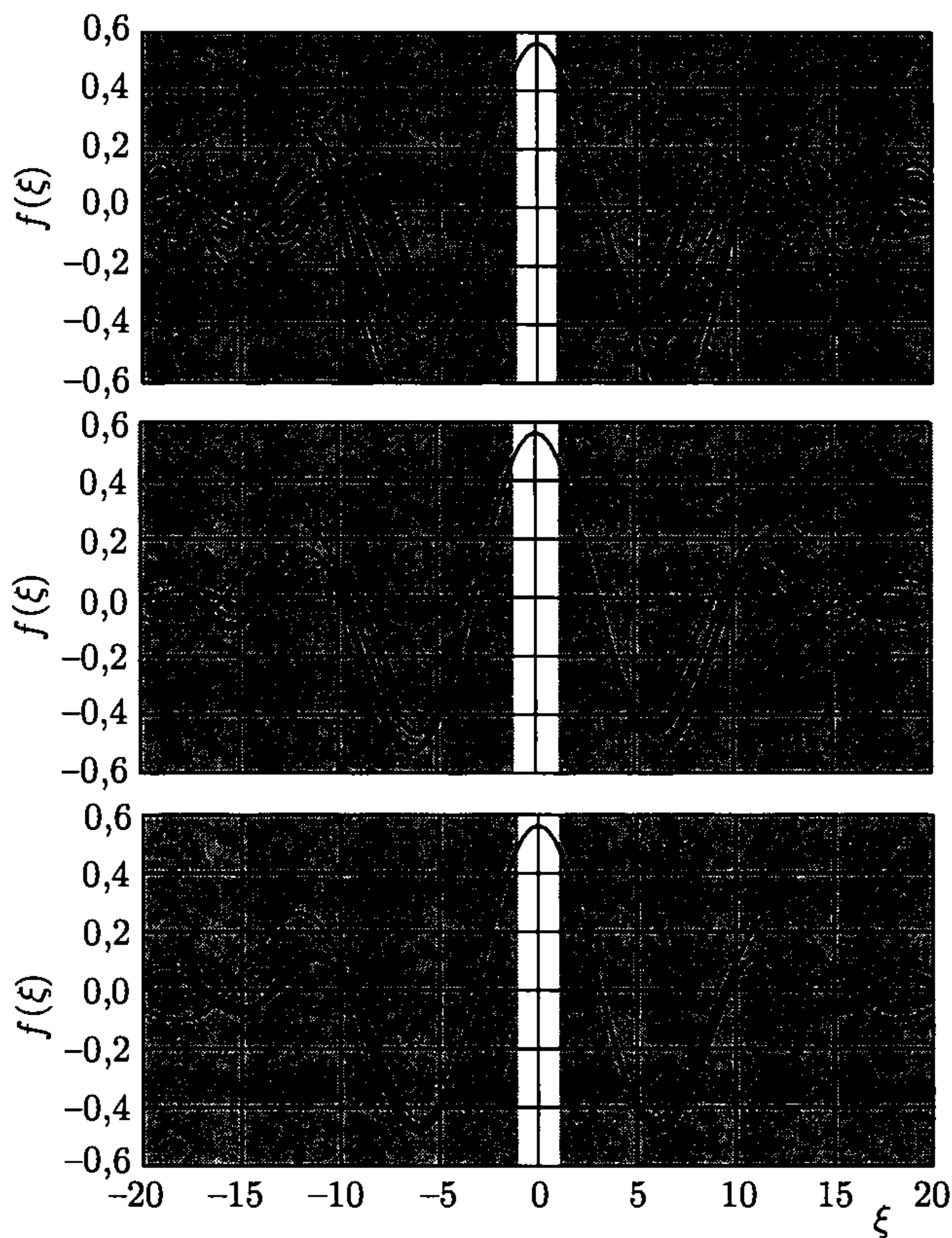


Рис. 6.5. Точный пространственный спектр объекта, изображенного на рис. 6.2, *а* (сплошная линия), спектр, реконструированный с помощью $L = 7$ вытянутых сфероидальных функций (пунктирная линия) и пять случайных гауссовых реализаций спектра, восстановленного с помощью $L = 7$ вытянутых сфероидальных функций (тонкие линии). *а*) Когерентный свет с средним полным числом фотонов $\langle \hat{N} \rangle = 10^{12}$; *б*) когерентный свет с $\langle \hat{N} \rangle = 10^{13}$, *в*) сжатый свет с $\langle \hat{N} \rangle = 10^{12}$ и $\exp(r) = 10$

рис. 6.5, *а*, но рассматривали вместо когерентного состояния свет в многомодовом сжатом состоянии с параметром сжатия $e^r = 10$. В результате флуктуации высоких пространственных частот уменьшились, приводя к лучшему сверхразрешению.

В следующем разделе мы приведем количественную характеристику сверхразрешения как функции отношения сигнала к шуму.

6.3.3. Функция рассеяния точки для сверхразрешающей реконструкции объекта. Для процесса реконструкции объекта мы можем записать соотношение между оператором восстановленного поля $\hat{a}^{(r)}(s)$ и оператором поля объекта $\hat{a}(s)$. Используя операторный эквивалент выражения (6.36) совместно с (6.31), получим следующий результат:

$$\hat{a}^{(r)}(s) = \int_{-1}^1 h^{(r)}(s, s') \hat{a}(s') ds' + \sum_{k=0}^{L-1} \sqrt{\frac{1 - \lambda_k}{\lambda_k}} \hat{b}_k \varphi_k(s). \quad (6.49)$$

Здесь функция реконструкции рассеяния точки (ФРРТ) имеет вид:

$$h^{(r)}(s, s') = \sum_{k=0}^{L-1} \varphi_k(s) \varphi_k(s'). \quad (6.50)$$

Как видно из этого выражения, форма ФРРТ, и, в частности, ее ширина, зависит от числа L членов суммы. Когда это число стремится к бесконечности, $L \rightarrow \infty$, восстановленной ФРРТ сходится к δ -функции:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} h^{(r)}(s, s') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s) \varphi_k(s') = \delta(s - s'), \quad (6.51)$$

что обеспечивает неограниченное сверхразрешение. Однако, эта идеальная ситуация никогда не реализуется на практике из-за второго члена в выражении (6.49), который стремится к бесконечности при $L \rightarrow \infty$. Таким образом, выражение (6.49) наглядно показывает, что главным ограничением сверхразрешения при восстановлении объекта является не дифракция, а квантовые флуктуации света, присутствующие во втором члене.

Число L членов суммы (6.50), определяющее ширину ФРРТ, зависит от отношения сигнал-шум во входном объекте. Для того чтобы получить максимальное L нам следует сравнить отношение сигнал-шум во входном объекте с его значением в восстановленном объекте. Как следует из (6.49), с ростом L отношение сигнал-шум в восстановленном объекте ухудшается. Предположим, что восстановление объекта возможно до тех пор пока отношение сигнал-шум в нем не достигнет единичного значения.

Определим отношение сигнал-шум в объекте на входе следующим образом [26]:

$$R = \frac{\langle \hat{N} \rangle^2}{\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle}, \quad (6.52)$$

где

$$\langle \hat{N} \rangle = \int_{-1}^1 \langle \hat{a}^\dagger(s) \hat{a}(s) \rangle ds \quad (6.53)$$

— среднее полное число фотонов во входном объекте; $\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle$ — дисперсия полного числа фотонов во входном объекте. Аналогично определим отношение сигнал-шум $R^{(r)}$ в восстановленном объекте:

$$R^{(r)} = \frac{\langle \hat{N}^{(r)} \rangle^2}{\langle (\Delta \hat{N}^{(r)})^2 \rangle}, \quad (6.54)$$

где среднее число фотонов в восстановленном объекте можно выразить как:

$$\langle \hat{N}^{(r)} \rangle = \int_{-1}^1 \langle \hat{a}^{(r)\dagger}(s) \hat{a}^{(r)}(s) \rangle ds. \quad (6.55)$$

Ухудшение отношения сигнал-шум в восстановленном объекте можно описать коэффициентом шума (шум-фактором) F :

$$F = R/R^{(r)}, \quad (6.56)$$

который обычно используется для усилителей. Поскольку отношение сигнала к шуму $R^{(r)}$ в восстановленном объекте всегда меньше, чем во входном, коэффициент шума всегда больше единицы. Полагая минимальное значение $R^{(r)}$, позволяющее восстановить объект, равным единице, получим, что максимальное значение коэффициента шума, отвечающее максимальному сверхразрешению, $F_{\max} = R$.

Рассмотрим входной объект в когерентном состоянии, так что $\langle \hat{a}(s) \rangle = a(s)$, $\langle \hat{a}^\dagger(s) \hat{a}(s) \rangle = |a(s)|^2$, $\langle \hat{a}^\dagger(s) \hat{a}^\dagger(s') \hat{a}(s') \hat{a}(s) \rangle = |a(s)|^2 |a(s')|^2$. Нетрудно показать, что в этом случае отношение сигнал-шум R на входе совпадает с средним полным числом фотонов входного объекта:

$$R = \langle \hat{N} \rangle = \int_{-1}^1 |a(s)|^2 ds. \quad (6.57)$$

С другой стороны, для отношения сигнала к шуму $R^{(r)}$ в восстановленном объекте мы получим в этом случае следующий результат:

$$R^{(r)} = \left(\sum_{k=0}^{L-1} |a_k|^2 \right)^2 / \left(\sum_{k=0}^{L-1} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k} \right), \quad (6.58)$$

где a_k — коэффициенты разложения $a^{(r)}(s)$ по вытянутым сфероидальным функциям $\varphi_k(s)$ (см. (6.36)).

Как следует из выражения (6.58), отношение сигнал-шум $R^{(r)}$, а значит, и коэффициент шума F , зависят от формы входного объекта. Для численной оценки степени сверхразрешения как функции среднего полного числа фотонов входного объекта мы взяли узкий прямоугольный объект, помещенный в начало координат $s = 0$:

$$a_\epsilon(s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\langle \hat{N} \rangle}{\epsilon}} & \text{при } |s| \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } |s| > \frac{\epsilon}{2}. \end{cases} \quad (6.59)$$

Выбирая ширину ϵ этого объекта достаточно малой, получим источник, подобный точечному, в котором, то же время, полное число фотонов сохраняется постоянным и равным $\langle \hat{N} \rangle$. Такой точечный объект дает на выходе ФРРТ $h^{(r)}(0, s)$.

Коэффициент сверхразрешения в восстановленном объекте можно оценить как отношение ширины функции рассеяния точки (ФРТ) дифракционно-ограниченного изображения к ширине ФРРТ. На рис. 6.6 показаны ФРТ

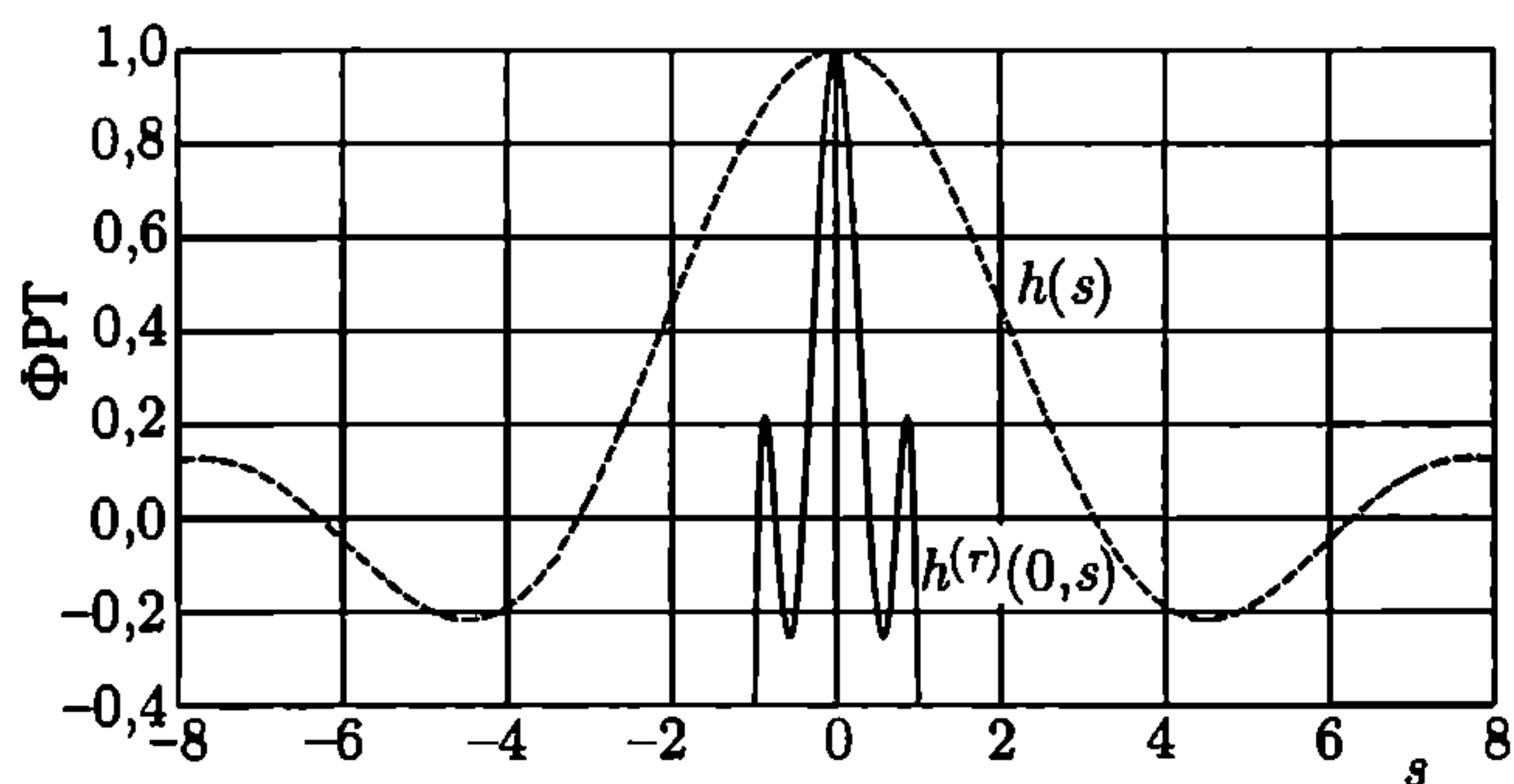


Рис. 6.6. Функция рассеяния точки $h(s)$ дифракционно-ограниченного изображения и функция реконструкции рассеяния точки $h^{(r)}(0,s)$, построенная с помощью 7 вытянутых сфероидальных функций

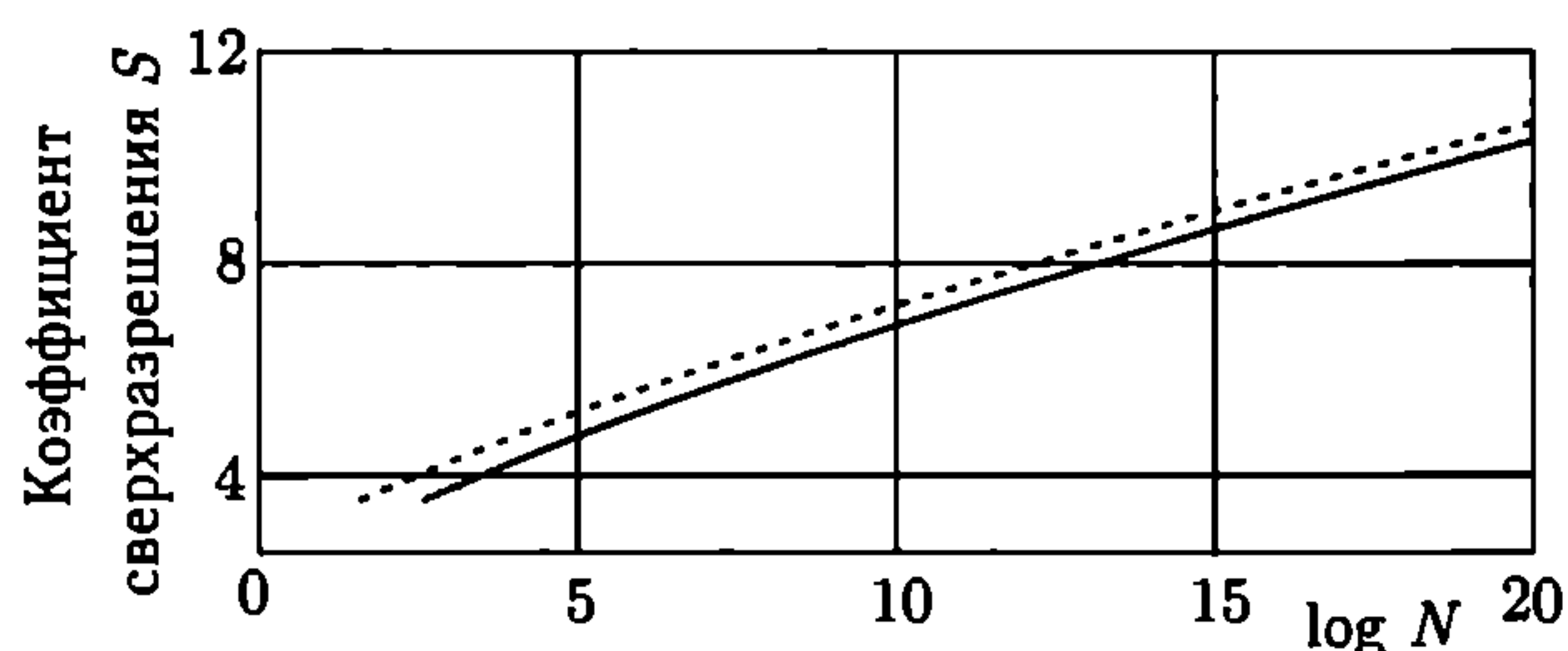


Рис. 6.7. Коэффициент сверхразрешения S как функция среднего полного числа фотонов $\langle \hat{N} \rangle$ для когерентного света (сплошная линия) и для многомодового сжатого света с $\exp(r) = 10$ (пунктирная линия)

изображения $h(s)$ и ФРПТ $h^{(r)}(0,s)$ для $L = 7$, нормированные в максимуме на единицу. Чтобы определить степень сверхразрешения, введем полуширину на полувывоте для этих двух функций, W и W_L , соответственно. Тогда определим степень сверхразрешения S как отношение W к W_L :

$$S = W/W_L. \quad (6.60)$$

В примере, изображенном на рис. 6.6, эти полуширины составляют $W = 1,895$, $W_L = 0,252$ и $S = 7,5$.

На рис. 6.7 коэффициент сверхразрешения S изображена как функция среднего полного числа фотонов $\langle \hat{N} \rangle$ во входном объекте для случаев когерентного и многомодового сжатого света. Как видно из рисунка, для одного и того же среднего числа фотонов многомодовый сжатый свет обеспечивает лучшее сверхразрешение, чем когерентный.

6.4. Источники сжатого света для микроскопии со сверхразрешением

В предыдущем разделе мы представили теоретическую схему, позволяющую улучшить сверхразрешение выше стандартного квантового предела при восстановлении оптического объекта, используя многомодовый сжатый свет. Теория сформулирована в терминах вытянутых сфероидальных функ-

ций, являющихся собственными модами оптической схемы изображения. Для того чтобы достичь сверхразрешения с помощью многомодового сжатия света необходимо приготовить эти моды в сжатом состоянии. Возникает вопрос: как создать такие сжатые вытянутые сфероидальные моды.

В этом разделе мы ответим на этот вопрос. Говоря точнее, мы покажем, что оптический параметрический усилитель (ОПУ) с должным образом выбранной диафрагмой на выходе и линзами, осуществляющими преобразование Фурье, является источником сжатых вытянутых сфероидальных мод, которые можно использовать для сверхразрешающей микроскопии. Мы исследуем квантовую статистику сжатых вытянутых сфероидальных мод в нашей схеме в зависимости от физических параметров ОПУ и оптической конфигурации. Мы сформулировали простые оценки числа «элементов объекта», которые могут быть реконструированы в зависимости от числа степеней свободы используемого неклассического света.

Схема одномерного оптического изображения с многомодовым сжатым светом представлена на рис. 6.8.

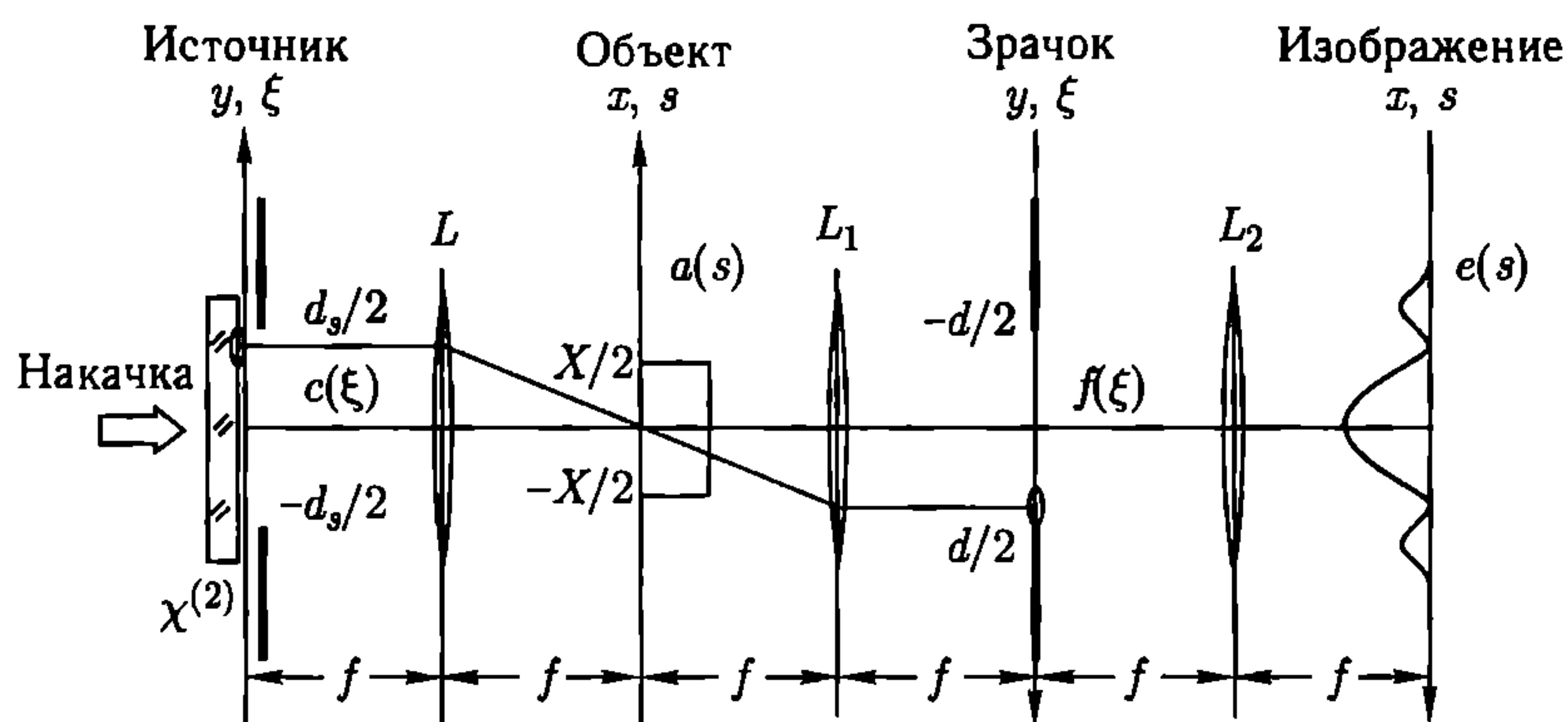


Рис. 6.8. Схема оптического изображения со сжатым светом

Часть схемы справа от объектной плоскости осуществляет дифракционно-ограниченное изображение объекта конечного размера X , находящегося в объектной плоскости, она исследована нами выше. Часть слева от объектной плоскости — схема освещения. Она состоит из ОПУ бегущей волны, расположенный в плоскости источника, и линзы L , осуществляющей преобразование Фурье. Хорошо известно, что ОПУ бегущей волны с плоской волной накачки и нелинейным кристаллом с большой поперечной апертурой создает на выходе многомодовый сжатый вакуум [29]. Новой особенностью нашей схемы является наличие диафрагмы размера d_s на выходе ОПУ, которая служит для выделения поперечных мод в сжатом состоянии. Как мы покажем ниже, когда размер этой диафрагмы достигает размера зрачка, $d_s \geq d$, сжатое излучение в точности соответствует вытянутым сфероидальным волнам, являющимся собственными модами схемы изображения. Этот результат можно легко объяснить качественно. Действительно, если все три линзы в схеме имеют одинаковое фокусное расстояние f , как показано на рис. 6.8, линзы L и L_1 создают в плоскости зрачка геометрическое изображение диафрагмы

d_s . Следовательно, интуитивно понятно, чтобы выделить моды источника, прошедшие через схему изображения, следует согласовать размер диафрагмы d_s и размер зрачка d .

Введем безразмерные координаты в плоскости источника как $\xi = 2y/d$ (см. рис. 6.8). Безразмерные операторы $\hat{c}(\xi)$ уничтожения фотонов в плоскости источника подчиняются стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{c}(\xi), \hat{c}^\dagger(\xi')] = \delta(\xi - \xi'). \quad (6.61)$$

Эти операторы нормированы так, что $\langle \hat{c}^\dagger(\xi) \hat{c}(\xi) \rangle$ имеет смысл среднего числа фотонов, приходящихся на единицу длины в плоскости источника. Преобразование Фурье $(T\hat{c})(s)$, выполняемое физически линзой L на рис. 6.8, имеет вид:

$$\hat{a}(s) = (T\hat{c})(s) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ics\xi} \hat{c}(\xi). \quad (6.62)$$

Оператор уничтожения фотонов $\hat{a}(s)$ в объектной плоскости можно представить в виде разложения по модам $\psi_k(s)$:

$$\hat{a}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k \psi_k(s) + \hat{F}(s), \quad (6.63)$$

где операторные коэффициенты $\hat{A}_k$ выражаются так:

$$\hat{A}_k = \int_{-\infty}^{\infty} ds \hat{a}(s) \psi_k(s). \quad (6.64)$$

Операторы $\hat{A}_k$ и $\hat{A}_k^\dagger$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям операторов рождения и уничтожения фотонов в дискретных модах:

$$[\hat{A}_k, \hat{A}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad [\hat{A}_k, \hat{A}_{k'}] = 0. \quad (6.65)$$

Фурье-образ вытянутых сфероидальных функций $\psi_k(s)$, полученный с помощью линзы L_1 , равен нулю вне интервала $|\xi| \leq 1$. Следовательно, набор функций $\{\psi_k(s)\}$ не полон в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, и чтобы коммутационные соотношения по-прежнему удовлетворялись, к операторам $\hat{a}(s)$ и $\hat{a}^\dagger(s)$ необходимо добавить дополнительный член $\hat{F}(s)$. Этот член имеет нулевой фурье-спектр в интервале $|\xi| \leq 1$ и не вносит вклада в коэффициенты $\hat{A}_k$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \psi_k(s) \hat{F}(s) = 0. \quad (6.66)$$

Поле $\hat{F}(s)$ может быть разложено по дополнительному набору вытянутых сфероидальных функций $\{\theta_k(s)\}$, ортогональному к $\{\psi_k(s)\}$.

С физической точки зрения, первый член в выражении (6.63) — это та компонента поля объекта, которая распространяется в нашей схеме через зрачок к плоскости изображения. Вторая компонента объектного поля $\hat{F}(s)$ поглощается снаружи зрачка и не наблюдаема. Поэтому в дальнейшем мы не будем включать вклад $\hat{F}(s)$ в поле объекта (6.63).

Учитывая (6.18), функции $\psi_k(s)$ и $\theta_k(s)$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\psi_k(s) &= \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(s) + \sqrt{1 - \lambda_k} \chi_k(s), \\ \theta_k(s) &= \sqrt{1 - \lambda_k} \varphi_k(s) - \sqrt{\lambda_k} \chi_k(s).\end{aligned}\tag{6.67}$$

Мы можем представить операторы уничтожения фотонов в плоскости источника с помощью двух наборов функций $\{\varphi_k(s)\}$ и $\{\chi_k(s)\}$:

$$\hat{c}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k \varphi_k(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_k \chi_k(\xi),\tag{6.68}$$

Здесь $\hat{c}_k$ — это операторы уничтожения фотонов в вытянутых сфероидальных модах φ_k в центральной части плоскости, а $\hat{d}_k$ — операторы уничтожения фотонов в вытянутых сфероидальных модах χ_k на крыльях. Операторы $\hat{c}_k$ выражаются через полевые операторы $\hat{c}(\xi)$ следующим образом:

$$\hat{c}_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{c}(\xi) \varphi_k(\xi), \quad \hat{d}_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{c}(\xi) \chi_k(\xi).\tag{6.69}$$

Принимая во внимание (6.68) и (6.69), получим:

$$\hat{a}(s) = (T\hat{c})(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k [\hat{c}_k \psi_k(s) + \hat{d}_k \theta_k(s)],\tag{6.70}$$

и

$$\hat{A}_k = (-i)^k \hat{c}_k.\tag{6.71}$$

Как и ожидалось, вторая сумма в выражении (6.68), содержащая операторы $\hat{d}_k$ и описывающая освещение, приходящее с крыльев плоскости источника, не вносит вклад в $\hat{A}_k$. Если диафрагма источника становится больше или совпадает по размеру со зрачком, $d_s \geq d$, она не влияет на операторные амплитуды $\hat{c}_k$ и $\hat{A}_k$ (см. (6.69)) и можно не учитывать диафрагму при расчете $\hat{A}_k$.

Чтобы выразить в явном виде коэффициенты $\hat{A}_k$ при освещении схемы светом оптического параметрического усилителя бегущей волны, мы будем использовать упрощенное описание ОПУ с плоской неистошащейся волной накачки (см. [29]). В этом приближении пространственные фурье-амплитуды $\hat{C}(q)$ поля на выходе кристалла,

$$\hat{C}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-iq\xi} \hat{c}(\xi),\tag{6.72}$$

можно записать аналитически в виде линейной комбинации соответствующих фурье-амплитуд на входе $\hat{C}_{\text{in}}(q)$ и $\hat{C}_{\text{in}}^\dagger(q)$:

$$\hat{C}(q) = U(q) \hat{C}_{\text{in}}(q) + V(q) \hat{C}_{\text{in}}^\dagger(-q). \quad (6.73)$$

Здесь операторы $\hat{C}_{\text{in}}(q)$ на входе ОПУ соответствуют полю в вакуумном состоянии. Комплексные коэффициенты $U(q)$ и $V(q)$ зависят от нелинейной восприимчивости кристалла, его длины и условий фазового синхронизма в ОПУ. Эти коэффициенты обладают свойством:

$$|U(q)|^2 - |V(q)|^2 = 1, \quad (6.74)$$

которое гарантирует сохранение коммутационных соотношений (6.61). Используя стандартные параметры многомодового сжатия (см. [29]), получим:

$$U(q) \pm V^*(-q) = e^{-i\varphi(q)} [e^{\pm r(q)} \cos \theta(q) + i e^{\mp r(q)} \sin \theta(q)]. \quad (6.75)$$

Фаза усиленной (растянутой) квадратурной амплитуды (6.75) выходного поля $\hat{C}(q)$ ОПУ равна $\theta(q)$. Фазовый множитель $\exp(-i\varphi(q))$ определяет, какая из квадратурных амплитуд входного поля $\hat{C}_{\text{in}}(q)$ сжата, а какая растянута. Для вакуумного состояния поля на входе ОПУ этот фазовый множитель несущественен.

Операторные амплитуды $\hat{A}_k$ находим в явном виде, подставляя (6.69) в (6.71). Выражаем $\hat{c}_{\text{in}}(\xi)$ и $\varphi_k(\xi)$ через их фурье-образы (6.73) и (6.27) и после некоторых вычислений получаем:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_k(q/c) [U(q) \hat{C}_{\text{in}}(q) + V(q) \hat{C}_{\text{in}}^\dagger(-q)]. \quad (6.76)$$

Введем реальные квадратурные компоненты полевых амплитуд $\hat{A}_k$ в плоскости объекта:

$$\hat{A}_k = \hat{A}_{1k} + i\hat{A}_{2k}. \quad (6.77)$$

Для дисперсий этих квадратурных компонент получим:

$$\langle (\Delta \hat{A}_{1k})^2 \rangle = \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_k^2(q/c) [e^{\pm 2r(q)} \cos^2 \theta(q) + e^{\mp 2r(q)} \sin^2 \theta(q)], \quad (6.78)$$

$$\langle (\Delta \hat{A}_{2k})^2 \rangle = \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_k^2(q/c) [e^{\mp 2r(q)} \cos^2 \theta(q) + e^{\pm 2r(q)} \sin^2 \theta(q)]. \quad (6.79)$$

Здесь верхний знак отвечает четным вытянутым сфероидальным функциям ψ_k , а нижний нечетным.

Из полученных выражений следует, что вытянутые сфероидальные моды, освещающие объект, можно приготовить в сжатом состоянии. Правильным выбором фазы сжатия $\theta(q)$ при низких пространственных частотах q можно минимизировать квантовые флуктуации одной из квадратурных компонент $A_{\sigma k}$, $\sigma = 1, 2$ (а именно, той компоненты, которая детектируется в плоскости изображения в нашей схеме). Полагая степень и фазу сжатия постоянными, $r(q) = r$, $\theta(q) = \theta$, можно оценить дисперсию сжатой квадратурной компоненты:

$$\langle (\Delta A_{\sigma k})^2 \rangle \sim e^{-2r}/4. \quad (6.80)$$

В действительности полоса пространственных частот многомодового сжатия ограничена условием фазового синхронизма в ОПУ. Необходимо принимать во внимание пространственно-частотную дисперсию сжатия, т. е. зависимость фазы сжатия $\theta(q)$ от пространственной частоты, имеющую место из-за дифракции в свободном пространстве и внутри ОПУ. Оба указанных явления ухудшают сжатие вытянутых сфероидальных мод.

Как показано в [28, 29], влияние дифракции на сжатие можно почти полностью компенсировать посредством установки массива линз. Если такая компенсация выполнена, то, как видно из (6.78), (6.79), степень сжатия вытянутых сфероидальных мод зависит от степени перекрывания в объектной плоскости двух областей: 1) области, освещенной сжатыми плоскими волнами $\hat{C}(q)$, которые фокусируются линзой L в точки $s = q/c$, и 2) области локализации энергии $\sim \psi_k^2(s)$ вытянутых сфероидальных мод.

По аналогии с другими явлениями, связанными с пространственным многомодовым сжатым светом, в четных и нечетных компонентах поля объекта сжатыми оказываются различные квадратуры; так, например, при $\theta = 0$ сжаты квадратуры A_{1k} и A_{2k} для нечетных и четных вытянутых сфероидальных мод соответственно.

Наконец, мы можем сформулировать условие многомодового сжатия света, освещающего объект, в терминах числа N независимых степеней свободы светового поля, проходящего через диафрагму ОПУ (мы предполагаем здесь оптимальный размер диафрагмы $d_s = d$). Свойства излучения ОПУ можно характеризовать длиной когерентности l_c выходного поля $\hat{c}(\xi)$. Интервал пространственных частот q_c , где реализуется эффективное сжатие, связан с длиной когерентности неравенством:

$$|q_c| \leq \frac{\pi(d/2)}{l_c}. \quad (6.81)$$

Минимальное требование к ОПУ состоит в том, чтобы эффективно сжатые волны $\hat{C}(q_c)$ после прохождения через линзу L освещали область локализации объекта $|s| \leq 1$, т. е. волны с

$$|q_c|/c \geq 1 \quad (6.82)$$

должны быть сжатыми. Это позволяет сделать оценку длины когерентности:

$$l_c \leq \pi d/2c, \quad (6.83)$$

и числа независимых степеней свободы N излучения, освещающего объект из области размера d :

$$N \sim d/l_c \geq \frac{dX}{\lambda f} = S. \quad (6.84)$$

Здесь S — это число Шеннона для нашей оптической схемы.

Как видно из (6.67), волновые профили $\psi_k(s)$ можно разложить по двум базисным наборам $\{\varphi_k(s)\}$ и $\{\chi_k(s)\}$, связанным с центром и крыльями поля, освещающего объектную плоскость, где $\lambda_k \leq 1$ — собственные значения преобразования изображения. Как известно из теории вытянутых сфероидальных функций [16, 21], эти собственные значения близки к 1 только для $k \leq S$, где S — число Шеннона. Для более высоких значений индекса k энергия поля в вытянутых сфероидальных волнах $\psi_k(s)$ концентрируется на крыльях, т. е. вне области локализации объекта $|s| \leq 1$. Следовательно, условие $N \sim S$ обеспечивает эффективное сжатие только вытянутых сфероидальных волн с $k \leq S$. Для того чтобы минимизировать квантовый шум более высоких вытянутых сфероидальных волн (с $k > S$), необходимо использовать ОПУ с большим числом эффективно сжатых пространственных мод излучения,

$$N \gg S, \quad (6.85)$$

и освещать неклассическим светом пятно на объектной плоскости много большего размера, чем сам объект.

Список литературы

1. *Rayleigh J.* Collected Optics Papers of Lord Rayleigh. Part A // Opt. Soc. Am. — Washington, 1994. — P. 117.
2. *Flock A., Strelloff D.* // Nature. 1984. V. 310. P. 397.
3. *Art J. J., Craftford A. C., Fettiplace R.* // J. Physiol. (London). 1986. V. 371. P. 18P.
4. *Kamimura S.* // Appl. Opt. 1987. V. 26. P. 3425.
5. *Denk W., Webb W. W.* // Appl. Opt. 1990. V. 29. P. 2382.
6. *Jelles J., Schnapp B. J., Scheetz M. P.* // Nature. 1988. V. 331. P. 450.
7. *Fournier D., Boccara A., Amer N., Gerlach R.* // Appl. Phys. Lett. 1980. V. 37. P. 519.
8. *Putman C., De Grooth B., Van Hulst B., Greve G.* // J. Appl. Phys. 1992. V. 72. P. 6.
9. *Bertero M., De Mol C.* // Progress in Optics. V. XXXVI / Ed. by E. Wolf. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — P. 129.
10. *Wolter H.* // Progress in Optics. V. I / Ed. by E. Wolf. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — Ch. V.
11. *Harris J. L.* // J. Opt. Soc. Am. 1964. V. 54. P. 931.
12. *Toraldo di Francia G.* // J. Opt. Soc. Am. 1955. V. 45. P. 497.
13. *McCutchen C. W.* // J. Opt. Soc. Am. 1967. V. 57. P. 1190.
14. *Rushforth C. K., Harris R. W.* // J. Opt. Soc. Am. 1968. V. 58. P. 539.
15. *Toraldo di Francia G.* // J. Opt. Soc. Am. 1969. V. 59. P. 799.

16. *Frieden B.R.* // Progress in Optics. V.IX / Ed. E. Wolf. — Amsterdam: North-Holland, 1971. — P.311–407.
17. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.* Solution of ill-posed problems. — Washington, DC: Winston/Wiley, 1977.
18. *Kolobov M.I., Fabre C.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V.85. P.3789.
19. *Beskrounyy V.N., Kolobov M.I.* // Phys. Rev. A. 2005. V.71. P.043802.
20. *Bertero M., Pike E.R.* // Opt. Acta 1982. V.29. P.727.
21. *Slepian D., Pollak H.O.* // Bell System Techn. J. 1961. V.40. P.43.
22. *Scotto P., Colet P., San Miguel M., Kolobov M.I.* // Proc. of the European Quantum Electronics Conf. «EQEC-2003», Munich, 2003.
23. *Kolobov M.I., Fabre C., Scotto P., Colet P., San Miguel M.* // Coherence and Quantum Optics VIII / Eds.: N. Bigelow, J. H. Eberly, C. R. Stroud, I. A. Walmsley. — New York: Plenum, 2003.
24. *Xiao H., Rokhlin V., Yarvin N.* // Inverse Problems. 2001. V.17. P.805.
25. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions. 9th ed. — New York: Dover, 1970.
26. *Kolobov M.I., Lugiato L.A.* // Phys. Rev. A. 1995. V.52. P.4930.
27. *Sokolov I. V., Kolobov M.I.* // Optics Lett. 2004. V.29. P.703.
28. *Колобов М.И., Соколов И.В.* // ЖЭТФ. 1989. Т.96. С.1945;
Kolobov M.I., Sokolov I. V. // Phys. Lett. A. 1989. V.140. P.101.
29. *Kolobov M.I.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V.71. P.1539.

Литература, добавленная при переводе

30. *Kolobov M.I., Beskrounyy V.N.* Quantum theory of super-resolution for optical systems with circular apertures // Optics Commun. 2006. V.264. P.9.
31. *Kolobov M.I.* Quantum limits of superresolution for imaging discrete subwavelength structures // Opt. Expr. 2008. V.16. P.58.
32. *Beskrounyy V.N., Kolobov M.I.* Quantum-statistical analysis of superresolution for optical systems with circular symmetry // Phys. Rev. A. 2008. V.78. P.043824.
33. *Тычинский В.П.* Сверхразрешение и сингулярности в фазовых изображениях // УФН. 2008. Т.178. С.1205.
34. *Tsang M.* Quantum imaging beyond the diffraction limit by optical centroid measurements // Phys. Rev. Lett. 2009. V.102. P.253621.

УСИЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ БЕЗ ДОБАВЛЕНИЯ ШУМА

Михаил Колобов, Эрик Ланц

7.1. Введение

Возможность усиления оптического изображения без добавления шума, или иначе — бесшумового усиления, была продемонстрирована теоретически Кавесом [1] на основе общих принципов квантовой механики, опираясь на требование сохранения коммутационных соотношений в гейзенберговском представлении в процессе усиления для бозе-операторов. По шумовым характеристикам все усилители можно разделить на две группы: фазово-нечувствительные усилители (ФНЧУ), усиление которых не зависит от фазы входного сигнала, и фазово-чувствительные усилители (ФЧУ), усиление которых зависит от фазы. Кавес показал, что все ФНЧУ вносят в усиленный сигнал как минимум 3 дБ шума, в то время как ФЧУ при определенных условиях могут сохранять отношение сигнала к шуму. Именно благодаря этому свойству сегодня эти усилители называют бесшумовыми. Бесшумовое усиление оптических сигналов, меняющихся во времени, было продемонстрировано экспериментально для случая непрерывного режима излучения [2] и для импульсных оптических сигналов [3].

Первые шаги в направлении бесшумового усиления изображений были сделаны в [26], где теоретически была продемонстрирована возможность создания такого усилителя на основе оптического параметрического усилителя (ОПУ) с кольцевым резонатором, работающего в допороговом режиме как фазово-чувствительный усилитель. Резонаторная геометрия обеспечивала непрерывный режим усиления. При определенных условиях, найденных в [4], такой усилитель сохраняет отношение сигнала к шуму в усиленном изображении. Недавно бесшумовое усиление изображения с резонаторной конфигурацией исследовано теоретически на примере параметрического генератора света с конфокальным резонатором [5].

Бесшумовое усиление изображений в конфигурации бегущей волны (однопроходной конфигурации) исследовалось в [6]. В этой статье авторы рассмотрели ОПУ без внешнего резонатора. Эта геометрия является более естественной для возможных практических реализаций и имеет ряд преимуществ по сравнению с резонаторной схемой. Наиболее важное из них заключается

в более широкой частотной и пространственно-частотной полосах усиления, которые определяются условиями фазового синхронизма ОПУ. Более широкая полоса частот позволяет усиливать изображения за проход одного импульса, а более широкая полоса пространственных частот обеспечивает лучшую разрешающую способность бесшумового усиления. В схеме бесшумового усиления изображения, рассмотренной в [6], ОПУ помещается в пространственную фурье-плоскость схемы. В [7] исследовалась альтернативная конфигурация с однопроходным ОПУ, в которой входной объект проецировался прямо на вход усилителя. В этом случае при определенных условиях можно также получить бесшумовое усиление изображения¹⁾.

Параметрическое усиление изображений изучалось несколькими экспериментальными группами [8–14]. В экспериментах, выполненных в группе Ланца, было реализовано параметрическое усиление монохроматического изображения ближнего ИК диапазона с разрешением 60×80 точек в усиленном изображении и средним коэффициентом усиления 15 дБ [8]. Кроме того, процесс параметрического усиления применялся для низкочастотной и полосовой пространственной фильтрации усиленных изображений, используя фильтрационные свойства функции пропускания усилителя [9], и для сверхскоростного изображения [10]. Параметрическое усиление также использовалось в восстановлении изображений с временной селекцией [12, 13] и для биомедицинского построения изображений [14]. В [15–17] исследовались квантовые флуктуации при параметрическом усилении изображений. В частности, в [16] впервые наблюдалось бесшумовое усиление изображения. Однако, в этом эксперименте авторы не обращались к проблеме пространственного распределения квантовых флуктуаций изображения. Они интересовались временным поведением квантовых флуктуаций, регистрируемых фотодиодом на частоте 27 МГц при сканировании фотодиодом изображения. Усиление оптических изображений без добавления пространственных шумов впервые было продемонстрировано в [17].

В этой главе мы представим краткое теоретическое описание однопроходного бесшумового усилителя изображения, следуя [6]. Мы также опишем недавние экспериментальные результаты, демонстрирующие бесшумовое усиление изображений в поле одного импульса. В разд. 7.2 мы кратко обсудим оптическую схему однопроходного усилителя изображения. В разд. 7.3 мы дадим физическое объяснение преобразования сжатия, которое обуславливает эволюцию поля в нашей схеме и покажем возможность оптимизировать измерительную процедуру. Раздел 7.4 посвящен исследованию возможностей усиления и шумовых характеристик усилителя, а также поиску условий для его бесшумового функционирования. В разделах 7.5 и 7.6 мы опишем экспериментальные результаты бесшумового усиления изображений.

¹⁾ В [22] развита квантовая теория бесшумового параметрического усиления и преобразования частоты вверх изображения в связанном нелинейно-оптическом взаимодействии, включающим вырожденный параметрический процесс и процесс генерации суммарной частоты. На выходе нелинейного кристалла имеем изображения на частотах ниже и выше частоты накачки.

7.2. Однопроходная схема параметрического усиления изображений

Мы рассматриваем однопроходную оптическую схему усилителя изображения, показанную на рис. 7.1. На входе схемы в объектной плоскости P_1 находится оптическое изображение конечного размера S_O . Мы полагаем, что это изображение содержится в слабой пространственной модуляции волнового фронта оптической волны с несущей частотой ω , освещающей плоскость P_1 . Расстояние, отделяющее линзу L_1 от объектной плоскости, совпадает с расстоянием от этой линзы до плоскости $z = 0$ и равно фокусному расстоянию f линзы. Положение z_2 плоскости P_2 грани нелинейного кристалла будет определено ниже из условий оптимального фазового синхронизма. В случае $z_2 = 0$ входная часть схемы выполняет преобразование Фурье входного волнового фронта из объектной плоскости P_1 на вход нелинейного кристалла длины l , играющего роль однопроходного ОПУ. Параметрическое усиление сигнальной волны на частоте ω , несущей входное изображение, реализуется в поле плоской монохроматической волны накачки на удвоенной частоте $\omega_p = 2\omega$, освещающей входную грань кристалла. На выходной грани P_3 нелинейного кристалла установлен зрачок площадью S_P . Мы рассматриваем случай, когда

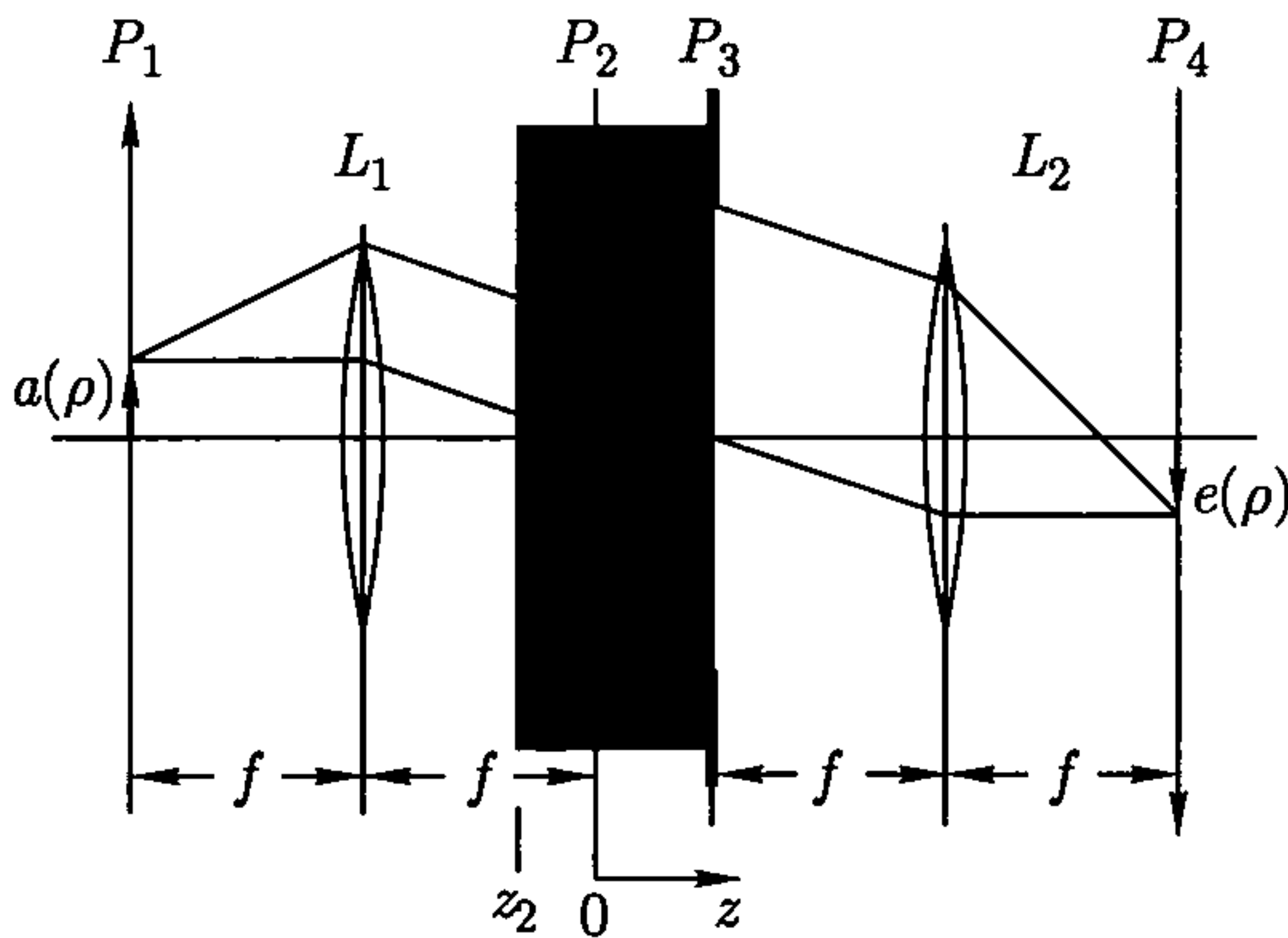


Рис. 7.1. Схема однопроходного оптического усилителя изображения

волновая картина объекта содержит конечный интервал поперечных пространственных частот. Входные волны с более высокими пространственными частотами находятся в вакуумном состоянии. После прохождения линзы L_1 они освещают кристалл на больших расстояниях от продольной оси z и стимулируют испускание только спонтанных параметрически рассеянных фотонов. Шум этих фотонов обрезается зрачком и не вносит вклад в сигнальную часть усиленного волнового фронта в плоскости изображения P_4 .

Линза L_2 выполняет обратное преобразование Фурье усиленной объектной волны. При ориентации показанных на рис. 7.1 осей, увеличение изображения в схеме равно $+1$. Усиленное изображение измеряется плотным массивом небольших фотодетекторов (пикселей) в плоскости изображения P_4 .

В [6] показано, что в случае бесконечно большого размера зрачка ($S_P \rightarrow \infty$) оператор уничтожения фотонов $\hat{e}(\rho, t)$ в плоскости изображения связан с оператором уничтожения фотонов $\hat{a}(\rho, t)$ в объектной плоскости следующим унитарным преобразованием:

$$\hat{e}(\rho, \Omega) = u(\rho, \Omega)\hat{a}(\rho, \Omega) + v(\rho, \Omega)\hat{a}^\dagger(-\rho, -\Omega). \quad (7.1)$$

Здесь $\hat{e}(\rho, \Omega)$, $\hat{a}(\rho, \Omega)$ — преобразование Фурье операторов $\hat{e}(\rho, t)$, $\hat{a}(\rho, t)$ по времени. Коэффициенты $u(\rho, \Omega)$ и $v(\rho, \Omega)$ имеют вид:

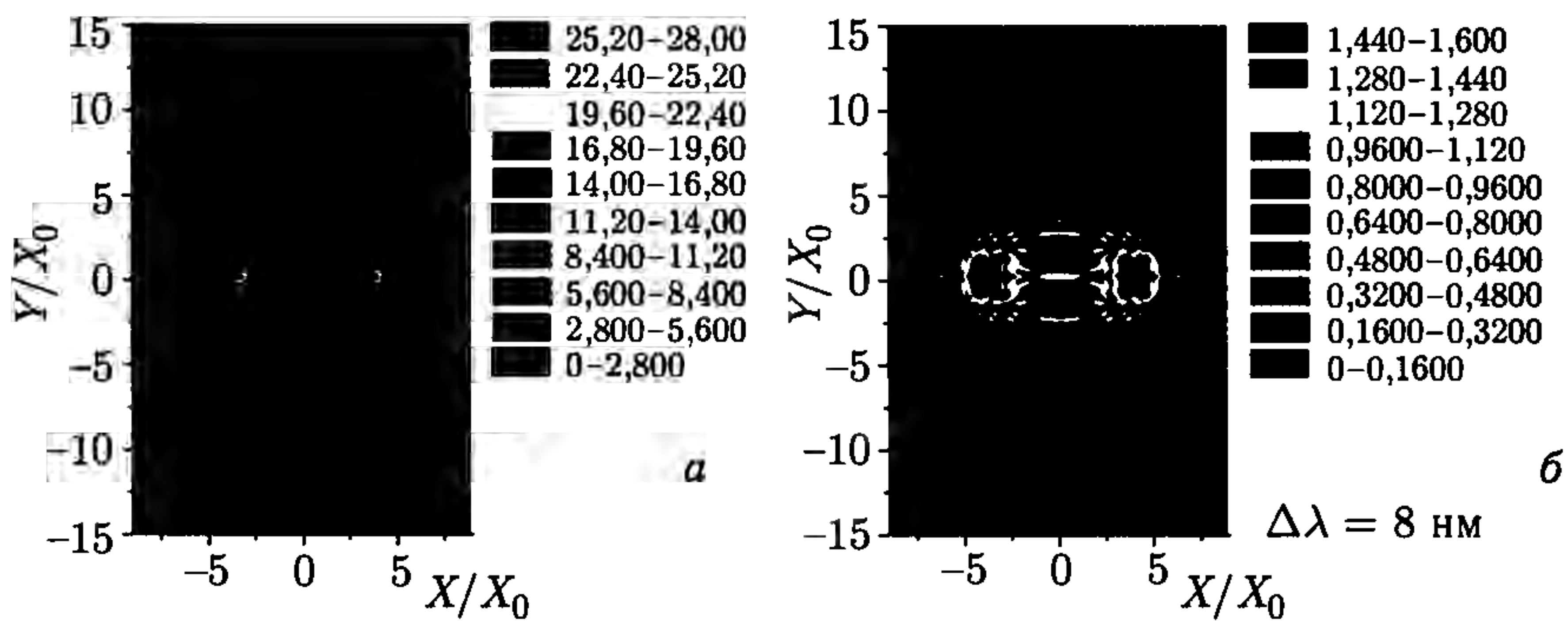


Рис. 2.12. а) Распределение интенсивности поля излучения в дальней зоне при СПР. б) Распределение разностного шума операторов Стокса $\hat{S}_2$, измеренных в симметрично расположенных участках поперечного сечения пучка, нормированных на уровень дробового шума. Распределение для операторов $\hat{S}_3$ идентично

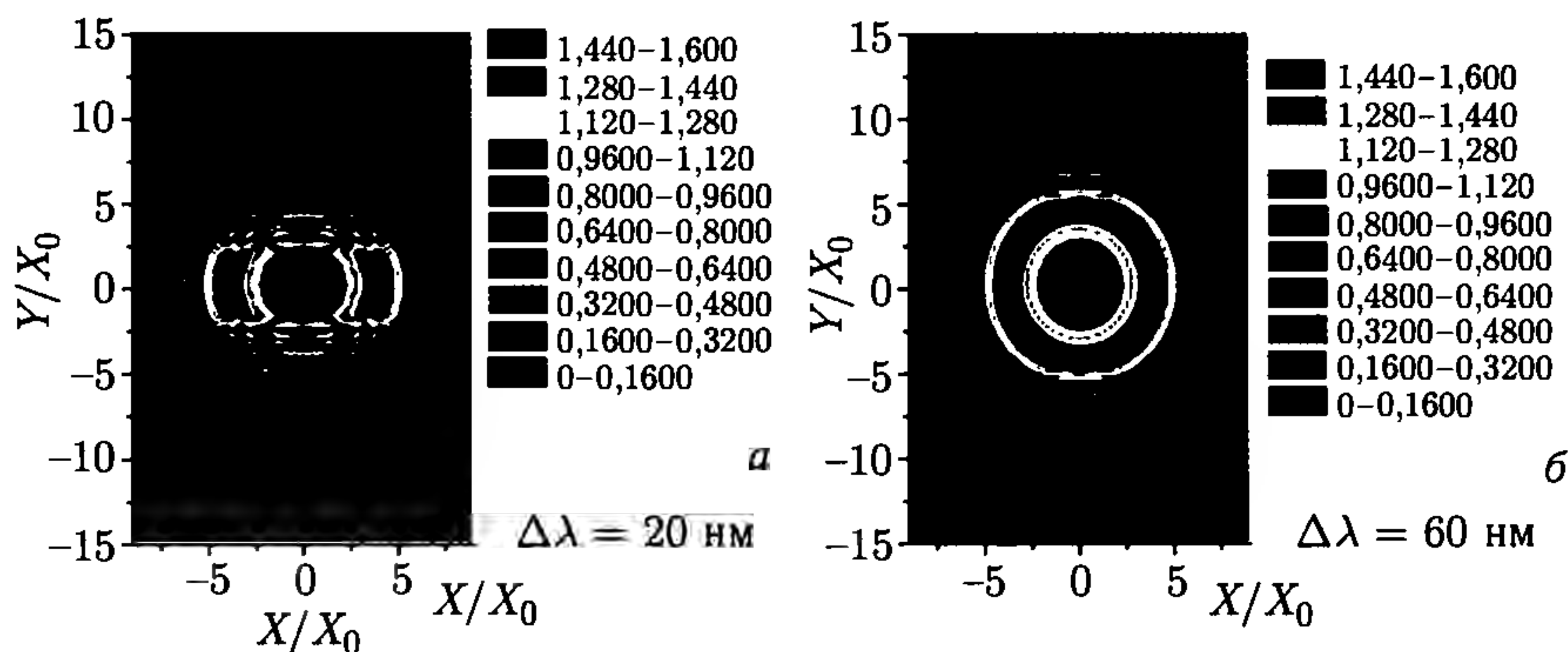
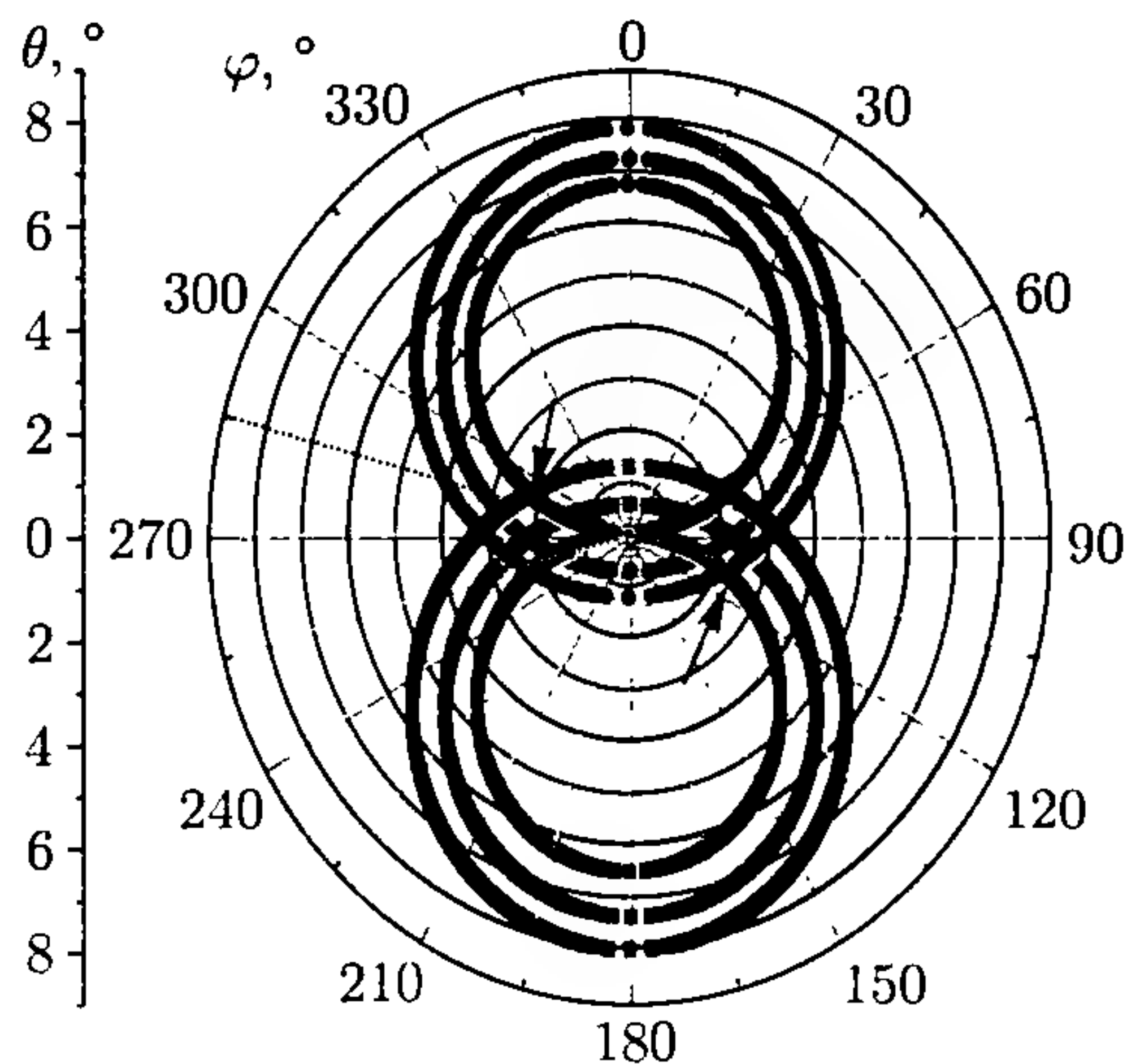


Рис. 2.13. Эффект частотной фильтрации. Распределение разностного шума операторов $\hat{S}_2$ ($\hat{S}_3$), измеренных в симметрично расположенных участках поперечного сечения пучка и нормированных на уровень дробового шума. Рисунок а получен с помощью частотного фильтра шириной $\Delta\lambda = 20$ нм, центрированного в окрестности частоты вырождения; на рис. б ширина фильтра $\Delta\lambda = 60$ нм

Рис. 2.14. Кривые фазового синхронизма для кристалла ВВО толщиной 2 мм, вырезанного под углом $49,6^\circ$, построенные в полярных координатах; полярный угол θ отсчитывается от направления распространения волны накачки и соответствует радиальному положению в дальней зоне; ϕ — азимутальный угол вращения вокруг направления накачки. Черные кривые — $\lambda_s = \lambda_i = 702$ нм; красные кривые — $\lambda_s = \lambda_i = 692$ нм; синие кривые — $\lambda_s = \lambda_i = 712,29$ нм. Сигнальная волна — обыкновенная (медленная), ей соответствуют кривые в верхней части рисунка. Холостая волна — необыкновенная (быстрая)



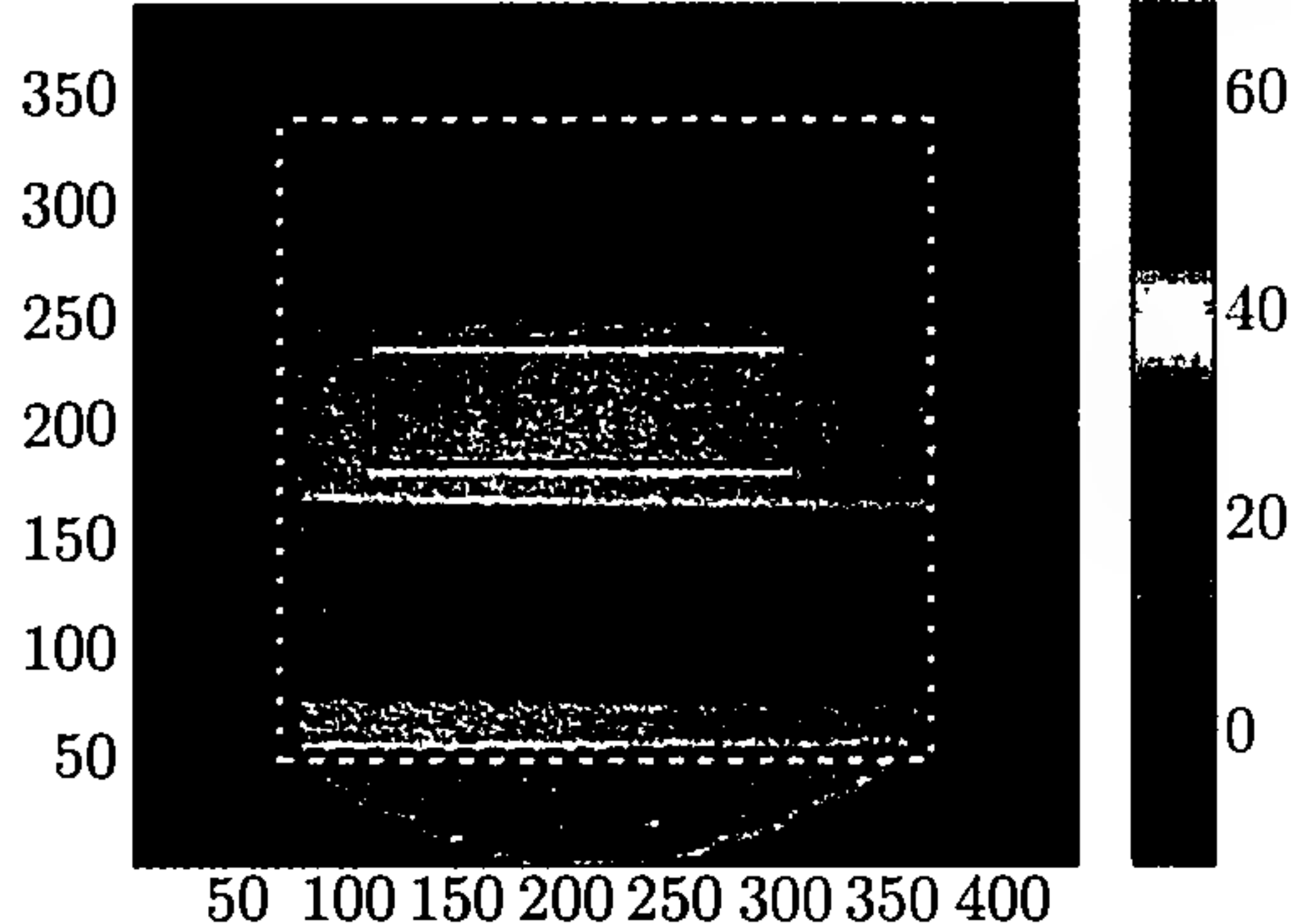


Рис. 7.9. Пример изображения усиленного в схеме ФНЧУ. Пунктирная линия указывает грани кристалла. Сплошная линия ограничивает область, использованную для статистической обработки (8241 пиксел)

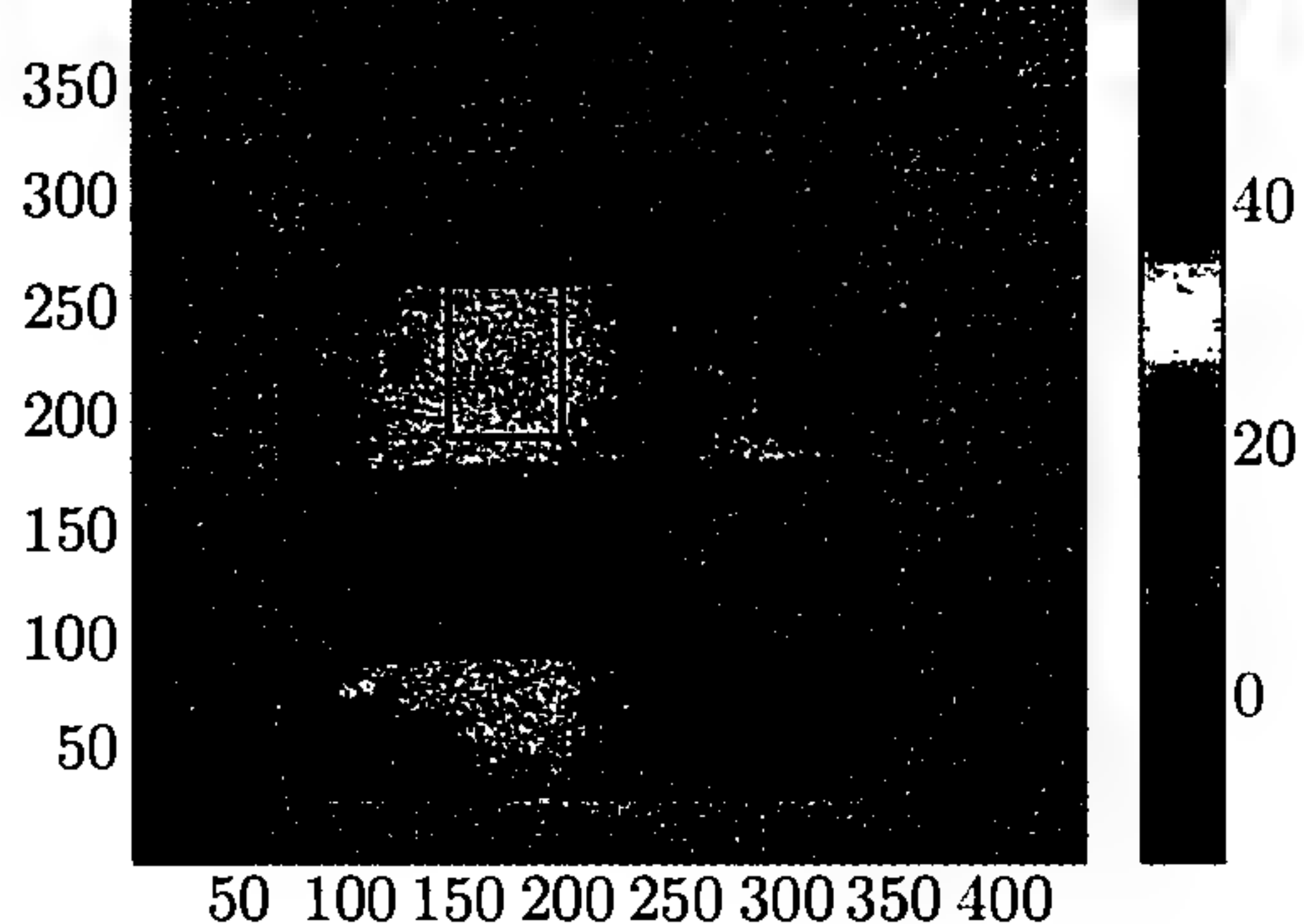


Рис. 7.12. Пример изображения, усиленного в схеме ФЧУ. Область содержит 3266 пикселов

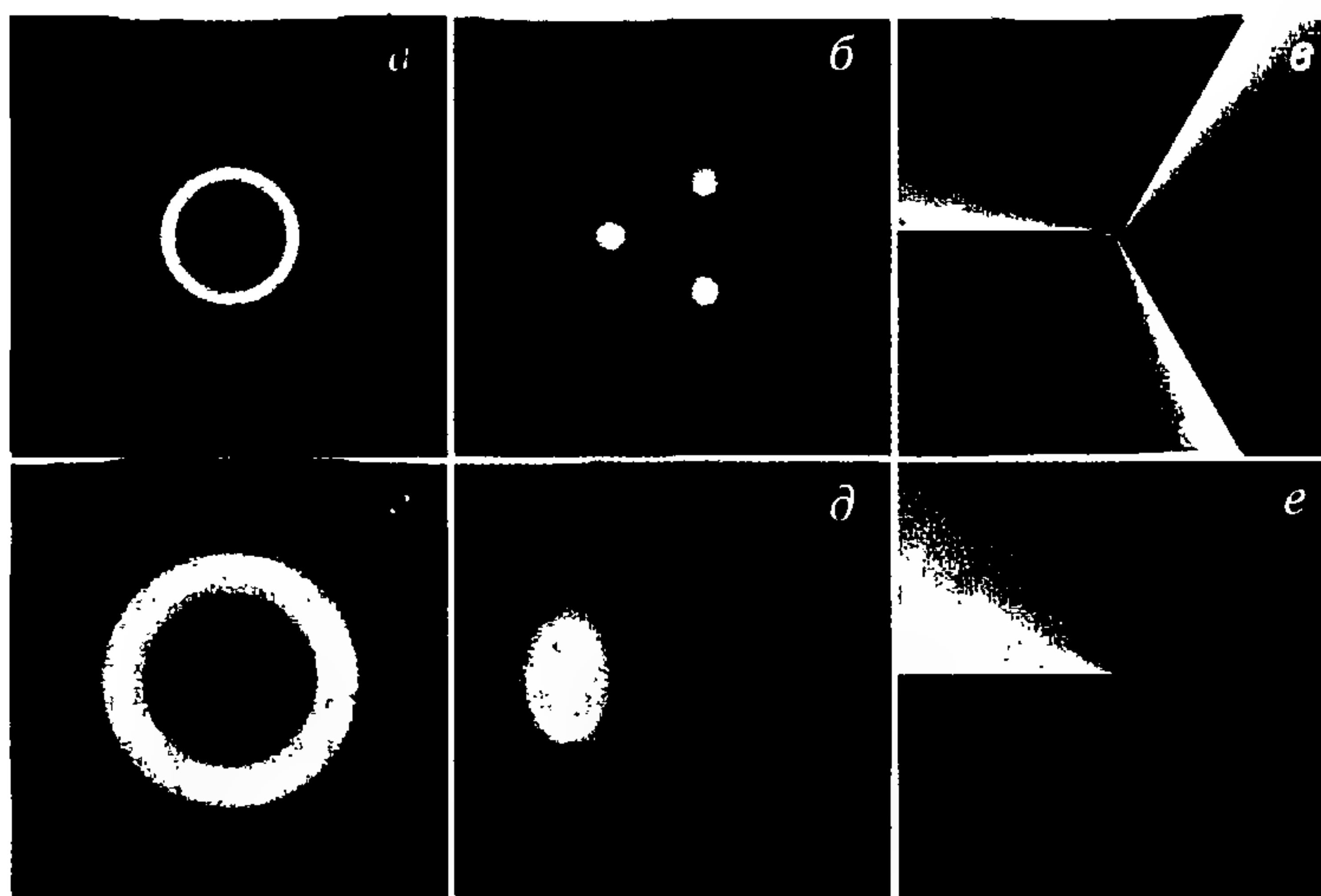


Рис. 12.6. Интенсивности ($a, г$), действительные части ($б, д$) и фазы ($в, е$) для пучка Лагерра-Гаусса ($a-в$) с $\ell = 3$, $p = 2$ в его фокальной плоскости и для пучка Бесселя ($г-е$) с $\ell = 1$. Цветовая шкала легко отождествляется при помощи последнего рисунка

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{\rho}, \Omega) &= \exp \left\{ i \left[\Omega \frac{n}{c} - \frac{2k - k_p}{2} \right] l \right\} \left[\cosh \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \Omega) + \frac{i\delta(\boldsymbol{\rho}, \Omega)}{2\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \Omega)} \sinh \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \Omega) \right], \\
v(\boldsymbol{\rho}, \Omega) &= \exp \left\{ i \left[\Omega \frac{n}{c} - \frac{2k - k_p}{2} \right] l \right\} \frac{g}{\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \Omega)} \sinh \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \Omega).
\end{aligned}
\tag{7.2}$$

Здесь $c/n = 1/k'_\Omega$ — скорость света в кристалле. Безразмерную функцию рассогласования фаз $\delta(\boldsymbol{\rho}, 0)$ при $\Omega = 0$, которую мы будем называть локальной фазовой расстройкой, можно представить в виде:

$$\delta(\boldsymbol{\rho}, 0) = \delta_0 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}, \quad \delta_0 = (2k - k_p) l, \tag{7.3}$$

где ρ_0 определено как

$$\rho_0 = f \sqrt{1/kl}, \tag{7.4}$$

и

$$\Gamma = \sqrt{g^2 - \delta^2/4}. \tag{7.5}$$

Физически важным является случай вырожденного фазового синхронизма ¹⁾ в кристалле, соответствующий $\delta_0 = 0$. В этом случае максимальное параметрическое усиление претерпевают волны, распространяющиеся вдоль оси z . Из этого следует, что область максимального усиления сосредоточена около оптической оси схемы $\rho = 0$. Пространственным масштаб ρ_0 определяет линейный размер области эффективного усиления в объектной плоскости.

В случае невырожденного фазового синхронизма с положительным δ_0 , $\delta_0 > 0$, безразмерная фазовая расстройка (7.3) равна нулю для волн с $q \neq 0$. Это отвечает области эффективного параметрического усиления в форме кольца на объектной плоскости.

В случае конечного размера зрачка, выражение (7.1) приобретает вид:

$$e(\boldsymbol{\rho}, \Omega) = \frac{1}{\lambda f} \int d\boldsymbol{\rho}' p(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') [u(\boldsymbol{\rho}', \Omega) a(\boldsymbol{\rho}', \Omega) + v(\boldsymbol{\rho}', \Omega) a^\dagger(-\boldsymbol{\rho}', -\Omega)]. \tag{7.6}$$

Функция $p(\boldsymbol{\rho})$ связана с апертурной функцией $P(\boldsymbol{\xi})$ зрачка:

$$p(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\lambda f} \int d\boldsymbol{\xi} P(\boldsymbol{\xi}) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda f} \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\xi} \right], \tag{7.7}$$

и называется *импульсным откликом* оптической системы.

Зрачок обрезает фотоны, рождающиеся при спонтанном параметрическом рассеянии на периферии нелинейного кристалла. Волновые пакеты этих фотонов проходят линзу L_2 и распространяются к плоскости детектирования под большими углами к оси z . Эти волновые пакеты не вносят вклад в усиленное

¹⁾ Авторы называют вырожденным и невырожденным фазовым синхронизмом синхронные волновые взаимодействия при коллинеарном и векторном фазовом синхронизме. При переводе оставлена авторская терминология.

изображение, поскольку их испускание вызвано вакуумными флуктуациями, а не сигнальными волнами из объектной плоскости. Однако биения этих шумовых волн самих с собой на поверхности элементарного детектора (пиксела) создает дополнительный шум фототока и ухудшает отношение сигнала к шуму.

Оптимальный выбор размера зрачка S_P делается на следующих основаниях. Пусть входное изображение размера S_O имеет детали или *элементы изображения* размера $S_{el} \ll S_O$. Размер элемента изображения определяет дифракционное уширение волновой картины при распространении от объектной плоскости до входной грани кристалла, то есть размер пятна, создаваемого этим элементом на входной грани кристалла. Площадь этого пятна составляет порядка $(f\lambda)^2/S_{el}$. Размер зрачка должен быть достаточно большим, чтобы свет от этого пятна мог пройти беспрепятственно, а спонтанные фотоны отсекались:

$$S_P \geq \frac{(f\lambda)^2}{S_{el}}. \quad (7.8)$$

При наличии зрачка оператор поля $e(\rho, t)$ в (7.6) определяется как интеграл по области дифракции S_{diff} в плоскости объекта. Если размер зрачка S_P удовлетворяет (7.8), то дифракционное уширение будет одного порядка или чуть меньше области элемента изображения:

$$S_{diff} \simeq \frac{(f\lambda)^2}{S_P} \leq S_{el}. \quad (7.9)$$

В нашем исследовании мы будем предполагать, что коэффициенты сжатия $u(\rho, \Omega)$ и $v(\rho, \Omega)$ не изменяются существенно в пределах области дифракции S_{diff} и могут рассматриваться как постоянные в дифракционных интегралах. Это предположение означает, что область эффективно усиленной объектной волны много больше, чем размер элемента изображения, т.е. изображение состоит из многих элементов. По этой причине мы обсуждаем фазовые свойства выражения (7.1), описывающего эволюцию поля в нашей схеме, так, как если бы зрачка не было.

7.3. Оптимальный фазовый синхронизм для параметрического усиления

Как отмечалось выше, мы будем предполагать изменение изображения во времени медленным и в (7.1) при вычислении усиленного сигнала будем считать $\Omega \rightarrow 0$. Поскольку выходное поле $e(\rho, \Omega)$ является суммой вкладов от симметричных точек ρ и $-\rho$ объектной плоскости, естественно рассматривать в качестве входного сигнала четную по ρ функцию. Мы считаем, что входное поле находится в когерентном состоянии с комплексной амплитудой $s(\rho)$, и

$$s(\rho) = s(-\rho). \quad (7.10)$$

В случае, когда $s(\rho)$ имеет одну и ту же фазу для всех ρ (например, когда $s(\rho)$ вещественна), волновой фронт входного сигнала в объектной плоскости

плоский и, следовательно, классическая часть входного сигнала выражается через одну и ту же квадратурную компоненту для всех ρ .

Для того чтобы лучше прояснить физическую сущность преобразования (7.1) рассмотрим, что делает это преобразование с комплексной классической амплитудой поля α , которую мы пока будем считать постоянной на всей объектной плоскости. Обозначив амплитуду выходного классического поля через ϵ , получим:

$$\epsilon = u\alpha + v\alpha^* = e^{i\psi} \{ |u| e^{-i\phi} \alpha + |v| e^{i\phi} \alpha^* \}, \quad (7.11)$$

где введены углы ψ и ϕ :

$$\psi = \frac{1}{2} (\arg u + \arg v), \quad \phi = \frac{1}{2} (\arg v - \arg u). \quad (7.12)$$

Определим квадратурные компоненты поля на входе и на выходе кристалла в их собственных системах координат, заданных углами ϕ и ψ :

$$\alpha = e^{i\phi} (\alpha_1 + i\alpha_2), \quad (7.13)$$

$$\epsilon = e^{i\psi} (\epsilon_1 + i\epsilon_2). \quad (7.14)$$

Из (7.11) нетрудно увидеть, что эти собственные квадратурные компоненты связаны преобразованием:

$$\epsilon_1 = e^r \alpha_1, \quad \epsilon_2 = e^{-r} \alpha_2, \quad (7.15)$$

где мы ввели *параметр сжатия* r :

$$e^{\pm r} = |u| \pm |v|. \quad (7.16)$$

Таким образом, результаты преобразования сжатия (7.1) можно свести к следующему.

а) На входе в систему комплексная амплитуда поля и ее область неопределенности должны быть разложены на собственные квадратурные компоненты, определенные выражением (7.13), в системе координат, повернутой на угол ϕ , введенный в (7.12). На рис. 7.2, а это иллюстрируется для когерентного входного состояния с вещественной амплитудой.

б) Квадратурная компонента $e^{i\phi} \alpha_1$ повернута на угол $-\phi$, т. е. ориентирована вдоль вещественной оси, и растянута на величину, определяемую множителем e^r . Квадратурная компонента $i e^{i\phi} \alpha_2$ ориентирована вдоль мнимой оси и сжата с фактором сжатия e^{-r} (см. рис. 7.2, б).

в) Результирующая комплексная амплитуда поля и ее область неопределенности повернуты на угол ψ , определенный в (7.12) (см. рис. 7.2, в). В рассматриваемом примере окончательное состояние системы является сжатым, потому что область неопределенности приобретает форму эллипса с неравными дисперсиями квадратур.

В нашем случае коэффициенты u и v зависят от ρ . Следовательно, фаза $\phi(\rho)$, определяющая направление усиленной квадратурной компоненты, является функцией поперечной координаты ρ . Как результат, мы получаем,

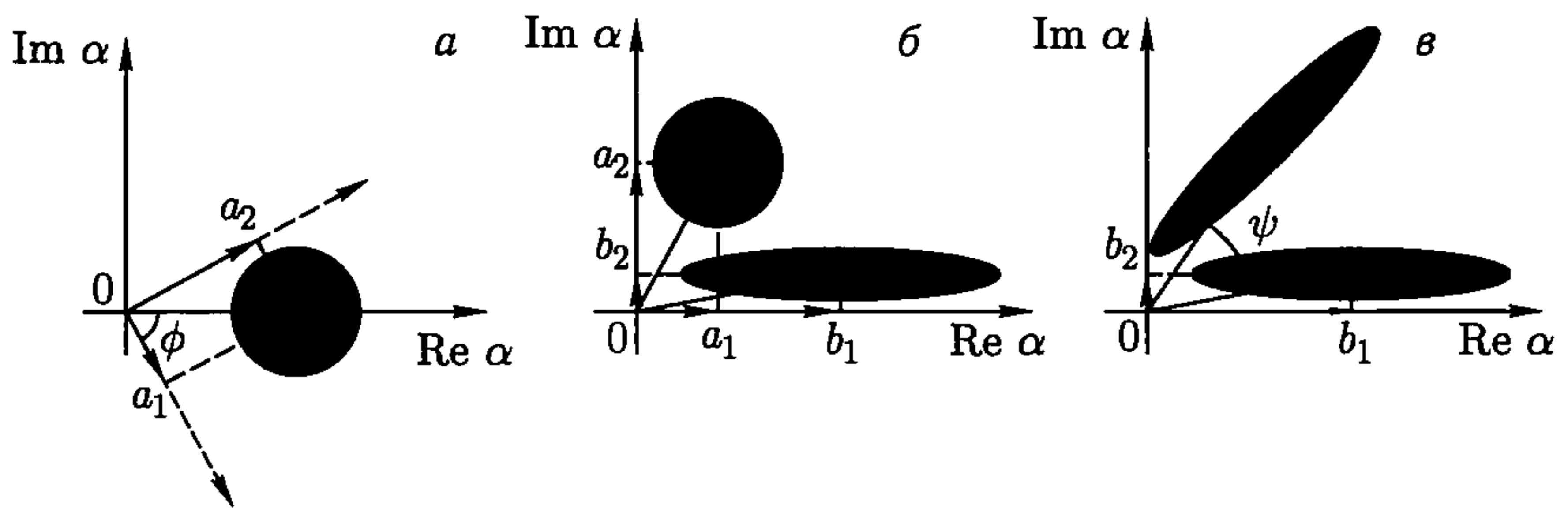


Рис. 7.2. Графическая иллюстрация преобразования сжатия, описываемого выражением (7.1)

что входной классический сигнал $s(\rho)$ с постоянной одинаковой фазой для всех ρ не удовлетворяет условию максимального усиления во всех точках.

Существует две возможности добиться максимума параметрического усиления для всех точек сигнального волнового фронта в объектной плоскости. Первая из них состоит в том, чтобы ввести в падающую объектную волну фазовый сдвиг, зависящий от ρ . В параксиальном приближении этот фазовый сдвиг должен быть квадратичен по ρ , т. е. волновой фронт должен обладать определенной кривизной.

Вторая возможность заключается в коррекции оптической схемы таким образом, чтобы сделать фазу $\phi(\rho)$ независимой от ρ . Из (7.2) и (7.12) следует, что

$$\phi(\rho) = -\frac{1}{2} \arg \left\{ \cosh \Gamma + \frac{i\delta}{2\Gamma} \sinh \Gamma \right\} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\delta \sinh \Gamma}{2\Gamma \cosh \Gamma} \right). \quad (7.17)$$

В интересующем нас случае, когда константа взаимодействия велика, $g \gg 1$, и безразмерная фазовая расстройка относительно мала, $\delta \ll g$, мы можем аппроксимировать функцию $\phi(\rho)$ следующим образом:

$$\phi(\rho) \approx -\frac{\delta(\rho, 0)}{4g} = \frac{\rho^2/\rho_0^2 - \delta_0}{4g}. \quad (7.18)$$

Сдвинем кристалл, линзу L_2 и плоскость детектирования P_4 вместе на некоторое расстояние, так чтобы входная грань кристалла имела теперь координату $z_2 \neq 0$. Как показано в [6], фаза ϕ , определяющая направления усиленной и ослабленной квадратурных компонент сигнала, изменится на $\tilde{\phi}$ согласно формуле:

$$\tilde{\phi} = \phi - \varphi_2(z_2, \rho), \quad (7.19)$$

где

$$\varphi_2(z_2, \rho) = -\rho^2 \frac{k}{2f^2} z_2. \quad (7.20)$$

Физический смысл этих выражений заключается в том, что сигнальная волна, испущенная из точки ρ объектной плоскости, после прохождения линзы L_1 распространяется как наклонная плоская волна с $\mathbf{q} = -(k/f)\rho$. Если кристалл и остальная часть схемы сдвинуты, то дополнительный набег фазы этой волны на входной грани кристалла зависит от $\mathbf{q}$ или ρ квадратично, как видно

из (7.20). Следовательно, правильно выбирая расстояние z_2 , можно устранить зависимость от ρ функции $\tilde{\phi}(\rho)$. Учитывая (7.18), (7.19) и (7.20), получим, что оптимальный выбор z_2 обеспечивается при

$$z_2^{(\text{opt})} = -\frac{2f^2}{k\rho_0^2 4g} = -\frac{l}{2g} = -\frac{l_{\text{amp}}}{2}. \quad (7.21)$$

Здесь $l_{\text{amp}} = l/g$ — характерная длина параметрического усиления в случае большой константы взаимодействия g . Оптимальная настройка оптической схемы достигается, когда плоскость P_2 первого фурье-преобразования располагается на расстоянии $l_{\text{amp}}/2$ вглубь кристалла от его входной грани.

Если положение z_2 выбрано в соответствии с (7.21), усиленная и ослабленная квадратуры сигнального поля в объектной плоскости определяются выражением (7.13), где вместо ϕ фигурирует $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi} = -\delta_0/4g. \quad (7.22)$$

В случае вырожденного фазового синхронизма, $\delta_0 = 0$, вещественная классическая амплитуда входного сигнала $s(\rho)$ равномерно усиливается для всех ρ , по крайней мере — в параксиальном приближении.

Рассмотрим невырожденный фазовый синхронизм с $\delta_0 > 0$. Предположим, что входное изображение можно представить комплексной амплитудой

$$s(\rho) = \exp[i\varphi(\rho)] |s(\rho)|, \quad (7.23)$$

с постоянной фазой $\varphi(\rho) = \tilde{\phi}$, определяемой в (7.22). Из (7.13) следует, что такой сигнал имеет оптимально подобранные квадратурные компоненты. Поскольку фаза $\tilde{\phi}$ не зависит от поперечной координаты ρ , этот выбор может быть осуществлен для всего изображения.

Если сигнал на входе находится в когерентном состоянии, обе квадратурные компоненты квантовых флуктуаций сигнального поля имеют одинаковые дисперсии. Вследствие этого всегда существует усиленная компонента флуктуаций. Ее дисперсия в плоскости фотодетектирования не зависит от описанного выше фазового синхронизма. Напротив, если для сигнального поля во всех точках входного изображения условие оптимального фазового синхронизма не достигнуто (фаза не скорректирована), эффективное параметрическое усиление сигнала меньше, чем усиление квантовых флуктуаций. Это может ухудшить отношение сигнала к шуму для некоторых частей усиленного изображения.

7.4. Квантовые флуктуации в усиленном изображении и условия усиления без добавления шума

В этом разделе мы представим результаты статьи [6], касающиеся среднего числа фотоэлектронов $\langle N_I(\rho, t) \rangle$, собранных с пиксела, расположенного в точке ρ плоскости изображения, а также их дисперсии $\langle \Delta N_I^2(\rho, t) \rangle$. Ис-

пользуя эти величины мы найдем отношение сигнала к шуму R_I в плоскости изображения, определяемое как [18, 19]

$$R_I = \frac{\langle N_I(\rho, t) \rangle^2}{\langle \Delta N_I^2(\rho, t) \rangle}, \quad (7.24)$$

и сравним его с соответствующим значением R_O в объектной плоскости. Наша цель заключается в том, чтобы выяснить условия, обеспечивающие бесшумовую работу схемы, когда два этих значения отношения сигнал-шум совпадают.

Для простоты мы будем использовать два приближения. Во-первых, мы предполагаем, что как область дифракции S_{diff} , так и площадь пиксела S_d малы по сравнению с размером изображения S_O , и для элемента изображения S_{el} выполняется неравенство:

$$S_{\text{diff}}, S_d \leq S_{\text{el}} \ll S_O. \quad (7.25)$$

Такой выбор является естественным, чтобы разрешить детали изображения. Вклад шумовых членов зависит от соотношения между размером пиксела и областью дифракции. В дальнейшем мы рассмотрим две ситуации: $S_d \geq S_{\text{diff}}$ и $S_d \ll S_{\text{diff}}$, и покажем, что в обоих случаях полная процедура (т. е. усиление и измерение) может быть бесшумовой.

Во-вторых, мы рассмотрим ситуацию медленного сигнала, когда время наблюдения T_d можно выбрать большим по сравнению с обратной полосой параметрического усиления $1/\Omega_p$, которая задает временной масштаб усилителя. С учетом этих приближений для среднего числа фотоэлектронов, собираемых с пиксела, расположенного в точке ρ получаем:

$$\langle N_I(\rho, t) \rangle = \eta S_d T_d |s(\rho)|^2 G_\phi(\rho) + \eta \frac{S_d}{S_{\text{diff}}} \frac{T_d}{2\pi} \int d\Omega |v(\rho, \Omega)|^2. \quad (7.26)$$

Здесь $G_\phi(\rho)$ — коэффициент фазово-чувствительного усиления усилителя:

$$G_\phi(\rho) = |\exp[i\varphi(\rho)] u(\rho, 0) + \exp[-i\varphi(\rho)] v(\rho, 0)|^2. \quad (7.27)$$

Вводя разность фаз $\Delta\phi(\rho)$ между усиленной квадратурой и комплексным сигнальным полем в объектной плоскости

$$\Delta\phi(\rho) = \phi(\rho) - \varphi(\rho), \quad (7.28)$$

и параметр сжатия $r(\rho)$,

$$\exp[\pm r(\rho)] = |u(\rho, 0)| \pm |v(\rho, 0)|, \quad (7.29)$$

можем записать коэффициент фазово-чувствительного усиления $G_\phi(\rho)$ следующим образом:

$$G_\phi(\rho) = \cos^2 [\Delta\phi(\rho)] \exp[2r(\rho)] + \sin^2 [\Delta\phi(\rho)] \exp[-2r(\rho)]. \quad (7.30)$$

Максимальное усиление $G = G_\phi(\mathbf{R})$ достигается для таких точек $\rho = \mathbf{R}$, в которых локальная расстройка $\delta(\mathbf{R}, 0)$ исчезает: $\delta(\mathbf{R}, 0) = \delta_0 - (R/\rho_0)^2 = 0$. Для случая вырожденного фазового синхронизма $\delta_0 = 0$ этот максимум находится на оптической оси системы $\mathbf{R} = 0$. Для невырожденного синхронизма с $\delta_0 > 0$ максимум усиления сосредоточен вдоль кольца радиуса R , равного

$$R = \rho_0 \delta_0^{1/2}. \quad (7.31)$$

Из (7.2) и (7.29) следует, что как для вырожденного, так и для невырожденного синхронизма максимум коэффициента усиления G равен

$$G = \exp [2g]. \quad (7.32)$$

На рис. 7.3, а, б изображен коэффициент фазово-чувствительного усиления $G_\phi(\rho)$ в зависимости от поперечной координаты для случаев вырожденного

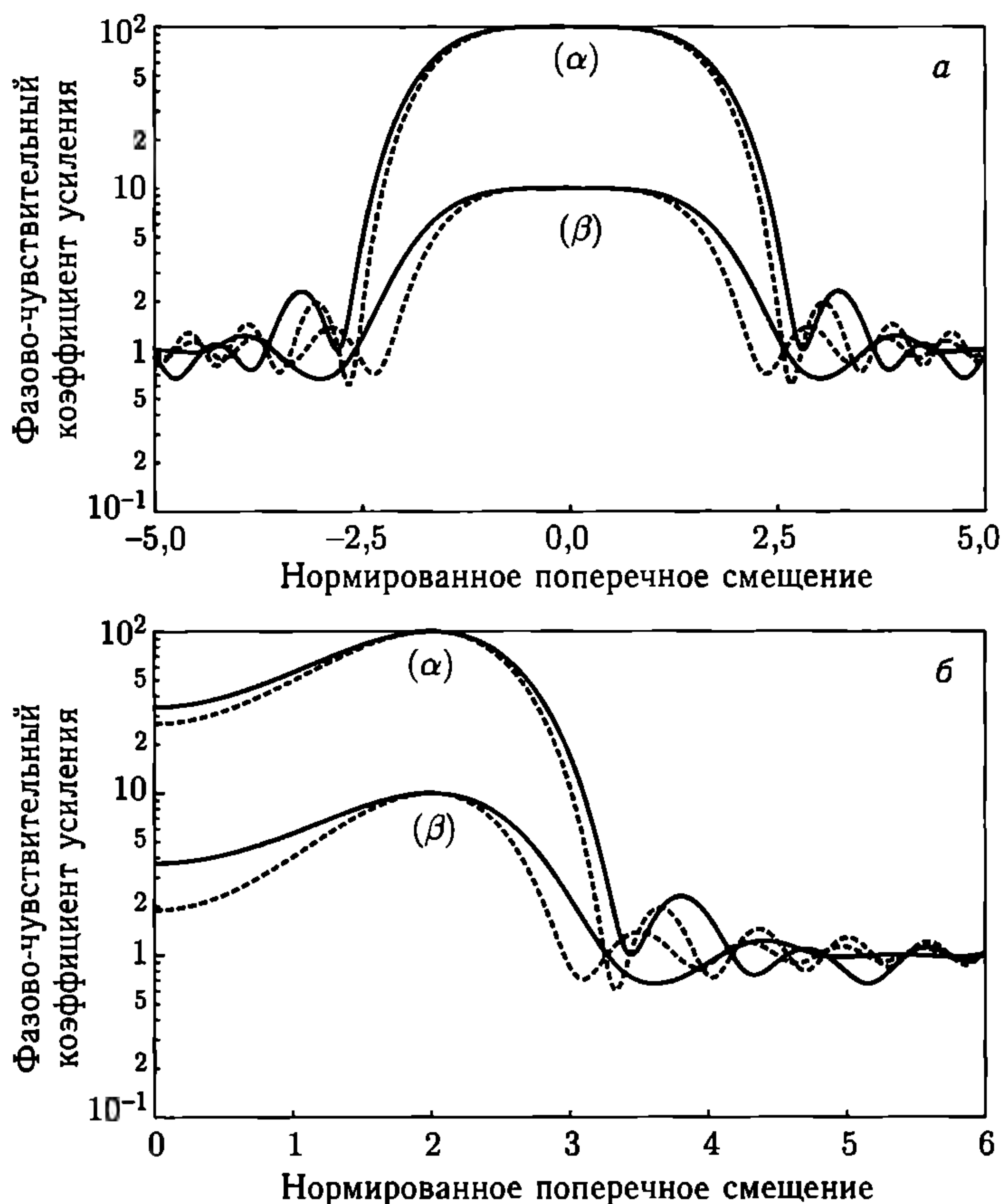


Рис. 7.3. Коэффициент фазово-чувствительного усиления $G_\phi(\rho)$ в зависимости от нормированного расстояния в поперечной плоскости ρ/ρ_0 для вырожденного (а) и невырожденного (б) фазового синхронизма при $\delta_0 = 4$. Кривые α соответствуют максимальному коэффициенту усиления $G = 100$, кривые β — $G = 10$. Пунктирные кривые построены без коррекции фазы, а сплошные — с коррекцией

и невырожденного фазового синхронизма. Пунктирные линии соответствуют профилю коэффициента усиления без коррекции фазы, обсуждавшейся в разд. 7.3, а сплошные — с соответствующей коррекцией. Из рис. 7.3 видно, что в окрестности максимума усиления, коррекция фазы не вносит заметного эффекта. Однако, если отойти от точки $\rho = \mathbf{R}$, кривые усиления с коррекцией фазы оказываются более сглаженными и широкими в обоих случаях вырожденного и невырожденного фазового синхронизма. Рассмотрим сначала ситуацию, когда $S_d \geq S_{\text{diff}}$. В этом пределе дифракционное уширение изображения мало и функцию импульсного отклика $p(\rho)$ можно заменить δ -функцией:

$$p(\rho) = \lambda f \delta(\rho), \quad (7.33)$$

В этом приближении имеем:

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_I^2(\rho, t) \rangle = & \eta S_d T_d |s(\rho)|^2 G_\phi(\rho) [1 - \eta + \eta S_\theta(\rho)] + \\ & + \eta \frac{S_d}{S_{\text{diff}}} \frac{T_d}{2\pi} \int d\Omega |v(\rho, \Omega)|^2 [1 + \eta + 2\eta |v(\rho, \Omega)|^2], \end{aligned} \quad (7.34)$$

где введены угол $\theta(\rho)$ ориентации сжатого эллипса относительно комплексной амплитуды сигнала в плоскости изображения:

$$\theta(\rho) = \psi(\rho) - \arg \left(\exp[i\varphi(\rho)] u(\rho, 0) + \exp[-i\varphi(\rho)] v(\rho, 0) \right), \quad (7.35)$$

и функция сжатия $S_\theta(\rho)$:

$$S_\theta(\rho) = \cos^2 \theta(\rho) \exp [2\tau(\rho)] + \sin^2 \theta(\rho) \exp [-2\tau(\rho)]. \quad (7.36)$$

В выражение (7.34) вносят вклад два источника дробового шума. Один из них пропорционален средней интенсивности усиленного изображения, а второй — средней интенсивности параметрического преобразователя. Член пропорциональный $\eta^2 |s(\rho)|^2 G_\phi(\rho)$ является результатом интерференции усиленного сигнала с шумом, а другой квадратичный по η член — результатом интерференции различных компонент шума друг с другом (автоинтерференции шума). Эта интерференция шумовых компонент определяет собственный шум усилителя, который имеет место даже в отсутствии сигнала на входе.

Как следует из (7.26), среднее число детектируемых фотоэлектронов $\langle N_I(\rho, t) \rangle$ содержит два вклада. Первый пропорционален интенсивности $|s(\rho)|^2$ входного изображения в точке ρ и составляет усиленное изображение. Второй член существует даже, когда сигнал не присутствует на входе, и представляет собственный шум усилителя. Его физическая природа заключается в явлении спонтанного параметрического рассеяния. Этот шумовой член определяет предельно низкий уровень входного сигнала $s(\rho)$, который можно усилить без добавления шума. Действительно, при выполнении условия

$$|s(\rho)|^2 G_\phi(\rho) \gg \frac{1}{S_{\text{diff}}} \frac{1}{2\pi} \int d\Omega |v(\rho, \Omega)|^2, \quad (7.37)$$

можно пренебречь собственным шумом усилителя по сравнению с усиленным сигналом.

В режиме большого усиления, $G \gg 1$, имеет $|u| \simeq |v| \gg 1$, и, следовательно, $G_\phi \simeq 4|v|^2$. Заменяя интеграл в правой части (7.37) оценочным значением $\Omega_p |v(\rho, 0)|^2$, где Ω_p — полоса частот параметрического преобразования, можем переписать неравенство в виде:

$$|s(\rho)|^2 S_{\text{diff}} T_{\text{amp}} \gg 1/4. \quad (7.38)$$

Здесь введен характерный временной масштаб усилителя $T_{\text{amp}} = 2\pi/\Omega_p$. Левая часть неравенства (7.38) дает параметр вырождения входного поля, т.е. среднее число фотонов в элементарном объеме $S_{\text{diff}} T_{\text{amp}}$, зависящее от геометрии усилителя и времени его отклика. Входное поле в таком элементарном объеме усиливается нашей системой как независимая степень свободы. Критерий (7.38) выполняется для вырожденных входных сигналов с относительно малыми квантовыми флуктуациями.

Другое условие бесшумового усиления возникает из выражения (7.34) для дисперсии наблюдаемого числа фотоэлектронов. А именно, последний интеграл в (7.34), описывающий интерференцию компонент шума между собой (автоинтерференцию шума), должен быть мал по сравнению с членом, происходящим от интерференции усиленного сигнала с шумом, т.е. члена, пропорционального $\eta^2 |s(\rho)|^2 G_\phi(\rho)$. Это приводит к неравенству

$$|s(\rho)|^2 S_{\text{diff}} T_{\text{amp}} \gg 1/8, \quad (7.39)$$

которое по порядку величины эквивалентно условию (7.38).

Теперь перейдем к случаю малых пикселей в массиве фотодетектора, $S_d \ll S_{\text{diff}}$. В случае симметричной апертурной функции зрачка $P(\xi) = P(-\xi)$, вместо (7.34) получим:

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_I^2(\rho, t) \rangle = & \eta S_d T_d |s(\rho)|^2 G_\phi(\rho) [1 - \eta' + \eta' S_\theta(\rho)] + \\ & + \eta' \frac{T_d}{2\pi} \int d\Omega |v(\rho, \Omega)|^2 [1 + \eta' + 2\eta' |v(\rho, \Omega)|^2]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Здесь использовано обозначение $\eta' = \eta S_d / S_{\text{diff}}$. Из (7.40) следует, что условие (7.39), необходимое для усиления без добавления шума, остается справедливым также и для случая малых пикселей.

Чтобы количественно оценить шумовые характеристики усилителя, введем коэффициент шума (шум-фактор) F' :

$$F' = \frac{R_O(\eta = 1)}{R_I}. \quad (7.41)$$

Поскольку линейный усилитель не может улучшить отношение сигнал-шум входного изображения, то коэффициент шума F' всегда не меньше единицы.

Мы говорим о случае $F' = 1$ как о бесшумовом усилении. Заметим, что в определении (7.41) отношение сигнала к шуму на входе предполагает идеальное фотодетектирование в входной плоскости. Как разъясняется в [4], эта поправка необходима для того, чтобы получить коэффициент шума, характеризующий шум, добавленный усилителем, а не возникший вследствие несовершенства устройств предваряющих усилитель (таких как неидеальный массив фотодетекторов в объектной плоскости). Без данной поправки, т.е., допуская неидеальное фотодетектирование в объектной плоскости с $\eta < 1$, можно было бы получить коэффициент шума меньше единицы. Физическое объяснение этого «парадокса» заключается в том, что бесшумовой усилитель может компенсировать несовершенство схемы фотодетектирования, имеющееся на стадии предусиления, и тем самым формально «улучшить» отношение сигнал-шум входного изображения, пониженное неидеальным массивом детекторов.

Начнем исследование коэффициента шума со случая $S_d \geq S_{\text{diff}}$. Отношение сигнал-шум в объектной плоскости определяется аналогично (7.24). Поскольку

$$\langle N_O(\rho, t) \rangle = \eta S_d T_d |s(\rho)|^2, \quad \langle \Delta N_O^2(\rho, t) \rangle = \eta S_d T_d |s(\rho)|^2, \quad (7.42)$$

мы находим:

$$R_O = \frac{\langle N_O(\rho, t) \rangle^2}{\langle \Delta N_O^2(\rho, t) \rangle} = \eta S_d T_d |s(\rho)|^2. \quad (7.43)$$

Используя определение отношения сигнал-шум в плоскости изображения (7.24) и учитывая (7.34), получаем:

$$F' = \frac{1}{\eta} \frac{1 - \eta + \eta S_\theta(\rho)}{G_\phi(\rho)}. \quad (7.44)$$

Из рис. 7.2, б сразу видно, что $|\theta(\rho)| \leq |\Delta\phi(\rho)|$. Здесь $\Delta\phi$ — это угол между направлением входного сигнала и вещественной осью, а θ — угол между направлением усиленного (сжатого и растянутого) сигнала и главной осью эллипса сжатия (т.е. опять же вещественной осью). Так как $|\theta(\rho)| \leq |\Delta\phi(\rho)|$, нетрудно убедиться, что коэффициент шума $F'(\rho)$ никогда не может быть меньше единицы. В случае оптимального фазового синхронизма, когда $|\Delta\phi(\rho)| \rightarrow 0$, и в режиме большого усиления $G \gg 1$, коэффициент шума стремится к единице. Это показано на рис. 7.4 для $G = 100$. Рис. 7.4, а отвечает вырожденному, а рис. 7.4, б — невырожденному фазовому синхронизму. В обоих случаях наблюдается улучшение коэффициента шума, достигаемое коррекцией фазы, описанной в разд. 7.3. Сплошные кривые соответствуют коэффициенту шума с такой коррекцией, а пунктирные получены без нее. В наших численных расчетах мы вводили оптимальный фазовый синхронизм, задавая входной сигнал в виде (7.23), где фаза сигнала $\varphi(\rho)$ выбиралась равной фазе $\phi(\rho)$ усиленной квадратуры. Видно, что фазовая коррекция заметно расширяет область бесшумового усиления. Большие пики избыточного шума на периферии пунктирной кривой почти полностью исчезают в сплошной

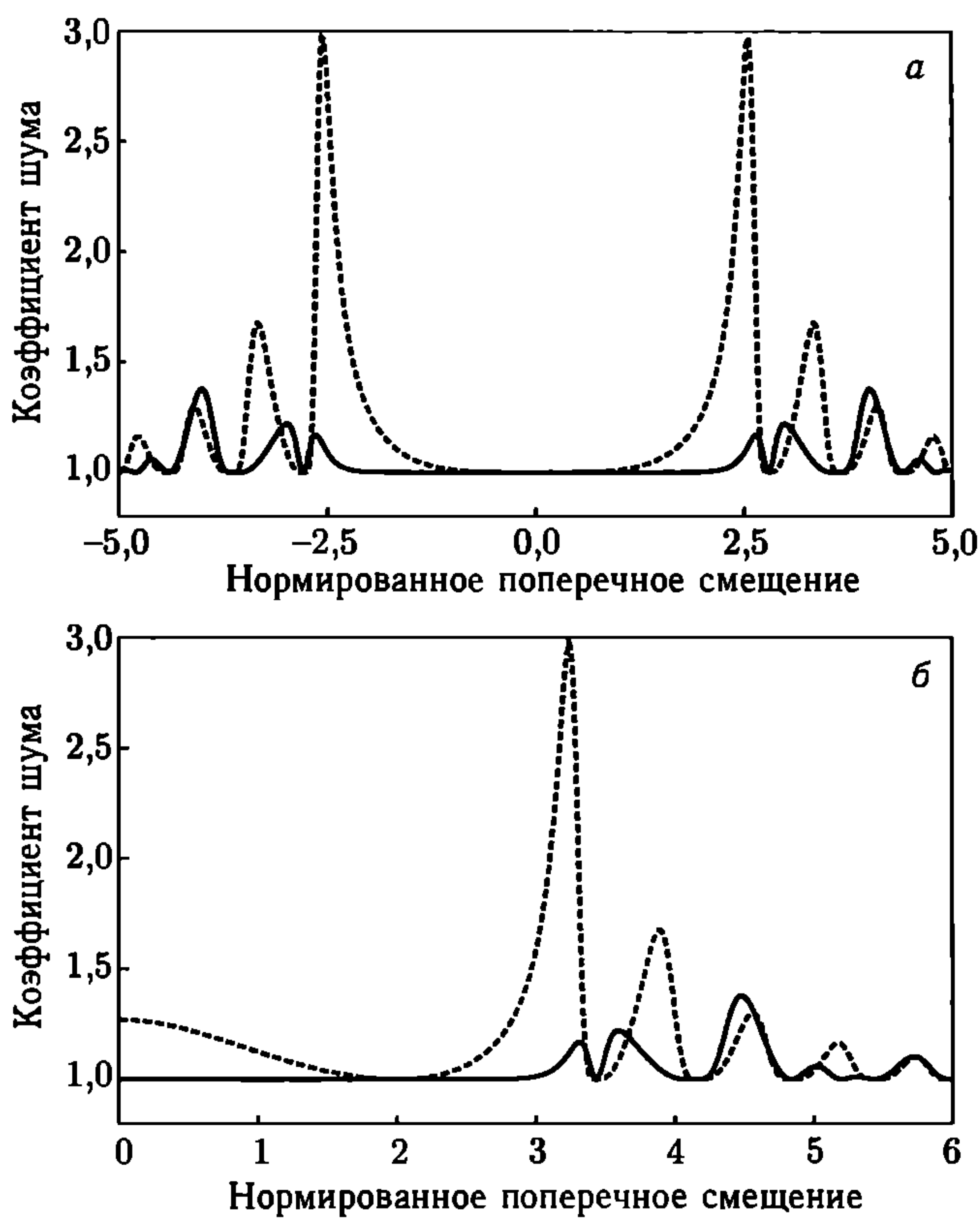


Рис. 7.4. Коэффициент шума $F'(\rho)$ как функция нормированного расстояния в поперечной плоскости ρ/ρ_0 для вырожденного (а) и невырожденного (б) фазового синхронизма при $\delta_0 = 4$. Максимальный коэффициент усиления $G = 100$. Пунктирные кривые построены без коррекции фазы, а сплошные — с коррекцией

кривой. Следовательно, влияние оптимального фазового синхронизма как на ход кривой усиления (см. рис. 7.3), так и на поведение коэффициента шума наиболее выражено на периферийных участках изображения, где происходит существенная дефазировка сигнального поля и квадратуры усиленного поля.

В случае малых пикселей, $S_d \ll S_{\text{diff}}$, коэффициент шума имеет вид:

$$F' = \frac{1}{\eta} \frac{1 - \eta' + \eta' S_{\theta}(\rho)}{G_{\phi}(\rho)}. \quad (7.45)$$

Когда коэффициент фазово-чувствительного усиления G столь велик, что $\eta G S_d / S_{\text{diff}} \gg 1$, выражение (7.45) дает столь же малый коэффициент шума, насколько мало отношение $S_d / S_{\text{diff}} \ll 1$. Таким образом в схеме с малыми фотодетекторами в режиме большого параметрического усиления отношение сигнала к шуму улучшается. Эта ситуация похожа на случай неидеального детектирования в объектной плоскости, обсуждавшийся выше и рассмотренный в [4].

Оба эффекта — и детектирование пикселями с низкой квантовой эффективностью $\eta < 1$, и детектирование пикселями малого размера $S_d \ll S_{\text{diff}}$,

приводят к потерям света из элементарного объема $cS_{\text{diff}}T_{\text{амп}}$, играющего в нашем случае роль единственной степени свободы системы. Эти потери ухудшают отношение сигнал-шум входного изображения, так как изображение обладает пуассоновскими квантовыми флуктуациями. Параметрическое усиление преобразует пуассоновский квантовый шум в избыточные суперпуассоновские флуктуации, которые существенно менее чувствительны к потерям света, вызванным неидеальным детектированием. Действительно, хорошо известно, что неидеальное детектирование уменьшает в равной степени как сигнал, так и избыточный шум, не изменяя при этом отношения сигнал-шум. Поэтому получаем улучшение отношения сигнал-шум в плоскости изображения, разрушенное потерями в объектной плоскости.

Можно также сказать, что вследствие дифракции в усилителе детектор малого размера S_d , помещенный в плоскости изображения, собирает информацию о квантовом состоянии порции света, приходящего из области дифракции S_{diff} в объектной плоскости. Практически важное следствие из (7.45) состоит в том, что возможно уменьшать размер пиксела без ухудшения отношения сигнала к шуму до тех пор, пока $\eta G S_d / S_{\text{diff}} \gg 1$. Этот вывод может оказаться очень важным в таких приложениях, где пытаются уменьшить количество информации без существенного ухудшения отношения сигнала к шуму, например, в машинном зрении.

Суммируя все вышесказанное, можно заключить, что оптимальный выбор для бесшумового усиления с достаточно хорошим пространственным разрешением реализуется при $S_O \gg S_{\text{el}} \geq S_d \geq S_{\text{diff}}$. При таком выборе параметров, число элементов изображения разрешаемых усилителем оценивается как

$$N_{\text{el}} \leq \frac{S_O}{S_{\text{diff}}} \simeq \frac{S_P}{S_{\text{coh}}}, \quad (7.46)$$

где $S_{\text{coh}} = (2\pi/q_p)^2$ — область когерентности параметрического света в выходной плоскости кристалла; q_p — рабочая полоса пространственных частот кристалла [20]. При выводе (7.46) использовано (7.9) и оценка $S_O \simeq (fq_p/k)^2$. Неравенство (7.46) показывает, что существует две возможности оценить число пространственных степеней свободы нашего усилителя. В объектной плоскости размера S_O число степеней свободы определяется значением S_{diff} , а в поперечном сечении параметрического кристалла размера S_P — значением S_{coh} .

7.5. Экспериментальная демонстрация усиления изображений без временного шума

В первом эксперименте, где получено бесшумовое усиление изображения, рассматривались временные флуктуации, влияющие на пространственную картину [16]. Экспериментальная установка, показанная на рис. 7.5, представляла собой однопроходной ОПУ, центр кристалла которого совпадает с плоскостью изображения, связанной с объектом (испытательным рисунком). Возможность бесшумовой работы такой схемы была теоретически предска-

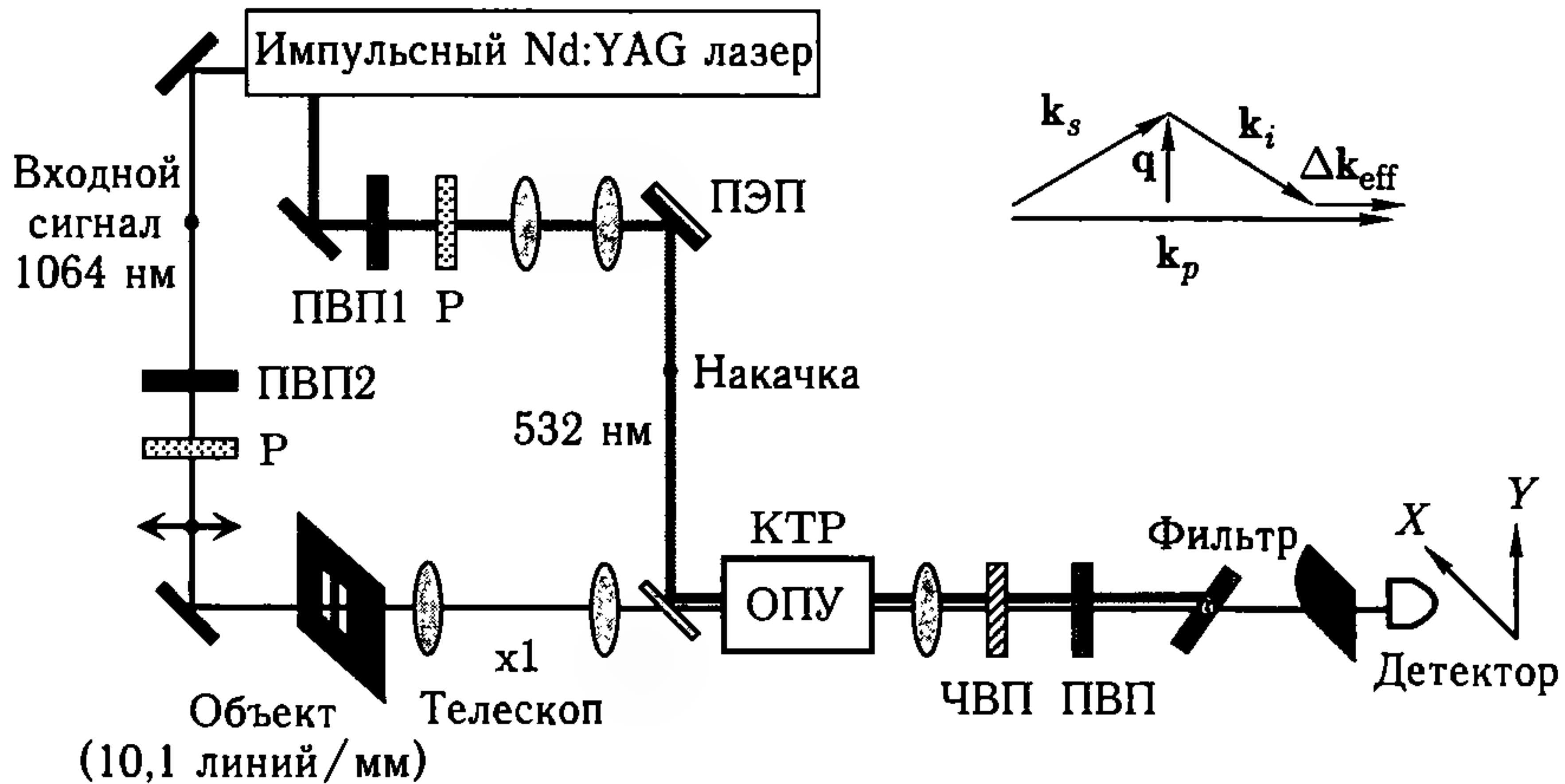


Рис. 7.5. Схема экспериментальной установки для измерения пространственного одномерного профиля интенсивности и мощности шума изображения, усиленного однопроходным ОПУ. Сигнал обратной связи от пьезоэлектрического преобразователя используется для захвата фазы и настройки на максимальное усиление в фазово-чувствительной конфигурации. В правом верхнем углу показана диаграмма фазового синхронизма для волновых векторов (ПВП, ПВП1 и ПВП2 — полуволновые пластины, ЧВП — четвертьволновая пластина, ПЗП — пьезоэлектрический преобразователь)

на в [7] и аналогична возможностям схемы, описанной в предшествующих разделах, где кристалл находится в фурье-плоскости. Импульсы сигнала и накачки создавались, соответственно, основной (1064 нм) и второй (532 нм) гармониками излучения Nd:YAG лазера с синхронизацией мод и модулируемой добротностью резонатора; частота повторения импульсов составляла 1 кГц. Результирующие огибающие для импульсов накачки и сигнала имели длительности $\simeq 145$ и $\simeq 200$ нс соответственно. Синхронизированные по фазе импульсы накачки и сигнала под огибающими по оценкам составляли $\simeq 85$ и $\simeq 120$ пс соответственно. Усиление происходит в кристалле КТР; мы использовали два образца длиной 3,25 мм и 5,21 мм. Сигнал поляризован под углом 45° к главным оптическим осям кристалла, для того чтобы инжектировать и сигнальную и холостую волны усилителя и получить фазово-чувствительное усиление. Чтобы обеспечить максимальное параметрическое усиление, фаза пучка накачки синхронизирована с фазой сигнального пучка с помощью петли обратной связи, управляемой пьезоэлектрическим преобразователем. Объект, освещенный сигнальным пучком, состоит из двух вертикальных штрихов — тестовой картины военно-воздушных сил США. Эти штрихи отображаются телескопом в центр кристалла без изменения размера. Пространственная частота, соответствующая этим штрихам, 10,1 штрихов/мм, выбрана достаточно низкой, чтобы заведомо укладываться в пространственную рабочую полосу усилителя [9], и достаточно высокой, чтобы обеспечить однородность освещения пучком накачки. Размер усиленного изображения после выхода из кристалла увеличивают в 24 раза, чтобы обеспечить пространственное разрешение при сканировании InGaAs детектора диаметром 300 мкм. Во временном представлении рабочая полоса параметрического усилителя много больше полосы детектора, что

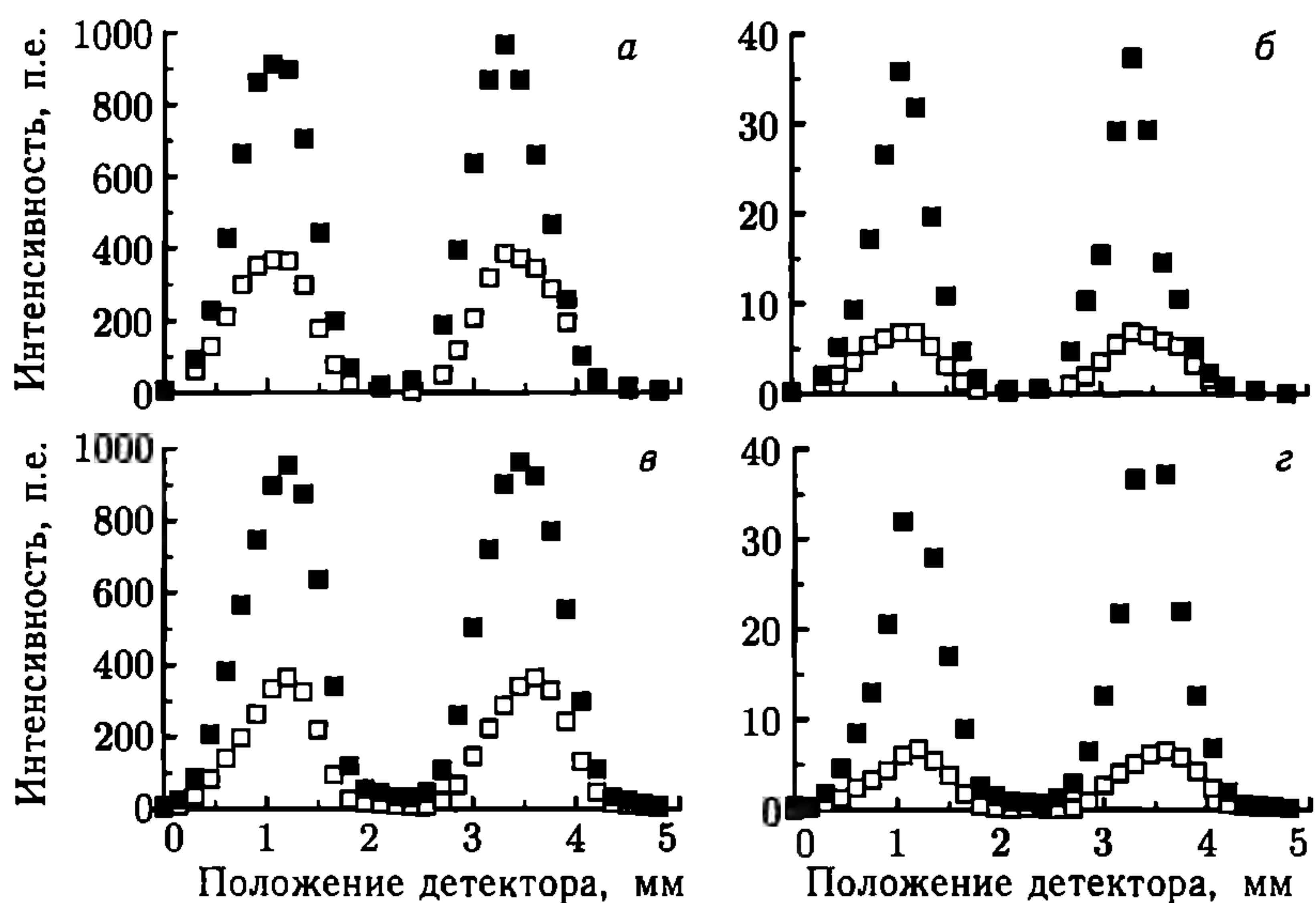


Рис. 7.6. Пространственные одномерные профили интенсивности (слева) и мощности шума (справа) для кристалла КТР длиной 3,25 мм (сверху) и 5,21 мм (внизу). Профили изображены как для не усиленных (белые квадраты), так и для усиленных (черные квадраты) изображений

гарантирует одинаковое усиление для постоянного тока и для фототока на частоте 27 МГц. Поэтому экспериментальный коэффициент шума можно просто определить как

$$NF = \frac{\text{Коэффициент усиления мощности шума}}{\eta (\text{Коэффициент усиления средней интенсивности})^2}, \quad (7.47)$$

где мощность шума фототока записывалась на частоте 27 МГц. На рис. 7.6 показаны пространственные профили сигнала и шума изображения, записанные сканирующим фотодетектором. Для того, чтобы уменьшить влияние пространственного усреднения, имеющее место из-за конечного размера фотодетектора, при расчете коэффициента шума использовались экспериментальные значения коэффициента усиления, измеренные в пиках пространственных профилей. Наблюдавшееся пиковое значение коэффициента усиления по интенсивности составляет $G \simeq 2,5$, в то время как усиление по мощности шума было меньше, чем квадрат усиления по интенсивности, поскольку усиленное изображение меньше ухудшается при детектировании, чем входное, ограниченное дробовым шумом. Принимая во внимание измеренную квантовую эффективность фотодетектора $\eta = 0,82$ и пользуясь формулой (7.47), мы получили следующие значения интегрального коэффициента шума NF оптического усилителя: $(0,2 \pm 0,6)$ дБ при $G = 2,5$ для кристалла КТР длиной 3,25 мм и $(0,4 \pm 0,6)$ дБ при $G = 2,6$ для кристалла КТР длиной 5,21 мм. Эти значения согласуются с теоретическими, рассчитанными для фазово-чувствительного усилителя. Они ясно показывают улучшение, полученное благодаря предварительному усилению, если сравнить их с коэффициентом шума детектора $NF = 0,86$ дБ. Эти значения почти на 2 дБ ниже квантового

предела для идеального фазово-нечувствительного усилителя с таким же усилением.

7.6. Эксперимент по усилению изображений без пространственного шума

Эксперимент, описанный в предыдущем разделе показывает, что фазово-чувствительная схема позволяет сохранить неизменным отношение сигнал-шум во всем изображении, когда шум записывается фотодиодом на частоте 27 МГц. Поскольку фотодиод сканировал изображение, этот результат доказывает, что фазово-чувствительное усиление улучшает регулярность во времени распределения фотонов в каждой точке изображения. Однако, поскольку запись флуктуаций осуществлялась только во временном представлении, она не показывает нам напрямую пространственную регулярность. Однако, изображения несут чисто пространственную информацию (без какого-либо временного аспекта), которая полностью теряется под действием пространственных флуктуаций квантовой природы для очень слабо выраженных изображений. Эксперимент, описанный в этом разделе [17], призван оценить влияние этих пространственных флуктуаций.

Квантовые свойства шума оптического параметрического усилителя описываются коэффициентом шума $NF = SNR_{in}/SNR_{out}$. Однако, в то время как SNR_{out} — это отношение сигнала к шуму, полученное в результате измерения детектором с квантовой эффективностью $\eta < 1$, отношение сигнала к шуму SNR_{in} пуассоновского пучка¹⁾ на входе схемы не является непосредственно измеряемой величиной. Величина, которую можно измерить — это отношение сигнала к шуму в опыте без усиления, что приводит к умножению отношения сигнал-шум входного сигнала и коэффициента шума на общую квантовую эффективность системы η_{tot} . В отличие от «теоретического» коэффициента шума F' , определенного выражением (7.44), экспериментальное значение $R = \eta_{tot} \times F'$ может быть и меньше единицы. Это объясняется тем, что усиленное изображение ухудшается из-за детектирования меньше, чем входное, ограниченное дробовым шумом (см. обсуждение перед (7.42)). Кроме того, использование детектора с размером пикселей S_d много меньше, чем область когерентности S_{diff} усиленного изображения, эквивалентно умножению квантовой эффективности на отношение S_d/S_{diff} (см. (7.45)). Заметим, что такое уменьшение отношения сигнал-шум из-за использования пикселей малых размеров можно эффективно исправить усилением в случае временных флуктуаций, тогда как данное улучшение является артефактом для пространственных сигналов, потому что сам ОПУ не пропускает ни сигнал, ни шум на больших пространственных частотах. Экспериментальная установка основана на работе однопроходного ОПУ и похожа на установку, описанную в [9] (см. рис. 7.7). Сигнальной волной и волной накачки служили, соответственно, вторая гармоника (импульсы длительностью 1,2 пс

¹⁾ Под пуассоновским пучком авторы имеют в виду пучок в когерентном состоянии с пуассоновской статистикой фотонов.

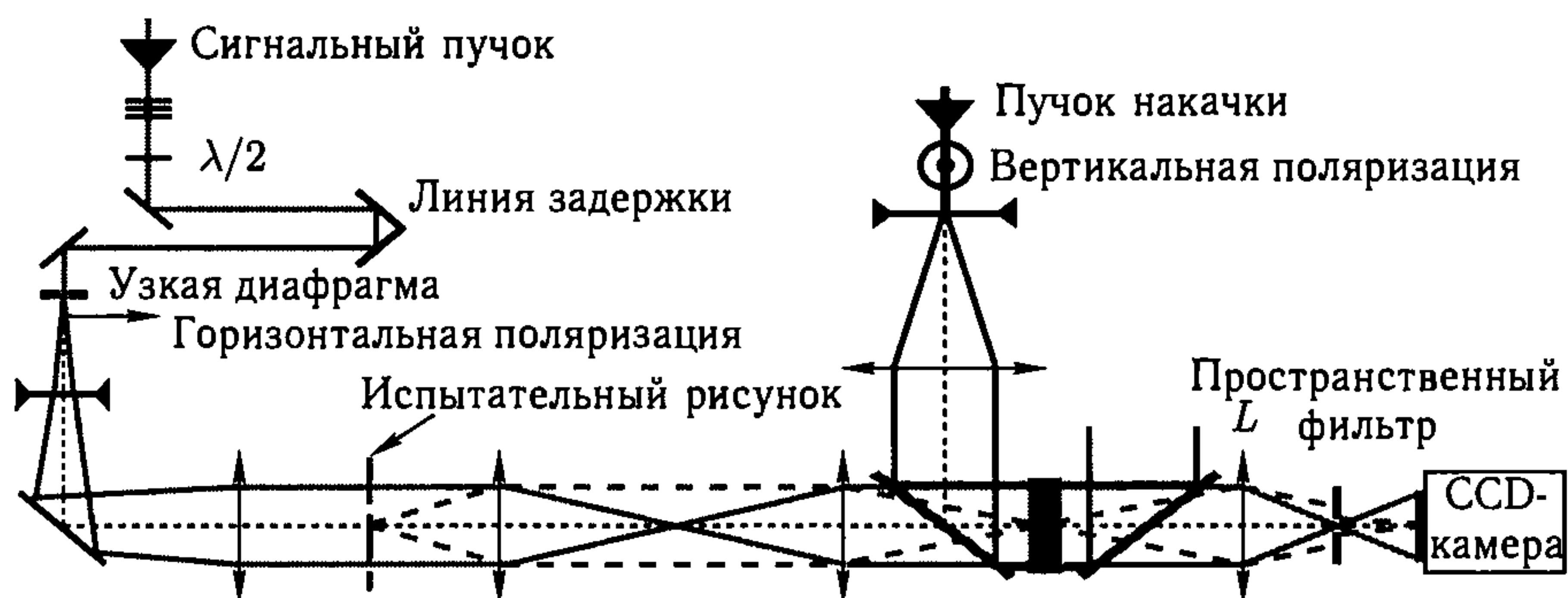


Рис. 7.7. Экспериментальная установка для усиления без добавления пространственного шума

на длине волны 527,5 нм) и четвертая гармоника (импульсы длительностью 0,93 пс на длине волны 263,7 нм) лазера на неодимовом стекле с синхронизацией мод и модулированной добротностью резонатора при частоте повторения 33 Гц. Усиление производится кристаллом ВВО (бета-борат бария), поперечный размер которого $7 \times 7 \text{ мм}^2$ обеспечивает достаточное число различных элементов усиленного изображения, чтобы обеспечить правильную статистику. Длина кристалла 4 мм ограничена разностью групповых скоростей ультрафиолетового излучения накачки и зеленого света сигнала. Вследствие высокой дисперсии кристалла в ультрафиолетовой области, для выбранных длин волн возможно только параметрическое усиление первого типа. Следовательно, коллинеарное взаимодействие волн является фазово-чувствительным, а небольшой угловой сдвиг между накачкой и сигнальным пучком обеспечивает фазово-нечувствительное усиление, как показано на рис. 7.8. Сигнальный пучок расширялся телескопом и освещал испытательный рисунок. Штрихи этого рисунка проецировались на входную грань кристалла вторым телескопом, а затем отображались на CCD-камеру линзой L (схема работы [7]). CCD-камера включала в себя освещаемый со стороны подложки массив тонких кремниевых элементов, охлажденных до -40°C для обеспечения пренебрежимо малого темнового тока и низкого шума считывания. Чтобы согласовать волновые фронты, перетяжки сигнального пучка и пучка накачки совмещались друг с другом внутри кристалла. Фильтрующая апертура помещалась в фурье-плоскости и центрировалась около нулевой пространственной частоты сигнального изображения. Она ограничивала детектируемую интенсивность спонтанного параметрического рассеяния (СПР) и обеспечивала устранение холостой волны в схеме фазово-нечувствительного усиления (ФНЧУ). Однако, эта апертура также уменьшала пространственную спектральную полосу детектируемого изображения, и в опыте размер S_{diff} не определялся больше условием фазового синхронизма, а зависел от диаметра апертуры, так что поперечный размер S_{diff} был равен 7,3 пикселям камеры. Далее мы представим результаты при различном группировании пикселов (полученные при компьютерной обработке данных) для того, чтобы рассмотреть ситуации, когда эффективный размер детектора S_d больше или меньше S_{diff} . Коэффициент шума NF зависит от полной результирующей квантовой эффективности системы η_{tot} , которая вычисляется как произведение квантовой эффективно-

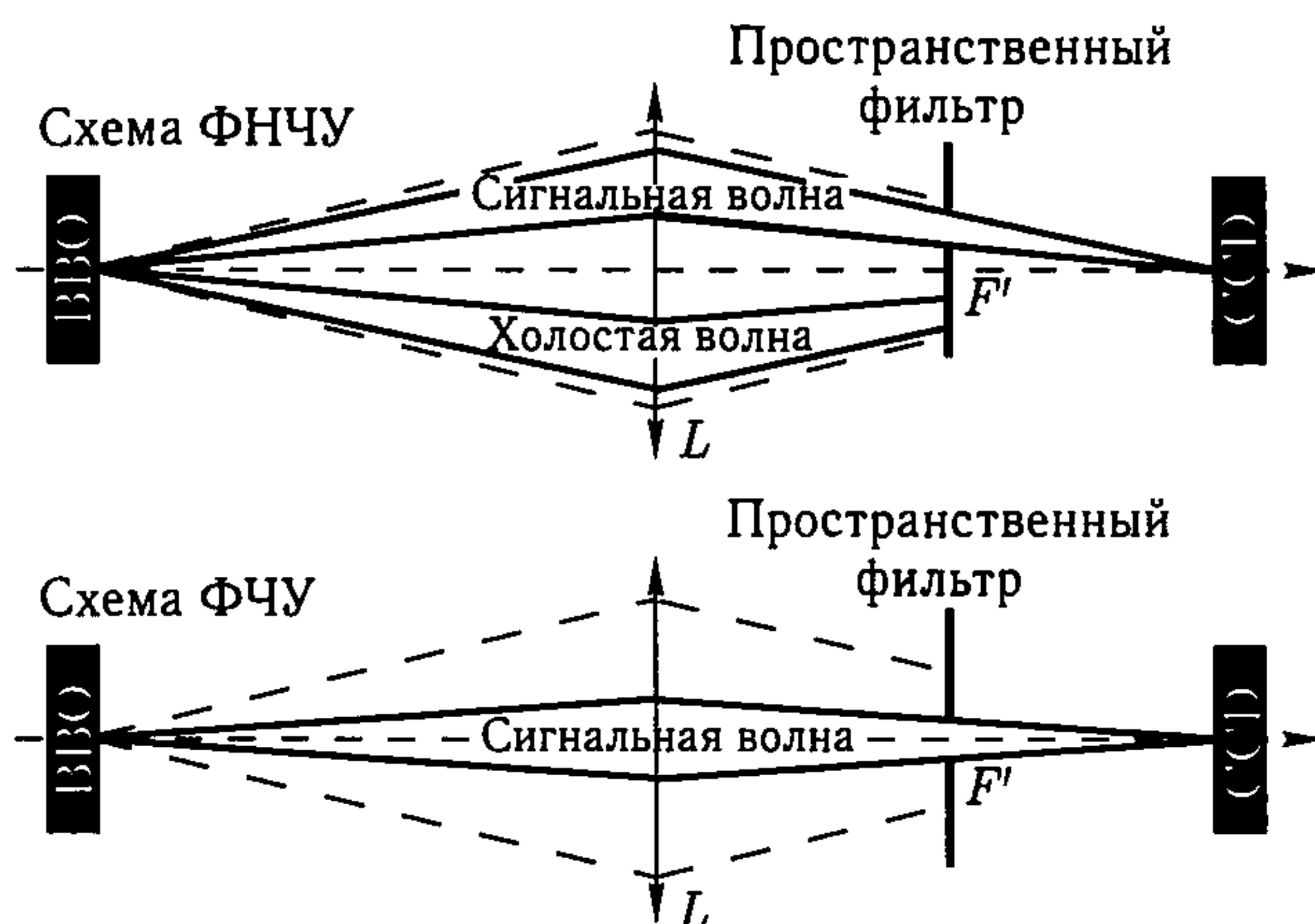


Рис. 7.8. Условия неколлинеарного (наверху, схема фазово-нечувствительного усиления (ФНЧУ)) и коллинеарного (внизу, схема фазово-чувствительного усиления (ФЧУ)) фазового синхронизма. Штриховые линии показывают пространственную спектральную полосу ОПУ. Сплошными линиями отмечена область разрешения

сти CCD-камеры η_{CCD} на эффективность пропускания оптических элементов η_{opt} , расположенных после кристалла:

$$\eta_{\text{tot}} = \eta_{\text{opt}} \times \eta_{\text{CCD}} = 0,69 \times 0,9 = 0,62 \pm 0,10. \quad (7.48)$$

Неопределенность происходит из оценки η_{opt} , в то время как величина η_{CCD} указывается производителем.

Экспериментальная процедура измерения R включает три основных шага, одинаковые для схем ФНЧУ и ФЧУ. Первый шаг состоит в измерении отношения сигнал-шум без усиления (т. е., $\eta_{\text{tot}} \times \text{SNR}_{\text{in}}$), одновременно с проверкой предположения о пуассоновости статистики излучения. Вторым шагом является измерение интенсивности СПР; ее уровень вычитается из усиленного изображения. Последний шаг заключается в измерении SNR_{out} . На первом шаге имеющаяся стабильность лазера от импульса к импульсу является достаточной, чтобы оценить искомый уровень во входных изображениях по набору из около 20 записей неусиленных изображений. В схеме ФНЧУ было записано две серии данных при разных уровнях интенсивности. Для каждой серии измерений мы проверили, что несгруппированные изображения хорошо описываются пуассоновской статистикой распределения, в то время как группировка ухудшает это распределение из-за остаточных систематических ошибок. Тем не менее статистика экспериментальных данных, полученных при расчете разности между двумя изображениями из серии, остается пуассоновской, поскольку вычитание изображений ликвидирует систематические ошибки:

$$\eta_{\text{tot}} \times \text{SNR}_{\text{in}} = \langle n \rangle_p \times S_d = \langle n \rangle, \quad (7.49)$$

где S_d — площадь детектора после группировки, выраженная в пикселах. В (7.49) и далее $\langle n \rangle_p$ — среднее число фотоэлектронов, приходящееся на один пиксел, а $\langle n \rangle$ — число фотоэлектронов, приходящееся на площадку S_d ,

полученное суммированием уровней яркости на пикселах и умножением на соответствующий масштабный множитель.

Чтобы оценить уровень СПР, записывалось 20 изображений в режиме, когда инжектировалась только накачка. Поскольку фазовый синхронизм первого типа не критичен к длине волны [11], СПР существенно многомодово во времени. Эти моды складываются некогерентно, и каждая временная мода обладает тепловой статистикой [21]. Число временных мод оценивается экспериментально как

$$M_t = \frac{(\langle n \rangle_p^{\text{SPDC}} / \eta_{\text{tot}}) \times S_{\text{diff}}}{G - 1}, \quad (7.50)$$

где $\langle n \rangle_p^{\text{SPDC}}$ — средний уровень СПР, приходящийся на пиксел, до группировки; G — коэффициент усиления ОПУ. Следовательно, дисперсия СПР на сгруппированном пикселе равна:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle_{\text{SPDC}} = \frac{\langle n \rangle_{\text{SPDC}}^2}{M_t} + \langle n \rangle_{\text{SPDC}}, \quad (7.51)$$

где первое слагаемое в правой части (7.51) описывает классические флуктуации, а второе — дробовый шум. Выражение (7.51) не учитывает систематических изменений СПР, возникающих, например, из-за несовершенства профиля накачки. Однако этими эффектами нельзя пренебречь при большой группировке пикселей во время прямого измерения дисперсии СПР. Поскольку систематические изменения не вносят вклад при исследовании разностных изображений, для нахождения дисперсии СПР предпочтительнее использовать выражение (7.51), а не прямые измерения.

Измерение SNR_{out} выполнялось, используя одиночный импульс накачки для построения изображения, чтобы исключить сильные колебания усиления от импульса к импульсу в фазово-чувствительной схеме, которые возникают вследствие неконтролируемых изменений относительной фазы между сигнальным полем и накачкой. Осуществление такого контроля затрудняется низкой частотой повторения как лазерных импульсов (33 Гц), так и камеры (< 1 Гц). В усиленном изображении преобладает классический шум, возникающий из-за систематических несовершенств системы (пучка накачки, линз и т. п.), и хорошие результаты удастся получить, только выполняя разностные исследования изображений, чтобы исключить пространственные дефекты, воспроизводимые от импульса к импульсу. SNR_{out} измеряется следующим образом: 1) в усиленном изображении выделяется область с приблизительно постоянной средней интенсивностью; 2) измерение отношения сигнал-шум на всех усиленных изображениях без вычитания позволяет выделить изображения с наиболее высоким отношением сигнал-шум; 3) все отобранные изображения разбиваются на пары путем перебора всех возможных комбинаций; 4) для каждой пары вычисляются среднее значение и дисперсия при разных группировках пикселей: среднее значение вычисляется как среднее арифметическое между двумя изображениями, скорректированное вычитанием электронной «подставки» $\langle n \rangle_b$ и переведенное в фотоэлектроны. Наконец,

из полученного вычитается среднее значение СПР. Итоговая формула для вычисления среднего записывается следующим образом:

$$\langle n \rangle = g \times (\langle n \rangle_{gl} - \langle n \rangle_b) - \langle n \rangle_{SPDC}, \quad (7.52)$$

где $g = 0,97 (pe^-) \times (gl)^{-1}$ — коэффициент пересчета уровня яркости (gl) в фотоэлектроны (pe^-). Дисперсия усиленного изображения вычисляется как половина дисперсии разности изображений, из которой следует вычесть дисперсию шума считывания $\langle (\Delta n)^2 \rangle_{subread}$ и дисперсию СПР:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \frac{1}{2} \left\{ [\langle (\Delta n)^2 \rangle_{sub} - \langle (\Delta n)^2 \rangle_{subread}] - 2 \langle (\Delta n)^2 \rangle_{SPDC} \right\}. \quad (7.53)$$

Отношение сигнал-шум для каждого значения площадки детектора рассчитывается как

$$SNR_{out} = \frac{\langle n \rangle^2}{\langle (\Delta n)^2 \rangle}. \quad (7.54)$$

Из этой величины и соответствующего значения $\eta_{tot} \times SNR_{in}$ определяется отношение R для каждой пары изображений, а также оценивается среднее R из анализа всех пар. Уровень экспериментальной погрешности определяется как удвоенное среднеквадратичное отклонение деленное на квадратный корень из числа отобранных пар изображений. В схеме ФНЧУ было записано около 100 усиленных изображений для каждой серии неусиленных изображений; коэффициент усиления для каждого изображения оценивался по среднему в соответствующей серии неусиленных изображений. Изменения усиления обусловлены флуктуациями лазера от импульса к импульсу.

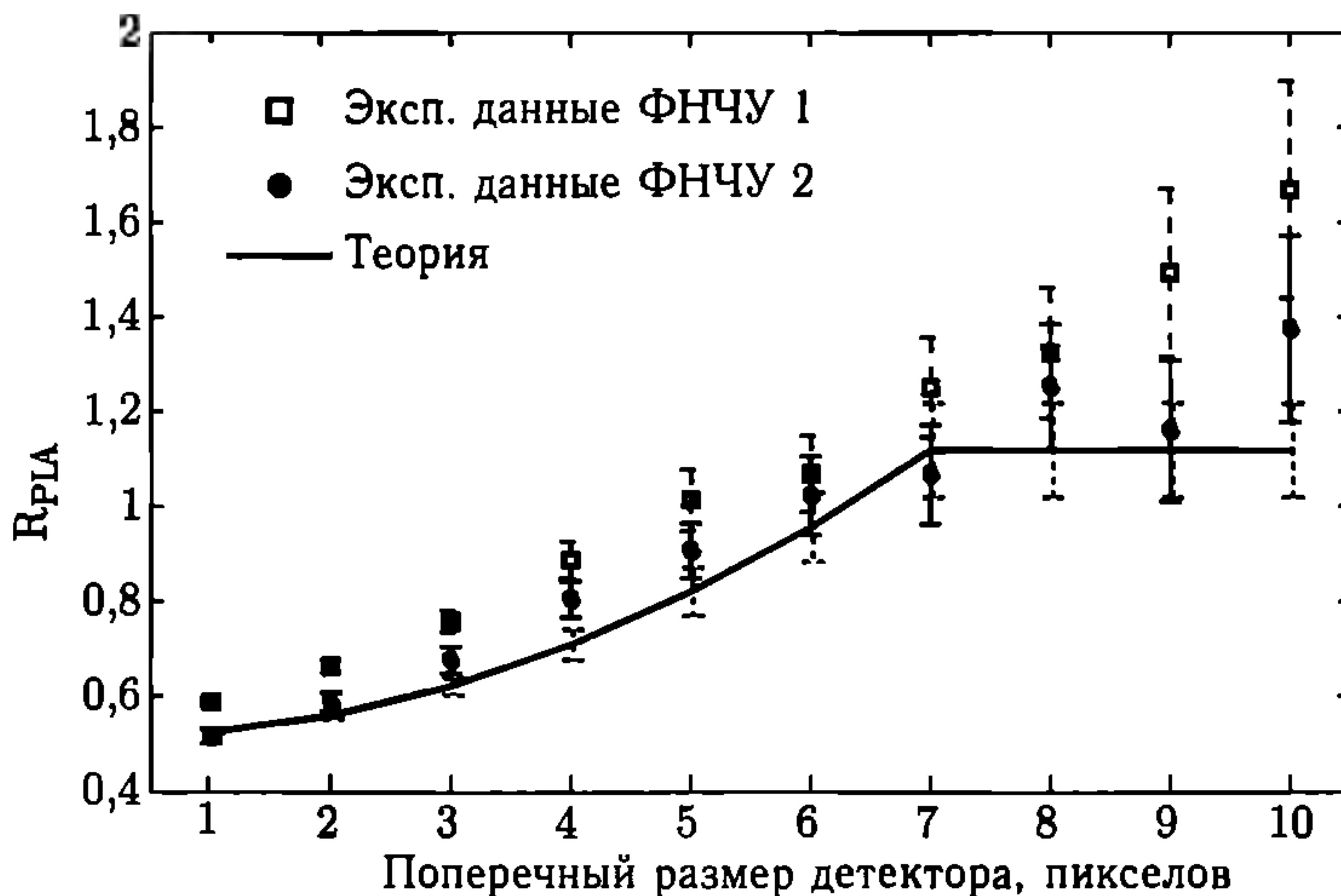


Рис. 7.10. Коэффициент шума NF в схеме ФНЧУ в зависимости от размера детектора. Квадраты — первая серия экспериментальных данных (уровень погрешности отмечен пунктиром). Кружки — вторая серия экспериментальных данных (уровень погрешности отмечен сплошной линией). Сплошная кривая соответствует теоретическому расчету (уровень погрешности отмечен жирным пунктиром)

Средний коэффициент усиления был равен $G_{PIA} = 1,6 \pm 0,5$. Для каждой серии измерений было отобрано 10 изображений с постоянным усилением. На рис. 7.9 (см. вклейку) представлен пример отобранного изображения. Рис. 7.10 демонстрирует зависимость коэффициента шума NF при измерении в схеме ФНЧУ от размера детектора. При $S_d \geq S_{diff}$ теоретическое значение R равно $R_{PIA} = 1,1 \pm 0,1$. При $S_d < S_{diff}$ используется значение $\eta_{tot} \times (S_d/S_{diff})$ так же, как и в выражении (7.40), хотя это предположение корректно только, когда $S_d \ll S_{diff}$, как объяснено ранее. Погрешность определяется погрешностью величины η_{tot} в выражении (7.48). Видно, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретической кривой. Различие между двумя сериями данных, полученными при одних и тех же условиях, остается в пределах погрешности благодаря случайному характеру флуктуаций. В схеме ФЧУ было записано около 500 изображений, для каждого из них измерялся коэффициент усиления, диапазон значений которого составлял от 1 до 6 (см. рис. 7.11). Поскольку относительная фаза (между сигнальным полем и полем накачки) не контролировалась, оказалось более затруднительным найти пары изображений, которые одновременно соответствовали бы и оди-

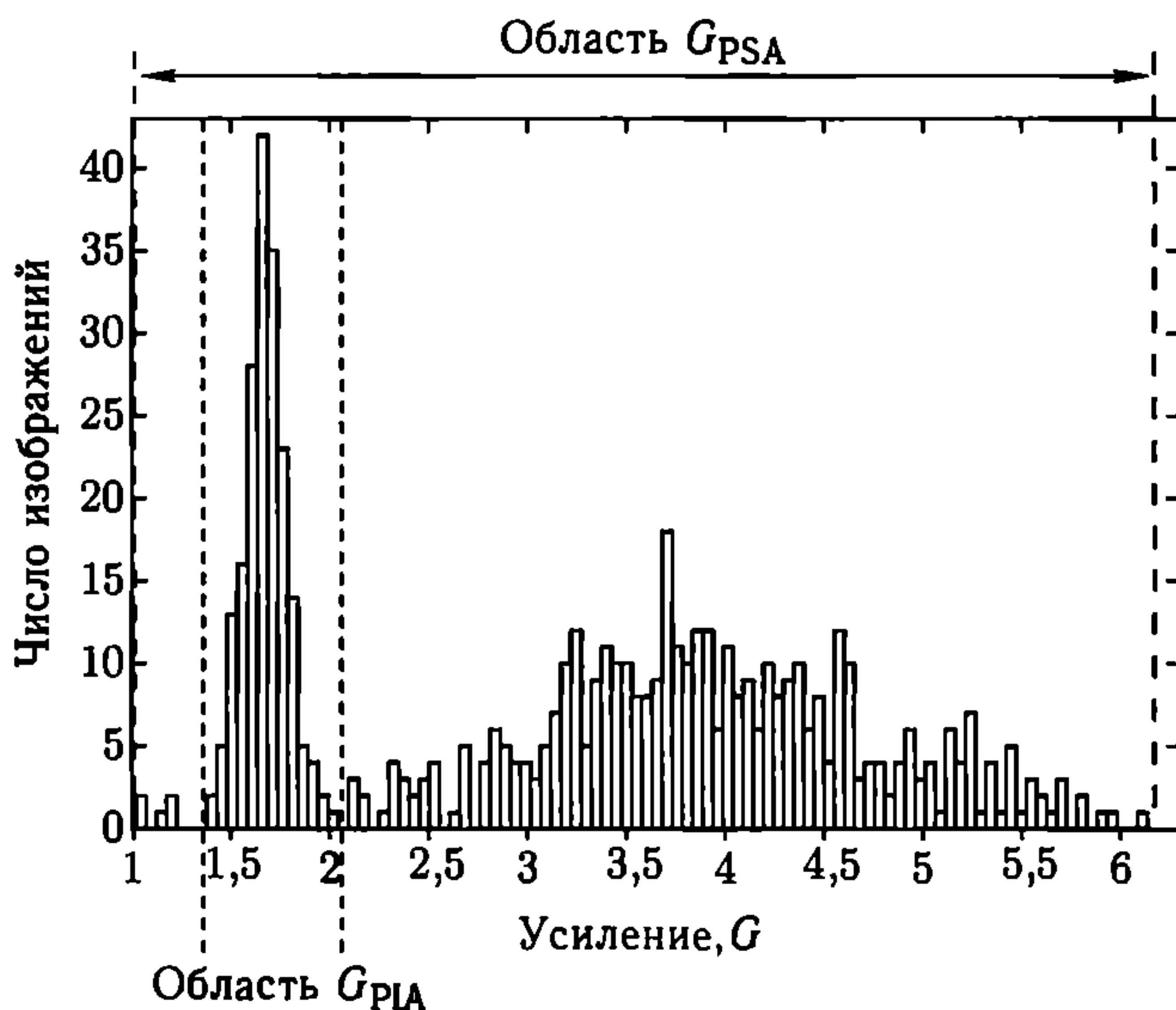


Рис. 7.11. Гистограмма коэффициента усиления для схем ФНЧУ и ФЧУ

наковому (максимальному) усилению и имели одну и ту же относительную фазу. Тем не менее, основываясь на критерии максимального отношения сигнал-шум, мы смогли отобрать пять изображений, полученных в одних и тех же условиях. На рис. 7.12 (см. вклейку) в качестве примера показано одно из отобранных изображений. Коэффициент усиление явно неоднороден вдоль линии вследствие остаточного варьирования относительной фазы. В результате, используемая для анализа область, в которой возможно было полагать статистику стационарной, уменьшилась по сравнению со случаем ФНЧУ. Рис. 7.13 показывает рост коэффициента шума NF при измерении

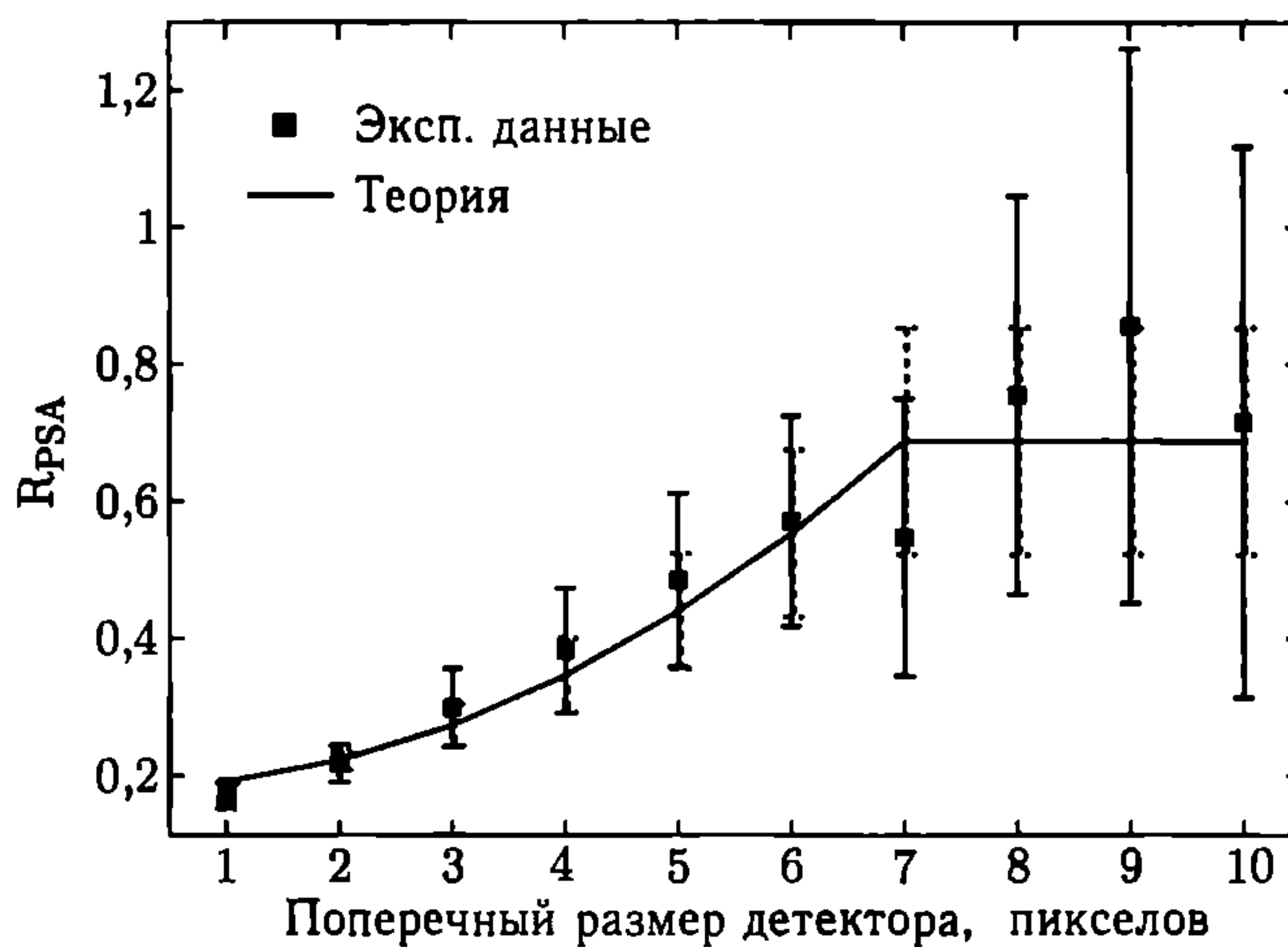


Рис. 7.13. Коэффициент шума NF в схеме ФЧУ в зависимости от поперечного размера детектора. Квадратами показаны экспериментальные данные (уровень погрешности отмечен вертикальными сплошными линиями). Сплошная кривая соответствует теоретическому расчету (уровень погрешности отмечен пунктиром)

в схеме ФЧУ в зависимости от размера детектора. Теоретическая кривая рассчитана по формуле (7.45), как и для схемы ФНЧУ, приводя к значению $R_{PSA} = 0,7 \pm 0,1$ при $S_d \geq S_{diff}$. На рис. 7.13 хорошее согласие между экспериментальными данными и теоретической кривой подтверждает бесшумовой характер усиления в схеме ФЧУ.

В заключение отметим, что мы экспериментально продемонстрировали чисто пространственный эффект бесшумового усиления изображений в схеме ФЧУ и сравнили результаты с полученными в схеме ФНЧУ. Наши экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией. Как и ожидалось, ФЧУ не добавляет дополнительного шума, в то время как ФНЧУ приводит к ожидаемому ухудшению отношения сигнала к шуму на 3 Дб.

Список литературы

1. *Caves C. M.* // Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1817.
2. *Ou Z. Y., Pereira S. F., Kimble H. J.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3239.
3. *Levenson J. A., Abram I., Rivera T., Fayolle P., Garreau J. C., Grangier P.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 267.
4. *Kolobov M. I., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4930.
5. *Mancini S., Gatti A., Lugiato L. A.* // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 12. P. 499.
6. *Sokolov I. V., Kolobov M. I., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 2420.
7. *Wang K., Yang G., Gatti A., Lugiato L. A.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2003. V. 5. P. S535.
8. *Devaux F., Lantz E., Lacourt A., Gindre D., Maillotte H., Doreau P. A., Laurent T.* // Nonlinear Optics. 1995. V. 11. P. 25.
9. *Devaux F., Lantz E.* // Opt. Commun. 1995. V. 114. P. 295.
10. *Devaux F., Lantz E.* // Opt. Commun. 1995. V. 118. P. 25.
11. *Devaux F., Lantz E.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1995. V. 12. P. 2245.

12. *Gavrielides A., Peterson P., Gardimona D.* // J. Appl. Phys. 1987. V. 62. P. 2640.
13. *Wetterer C. J., Schelonka L. P., Kramer M. A.* // J. Appl. Phys. 1989. V. 65. P. 3347.
14. *Cameron S. M., Bliss D. F., Kimmel M. W.* // Proc. SPIE. 1996. V. 2679. P. 195.
15. *Guthals D., Sox S.* // Proc. of Intern. Conf. on Lasers'89 / Eds. D. G. Harris and T. M. Shay. — Mclean, VA: STS, 1990. — P. 808–815.
16. *Choi S.-K., Vasilyev M., Kumar P.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1938.
17. *Mosset A., Devaux F., Lantz E.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 223603.
18. *Thomas J. B.* An Introduction to Statistical Communication Theory. — New York: Wiley, 1969.
19. *Гудмен Дж.* Статистическая оптика. — М.: Мир, 1988.
20. *Kolobov M. I.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539.
21. *Mosset A., Devaux F., Fanjoux G., Lantz E.* // Eur. Phys. J. D. 2004. V. 28. P. 447.

Литература, добавленная при переводе

22. *Chirkin A. S., Makeev E. V.* Simultaneous phase-sensitive parametric amplification and up-conversion of an optical image // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2005. V. 7. P. S500–S506.
23. *Devaux F., Blanchet J. L., Lantz E.* Effective signal-to-noise ratio improvement by parametric image amplification // Opt. Lett. 2007. V. 32. P. 175–177.
24. *Lantz E., Devaux F.* Parametric amplification of images: from time gating to noiseless amplification // J. Sel. Topics in Quantum Electronics. 2008. V. 14. P. 635–647.
25. *Lopez L., Treps N., Chalopin B., Fabre C., Maître A.* Quantum Processing of Images by Continuous Wave Optical Parametric Amplification // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 013604.
26. *Boyer V., Marino A. M., Pooser R. C., Lett P. D.* Entangled images from four-wave mixing // Science. 2008. V. 321. P. 544.

ОБРАБОТКА ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

*Пьер Скотто, Пере Колет, Андриан Жакобо,
Макси Сан Мигель*

8.1. Введение

Хотя обработка изображений полностью оптическими средствами распространена значительно меньше, чем хорошо развитая техника цифровой обработки изображений [1], тем не менее, она повсеместно используется уже довольно давно. Ранние исследования, выполненные в рамках классической физики, продемонстрировали возможность переноса оптического изображения из инфракрасной в видимую область ¹⁾ [2, 3] и, затем, из видимой области в ультрафиолетовый диапазон [4, 5], а также параметрического усиления изображения в ультрафиолетовом диапазоне [6, 7] и инверсии контрастности [8]. Во всех этих схемах оптическое изображение на частоте ω инжектировалось непосредственно в нелинейный кристалл, освещенный сильной монохроматической волной накачки с частотой ω_p , а исследуемое изображение формировалось на выходной плоскости кристалла. В результате нелинейности кристалла, в зависимости от условий фазового синхронизма, входное изображение либо переносилось на более высокую частоту $\omega + \omega_p$ простым сложением частот [2–4], либо усиливалось в процессе параметрического преобразования частоты вниз ²⁾ [6–8]. В последнем случае усиление сопровождалось формированием фазово-сопряженного (холостого) изображения на дополнительной частоте $\omega_p - \omega$. Что касается пространственной зависимости механизма обработки изображения от положения объекта в поперечной плоскости, условием фазового синхронизма определяется будет ли обработка изображения эффективной в области, имеющей форму диска, центрированного относительно главной оптической оси системы, или форму кольца конечной

¹⁾ Стоит отметить, что в этот период были выполнены и работы [48, 49] (см. также обзор [50]).

²⁾ Заметим, что в последние годы вызывает интерес одновременная реализация названных процессов в одном кристалле. В [51] при неколлинеарном взаимодействии волн осуществлено усиление оптического изображения и преобразование его частоты вверх. В работах [52, 53] развита квантовая теория связанных нелинейно-оптических процессов в неоднородных нелинейных кристаллах, в которых в коллинеарной геометрии взаимодействия протекает параметрическое усиление и генерация на суммарной частоте оптического изображения.

ширины. Последний из указанных режимов может быть также использован для селективного усиления отдельных фурье-компонент изображения, что ведет к повышению контрастности или ее инверсии. Немалое количество работ в области обработки изображений полностью оптическими средствами выполнено в фоторефрактивных средах [9], включая работы по усилению контуров изображений [10–12], инверсии, разделению, различению, устранению размытости изображений [13–16], подавлению шума [17] и повышению контрастности [18].

Совсем недавно проблемы обработки изображений были рассмотрены также и на квантовом уровне, включая изучение свойств квантовых флуктуаций выходного изображения. Ключевой прогноз, положивший начало стремительного развития возникающих полей квантовых изображений [19, 20], был сделан в контексте исследований усиления изображений: в то время как, согласно законам квантовой механики, фазово-нечувствительное усиление изображения всегда сопровождается добавлением к выходному изображению как минимум 3 дБ избыточного шума [21], фазово-чувствительный усилитель имеет существенно более хорошие шумовые характеристики [22, 23]. Более того, возможность бесшумового усиления (т. е. усиления, сохраняющего неизменным отношение сигнала к шуму) была продемонстрирована сперва теоретически [24, 25], а затем и экспериментально [26]. Эта техника может использоваться в ситуациях, когда слабо различимый когерентный сигнал следует усилить перед детектированием. В случае слабых сигналов ухудшение отношения сигнал-шум, предсказываемое квантовой механикой при фазово-нечувствительном усилении, может привести к непоправимой потере информации, содержащейся в изображении.

В этой главе мы рассмотрим использование генерации второй гармоники (ГВГ) для обработки изображений полностью оптическими средствами. С точки зрения нелинейности кристалла различают I и II типы генерации второй гармоники. В простейшей ситуации к типу I относятся случаи, когда два поля с одинаковой поляризацией, имеющие одну и ту же несущую частоту ω , взаимодействуют¹⁾, приводя к появлению второй гармоники с частотой 2ω . При взаимодействии типа II два линейно поляризованных поля с ортогональными поляризациями и одинаковыми несущими частотами ω инжектируются в нелинейный кристалл, что также приводит к генерации второй гармоники с частотой 2ω ²⁾.

Сперва мы рассмотрим ситуацию, когда нелинейный кристалл помещен внутрь оптического резонатора. Основное отличие резонаторной геометрии от случая бегущей волны заключается в наличии порогов неустойчивости, которые, при соответствующем использовании, дают возможность нелинейной обработки изображения. Например, рассматривая генерацию второй гармоники при взаимодействии типа II внутри плоского резонатора, где все поля находятся в резонансе, возможно селективно повысить контрастность части

¹⁾ Имеется в виду удвоение оптической частоты в нелинейном кристалле.

²⁾ В этом случае имеет место процесс смешения частот, вырожденный по частоте.

изображения или детектировать его контур [27]. Это явление будет обсуждаться в разд. 8.2. В разделах 8.3 и 8.4 мы рассмотрим свойства квантовых изображений при ГВГ в режиме бегущей волны. Первый из этих разделов посвящен взаимодействию типа I, а второй — взаимодействию типа II, при котором поляризационная степень свободы приводит к появлению большего разнообразия возможных операций.

8.2. Обработка изображений при генерации второй гармоники; классическое рассмотрение

В этом разделе мы рассмотрим кристалл с нелинейностью $\chi^{(2)}$, помещенный в идеально плоский оптический резонатор, и будем предполагать фазовый синхронизм типа II, как показано на рис. 8.1. Вторая гармоника (ВГ) генерируется, если резонатор накачивается двумя полями с ортогональными поляризациями x и y . В параксиальном приближении и приближении средних полей, такая система описывается следующими связанными уравнениями [27–31]:

$$\partial_t B = -(1 + i\delta_B)B + \frac{i}{2} \nabla^2 B + iA_x A_y, \quad (8.1)$$

$$\partial_t A_x = -(1 + i\delta_A)A_x + i\nabla^2 A_x - iA_y^* B + E_x, \quad (8.2)$$

$$\partial_t A_y = -(1 + i\delta_A)A_y + i\nabla^2 A_y - iA_x^* B + E_y, \quad (8.3)$$

которые определяют временное развитие внутрирезонаторных медленно меняющихся амплитуд полей A_x и A_y с несущей частотой ω и линейными поляризациями x и y , и медленной амплитуды B поля на частоте второй гармоники 2ω , поляризованного вдоль оси y ; δ_A и δ_B — отстройки от основной частоты и второй гармоники соответственно. Время выражено в единицах времени жизни фотонов в резонаторе, а расстояние — в единицах дифракционной длины. Дифракция учитывается через оператор Лапласа в поперечной плоскости $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Амплитуды линейно поляризованных полей накачки E_x и E_y выбраны таким образом, что изображение инжектируется в x -поляризации, а y -поляризованное поле однородно. Изучение стационарных решений системы уравнений (8.1)–(8.3) при однородных полях накачки дает нам необходимое понимание важных свойств системы, которые будут использоваться при обработке изображения. Когда волны накачки однород-

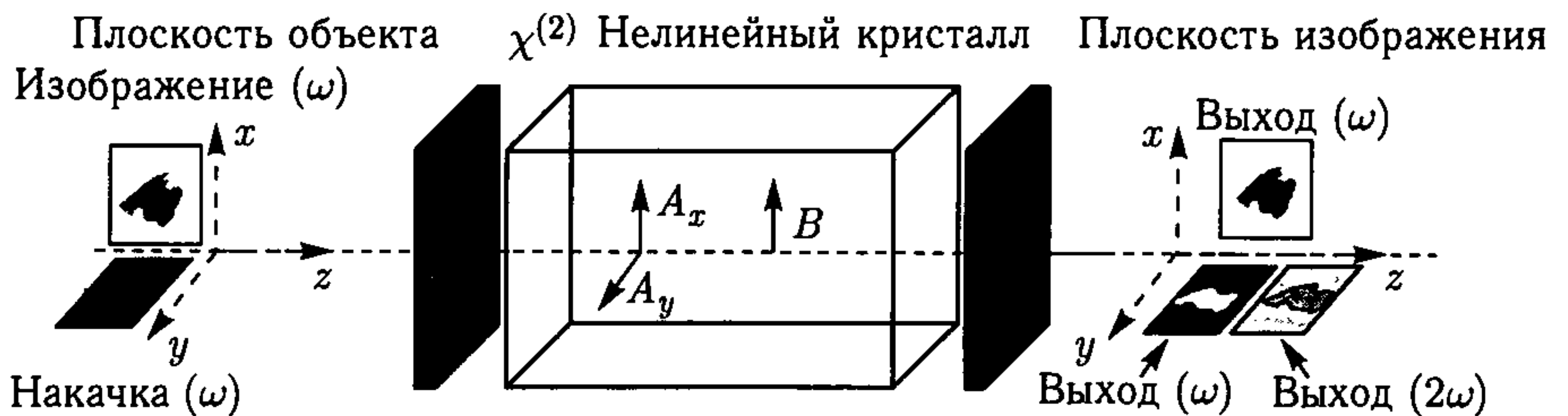


Рис. 8.1. Схема оптического устройства, основанного на внутрирезонаторной генерации второй гармоники при фазовом синхронизме типа II. Нелинейный кристалл помещен в резонатор с плоскими зеркалами

ны в поперечной плоскости, без потери общности можем положить, что их амплитуды E_x и E_y вещественны. Обычно (8.1)–(8.3) рассматривают случай симметричной накачки $E_x = E_y$, который приводит к максимальной эффективности ГВГ. В этом случае установившееся однородное стационарное состояние оказывается неустойчивым, если накачка превышает некоторое критическое значение [28–32]:

$$|E_{as}|^2 = 2(1 + \delta_B^2)^{1/2}(1 + \delta_A^2)^{3/2} + 2(1 + \delta_A^2)(1 - \delta_A\delta_B). \quad (8.4)$$

Система переходит в однородное состояние, в котором $|A_x|$ и $|A_y|$ различны, так что поляризация внутрирезонаторного поля более не совпадает с поляризацией накачки (поляризационная неустойчивость). Благодаря симметрии системы, возможно существование двух эквивалентных, но различных состояний: с большим значением $|A_x|$ и малым $|A_y|$ и наоборот [27–29]. Для несимметричной накачки $E_x \neq E_y$ однородное стационарное значение $|A_y|$ можно найти как решение полиномиального уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_A |A_y|^{10} + [4(1 - \delta_B) \Delta_A - |E_y|^2] |A_y|^8 + \\ + 2[\Delta_A Q + \Delta_{AB}(|E_x|^2 - 2|E_y|^2)] |A_y|^6 + \\ + 2[2\Delta_A^2 \Delta_B^2 \Delta_{AB} - Q|E_y|^2 - 2\Delta_{AB}^2 |E_x|^2] |A_y|^4 + \\ + [\Delta_A^3 \Delta_B^2 + 2\Delta_A \Delta_B \Delta_{AB}(|E_x|^2 - 2|E_y|^2)] |A_y|^2 - \Delta_A^2 \Delta_B^2 |E_y|^2 = 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где $\Delta_A = 1 + \delta_A^2$, $\Delta_B = 1 + \delta_B^2$, $\Delta_{AB} = 1 - \delta_A\delta_B$ и $Q = (\delta_A + \delta_B)^2 + 3\Delta_{AB}^2$. Для данного $|A_y|$, выражения для $|A_x|$ и $|B|$ имеют вид:

$$\begin{aligned} |A_x|^2 &= \frac{\Delta_B |E_x|^2}{|A_y|^2 + 2\Delta_{AB} |A_y| + \Delta_A \Delta_B}, \\ |B|^2 &= \frac{|A_x|^2 |A_y|^2}{\Delta_B}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

На рис. 8.2 изображена типичная зависимость стационарных решений для внутрирезонаторных полей $|A_x|$, $|A_y|$ и $|B|$ от $|E_x|$ при $E_y = 5$. При

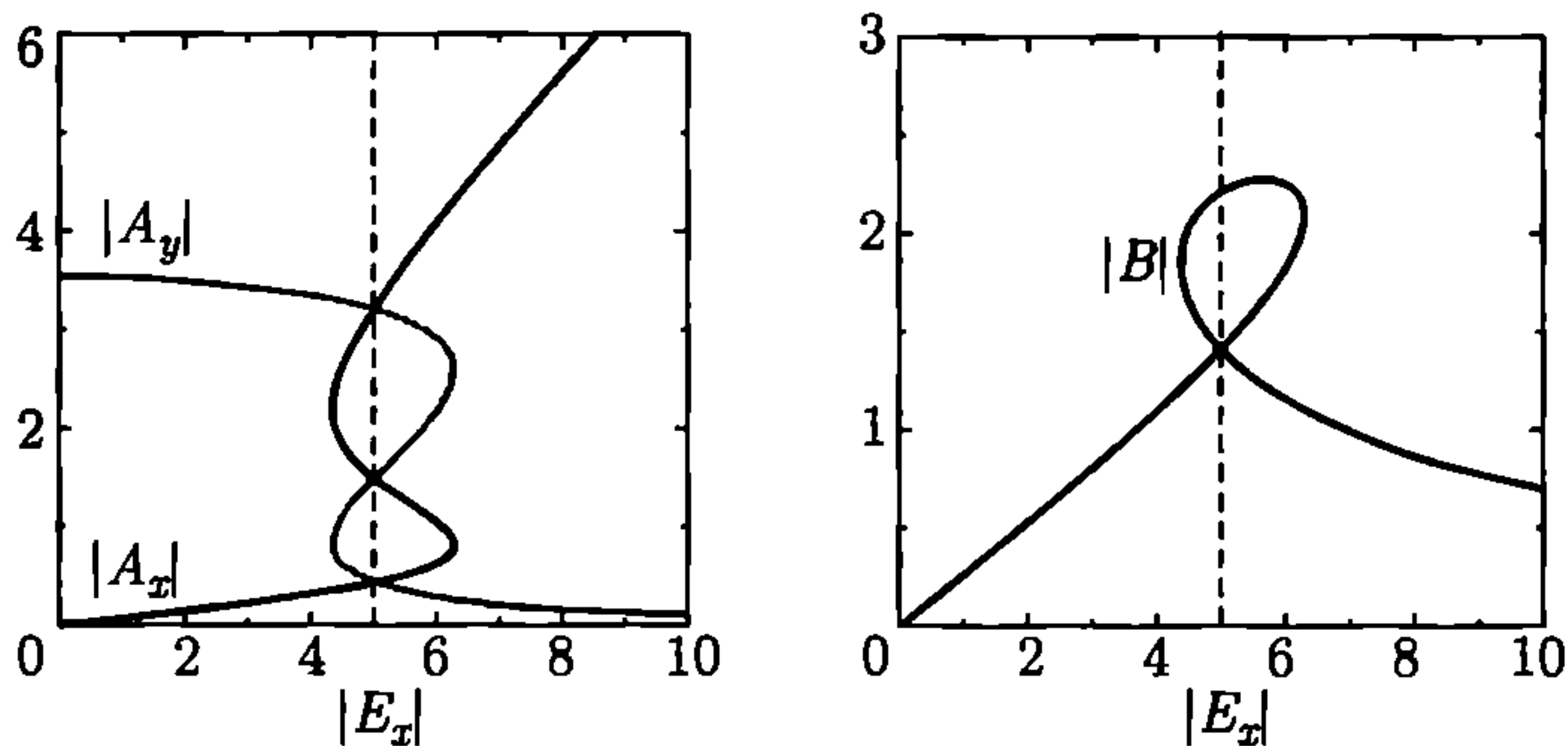


Рис. 8.2. Генерация второй гармоники при несимметричной накачке. Амплитуды стационарных внутрирезонаторных полей в зависимости от E_x при $E_y = 5$, $\delta_A = 1$ и $\delta_B = 0$. Пунктирная вертикальная прямая соответствует симметричной накачке $E_x = E_y$

малых $|E_x|$ функции $A_x(E_x)$ и $B(E_x)$ принимают малые значения, тогда как значение $A_y(E_x)$ велико и близко к $E_y/(1 + i\delta_A)$. Все функции однозначны. При приближении $|E_x|$ к $|E_y|$ система демонстрирует бистабильность: $A_x(E_x)$ и $A_y(E_x)$ становятся S-образными, а $B(E_x)$ образует петлю. При больших $|E_x|$ все функции снова становятся однозначными, но теперь $A_x(E_x) \gg A_y(E_x)$. Существование трех стационарных решений системы уравнений (8.1)–(8.3) в области конечной ширины, центрированной относительно $|E_x| = |E_y|$, близко связано с поляризационной неустойчивостью, возникающей в случае симметричной накачки. Фактически, эта S-образная форма кривых может наблюдаться только, если $|E_y| > |E_{as}|$.

Ниже мы рассмотрим эффекты, которые наблюдаются при подаче в схему изображения, заключенного в пространственном варьировании интенсивности x -поляризованного поля накачки в присутствии однородной накачки E_y . Варьируя амплитуду однородной накачки можно обеспечить работу схемы в различных режимах. В первом режиме изображение можно перенести с основной на вторую гармонику. Во втором режиме возможно повысить контрастность изображения и детектировать его контур [27]. Более того, в этом режиме также возможно осуществить фильтрацию шума, присутствующего в изображении. Для простоты будем полагать, что E_x и E_y вещественны, за исключением ситуаций, когда нас будут интересовать шумы. Здесь мы рассмотрим только случай идеального резонатора с плоскими зеркалами, обеспечивающего резонанс одновременно для основных полей и поля второй гармоники. Такие же построения можно выполнить, используя резонаторы со сферическими зеркалами или, когда только фундаментальная мода находится в резонансе, как рассмотрено в [33].

8.2.1. Преобразование изображения с повышением частоты. Рассмотрим инжекцию изображения. Теперь амплитуда x -поляризованного сигнала $|E_x(x)|$ является функцией поперечной координаты x . В данной точке x внутрирезонаторные поля $A_{x,y}(x)$ и $B(x)$ стремятся к своим стационарным значениям, показанным на рис. 8.2, так же, как если бы накачка была однородной, несмотря на возникновение пространственной связи между модами, обусловленной дифракцией. Дифракция становится существенной для деталей изображения на масштабе дифракционной длины. На рис. 8.3 изображено поведение функций для очень простого одномерного изображения, когда $|E_x|$ принимает только два значения. При $|E_x(x)|$ значительно ниже $|E_y|$, $A_x(x)$ никогда не покидает нижней ветви кривой $A_x(E_x)$, так что $|A_x|$ воспроизводит пространственное распределение входного изображения $|E_x|(x)$. Выходное поле $B(x)$ на частоте второй гармоники также воспроизводит $|E_x(x)|$. Следовательно, внутрирезонаторная ГВГ типа II обеспечивает возможность переноса входного изображения с основной частоты на частоту второй гармоники. Кроме того, имеет место переключение поляризации, поскольку изображение, заключенное в амплитуде $|E_x|$, и поле второй гармоники B обладают ортогональными поляризациями. В качестве побочного эффекта наблюдается негативное изображение как слабая модуляция A_y в окрестности $E_y/(1 + i\delta_A)$. Преобразование полей проиллюстрировано на рис. 8.4 в более реалистичном

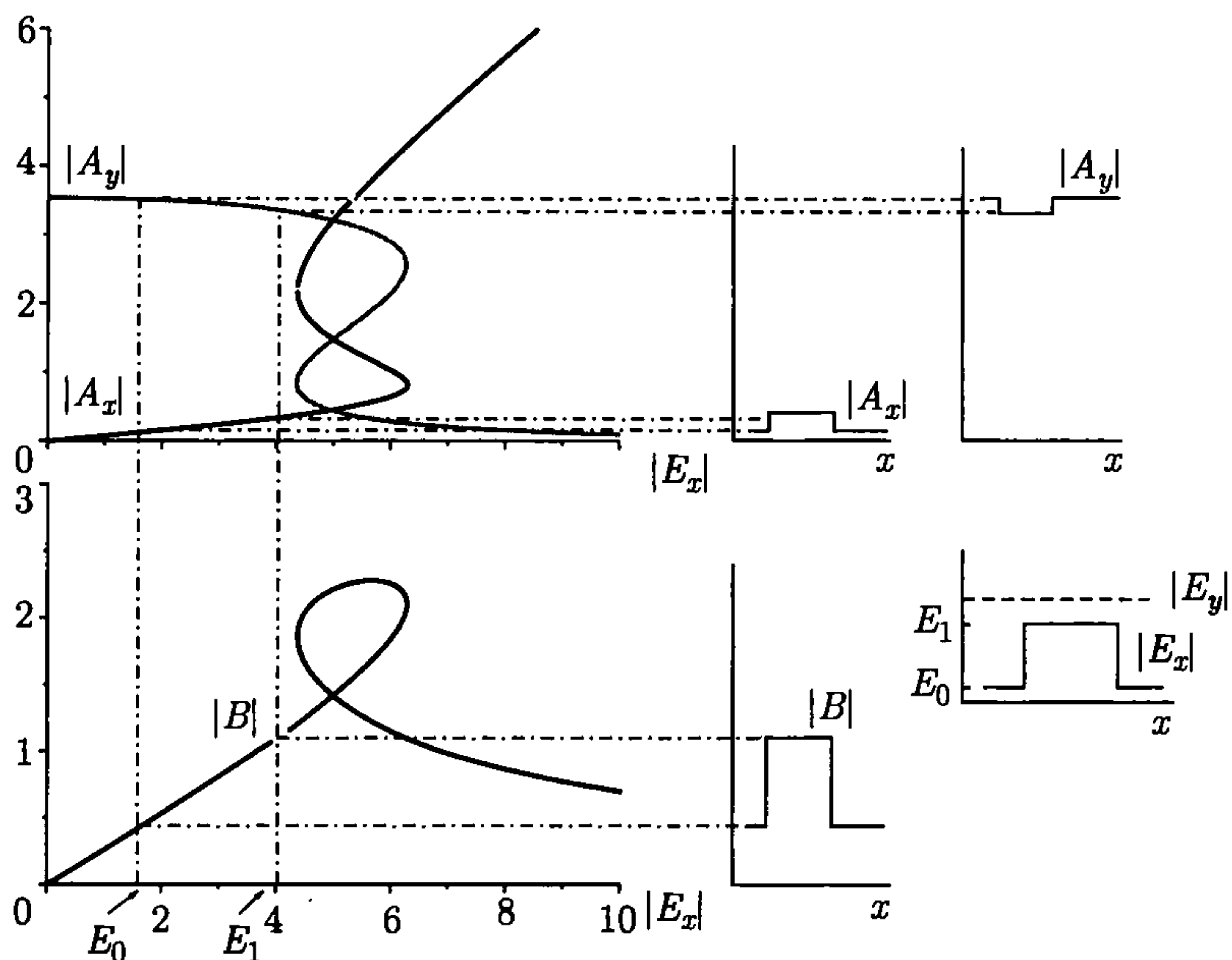


Рис. 8.3. Геометрическое построение, иллюстрирующее режим преобразования частоты. Слева изображена стационарная амплитуда внутрирезонаторных полей при однородной несимметричной накачке в зависимости от E_x при $E_y = 5$ ($\delta_B = 0$, $\delta_A = 1$ и $E_{as} = 3,10755$). Справа показан отклик системы на простейшее изображение (схематически изображенное справа внизу), где E_x принимает только значения E_0 и E_1 при $E_0 < E_1 < E_y$

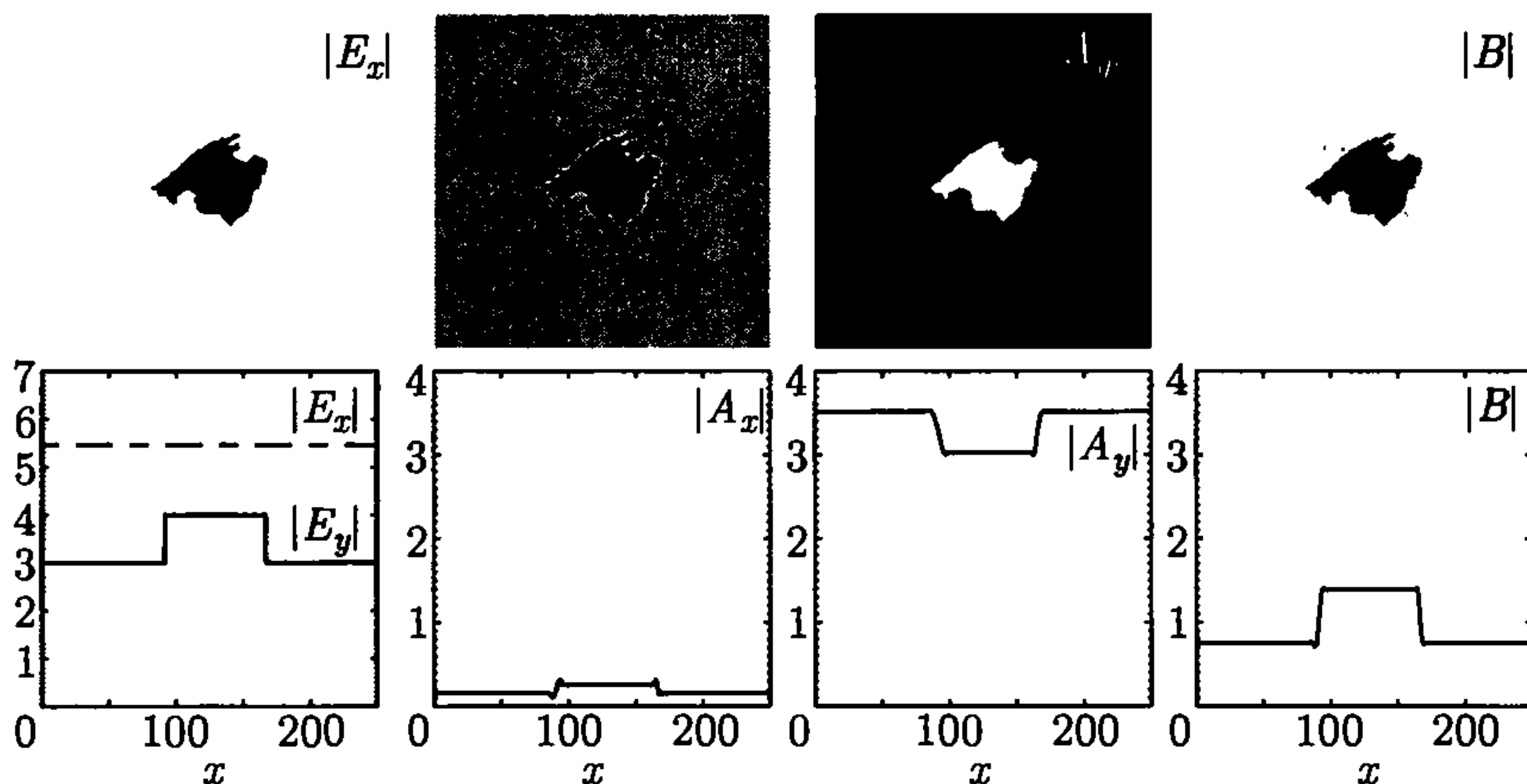


Рис. 8.4. Преобразование частоты. В первой строке (слева направо) представлены пространственные распределения входного поля E_x и внутрирезонаторных полей $|A_x|$, $|A_y|$ и $|B|$. На всех рисунках этой главы, если не сказано иное, различные оттенки серого отвечают изменению амплитуд полей от минимума (белый) до максимума (черный). Во второй строке показаны поперечные срезы полей вдоль пунктирной линии, отмеченной на нижнем левом фрагменте (использовалось значение $E_y = 5,5$, показанное пунктиром)

случае двумерного изображения. Видно, что вследствие дифракции края изображения размыты. Изображение на внутрирезонаторных полях и поле ВГ можно рассматривать как объединение двух различных стационарных

состояний, и осциллирующие «хвосты» поперечных распределений фронтов, связывая эти два состояния, вызывают некоторые искажения в окрестности границы. Тем не менее, как следует из рис. 8.4, изображение воспроизводится довольно точно.

8.2.2. Повышение контрастности и распознавание контура. Теперь рассмотрим случай, в котором амплитуда сигнала локально превосходит амплитуду $|E_y|$. В этом случае, как показано на рис. 8.5, в игру вступают многозначные части зависимостей $A_x(E_x)$, $A_y(E_x)$ и $B(E_x)$. Если E_1 больше верхнего значения петли гистерезиса, а E_0 ниже ее нижнего значения, то $A_x(E_x(x))$ испытывает скачок с нижней на верхнюю ветвь кривой, а $A_y(E_x(x))$, напротив, претерпевает скачок с верхней ветви на нижнюю. Это приводит к резкому пространственному изменению A_x и A_y . В сущности, для очень слабых резонаторных полей как начальных условий нет необходимости полностью проходить всю петлю гистерезиса для того, чтобы произошел скачок. При указанных начальных условиях, в случае, когда $|E_x| < |E_y|$, система локально выбирает устойчивое решение с малым значением $|A_x|$ и большим $|A_y|$, и наоборот, при $|E_x| > |E_y|$ выбирается устойчивое решение с большим $|A_x|$ и малым $|A_y|$. Поэтому соответствующее значение $|E_y|$ фактически играет роль эффективного порога, и скачок уже имеет место, если $|E_x|$ пересекает $|E_y|$, как показано на рис. 8.5. В области, где $|E_x(x)|$ превосходит соответствующий уровень $|E_y|$, $|A_x|$ имеет большее значение по сравнению с областью, где $|E_x(x)| < |E_y|$. Таким образом контрастность в этом поле оказывается выше, чем контрастность исходных полей (см.

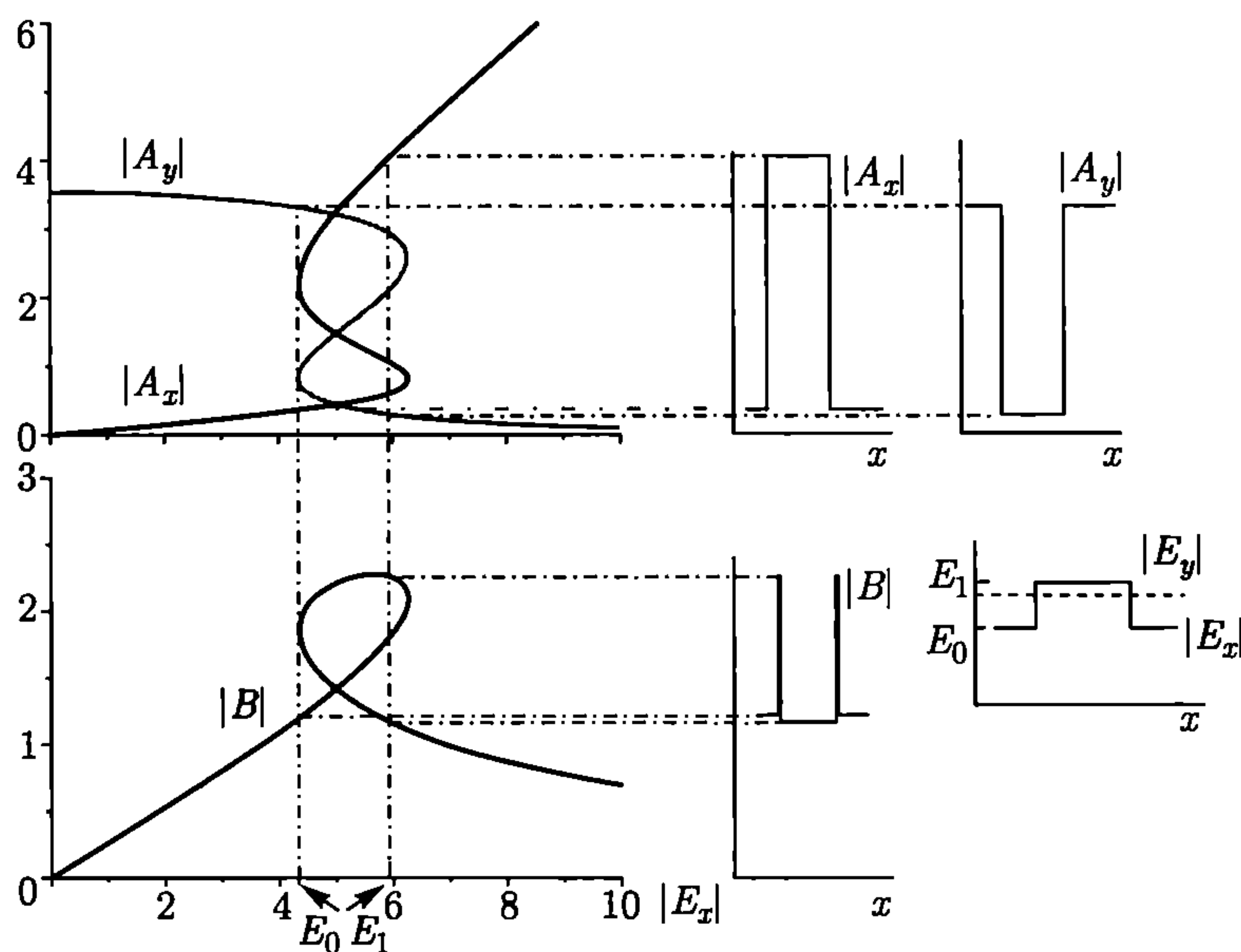


Рис. 8.5. Геометрическое построение, иллюстрирующее режим повышения контрастности и распознавания контура изображения, подобное изображенному на рис. 8.3, но при $E_0 < E_y < E_1$

рис. 8.5). Амплитуда $|A_y|$ принимает более низкие значения, когда $|E_x| < |E_y|$, в результате чего получается изображение, инвертированное относительно входного. На границе между областями с $|E_x| > |E_y|$ и $|E_x| < |E_y|$ в поле второй гармоники B наблюдается острый пик, так как локально $|A_x| \simeq |A_y|$. То есть система проходит через симметричное устойчивое решение, которое характеризуется большей амплитудой внутрирезонаторного поля второй гармоники, чем асимметричное устойчивое решение. Как следствие, в поле второй гармоники прописывается контур входного изображения (рис. 8.5). Эти эффекты проиллюстрированы для двумерного входного изображения на рис. 8.6.

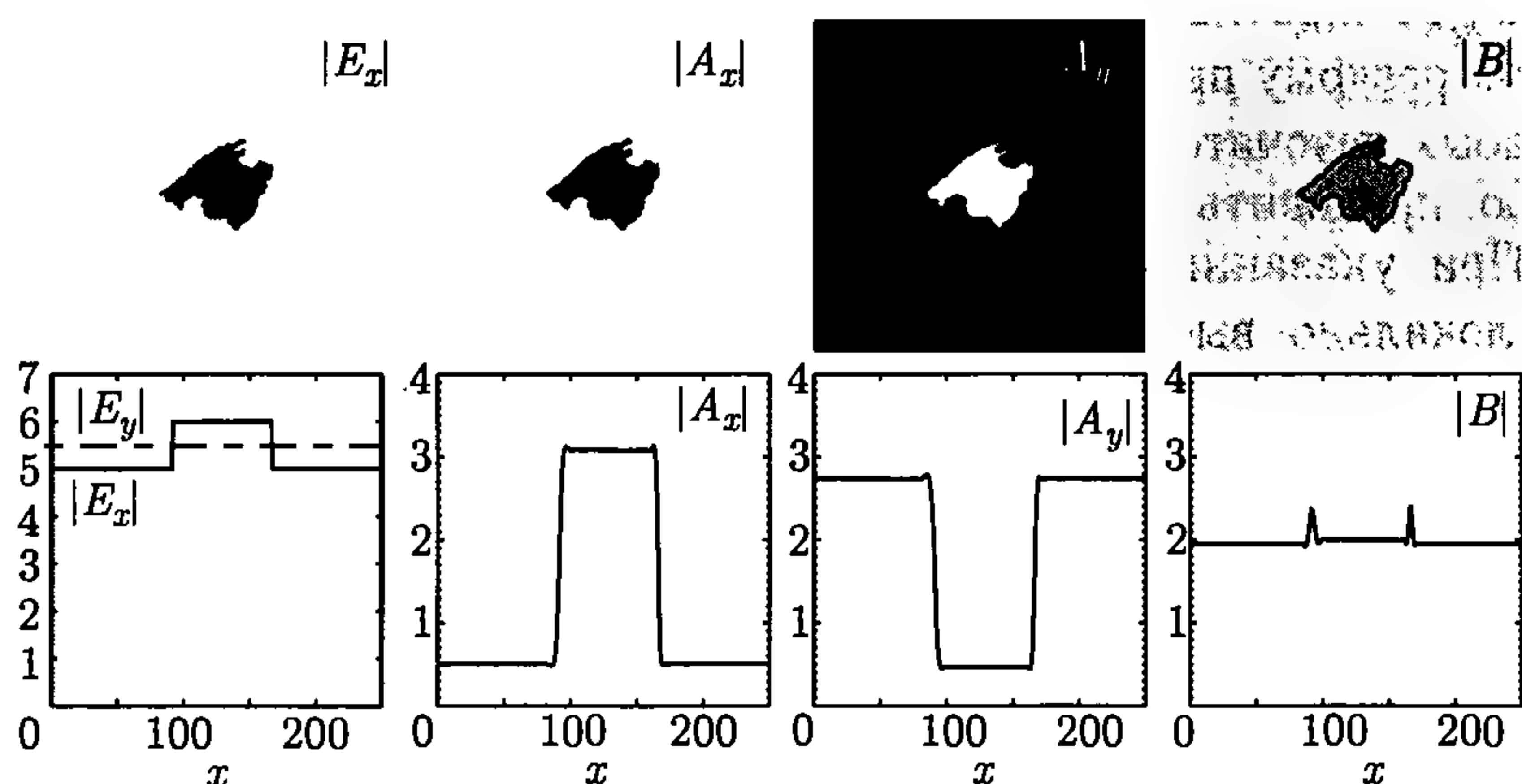


Рис. 8.6. Повышение контрастности и распознавание контура. В первой строке (слева направо) представлены пространственные распределения амплитуд входного поля $|E_x|$ и внутрирезонаторных полей $|A_x|$, $|A_y|$ и $|B|$. Во второй строке показаны поперечные срезы полей для $|E_y| = 5,5$

Обработка изображений подвержена небольшому влиянию дифракции в двух измерениях, что приводит к сглаживанию острых углов входного изображения и установлению минимальной контрастности, ниже которой эффект повышения контрастности не возникает. Необходимо подчеркнуть, что предыдущие результаты показали возможность реализовать различные варианты обработки данного изображения путем выбора амплитуды однородного поля $|E_y|$. Этот эффект еще более интересен, когда рассматриваемое изображение содержит много уровней интенсивности — изображение в полутонах. В этом отношении, если величина однородной накачки $|E_y|$ выбирается большей, чем $|E_x(x)|$ для любого x , тогда реализуется процесс преобразования частоты, и все изображение будет содержаться в поле второй гармоники $B(x)$. Если $|E_y|$ уменьшается, то часть изображения, для которой $|E_x(x)| > |E_y|$ будет вовлечена в процесс повышения контрастности.

8.2.3. Фильтрация шума. Другой интересный эффект возникает, когда подаваемое изображение находится в суперпозиции с комплексным случайным полем, создавая зашумленное как по интенсивности, так и по фазе изображение. В этом случае система проявляет свойства фильтрации шума,

и изображения на основной и второй гармониках имеют более низкий уровень шума, чем входное изображение. Эффект фильтрации шума возникает в результате взаимодействия между дифракцией и нелинейным процессом, в котором не участвуют все компоненты входного изображения с высокими пространственными частотами. Следовательно, возникающие в малом пространственном масштабе флуктуации эффективно подавляются [27]. Этот эффект проявляется как в режиме преобразования частоты, так и в режиме распознавания контура, но наиболее эффективен он во втором случае, когда нелинейность играет наиболее важную роль и повышается контрастность изображения, как видно из рисунков 8.7 и 8.8.

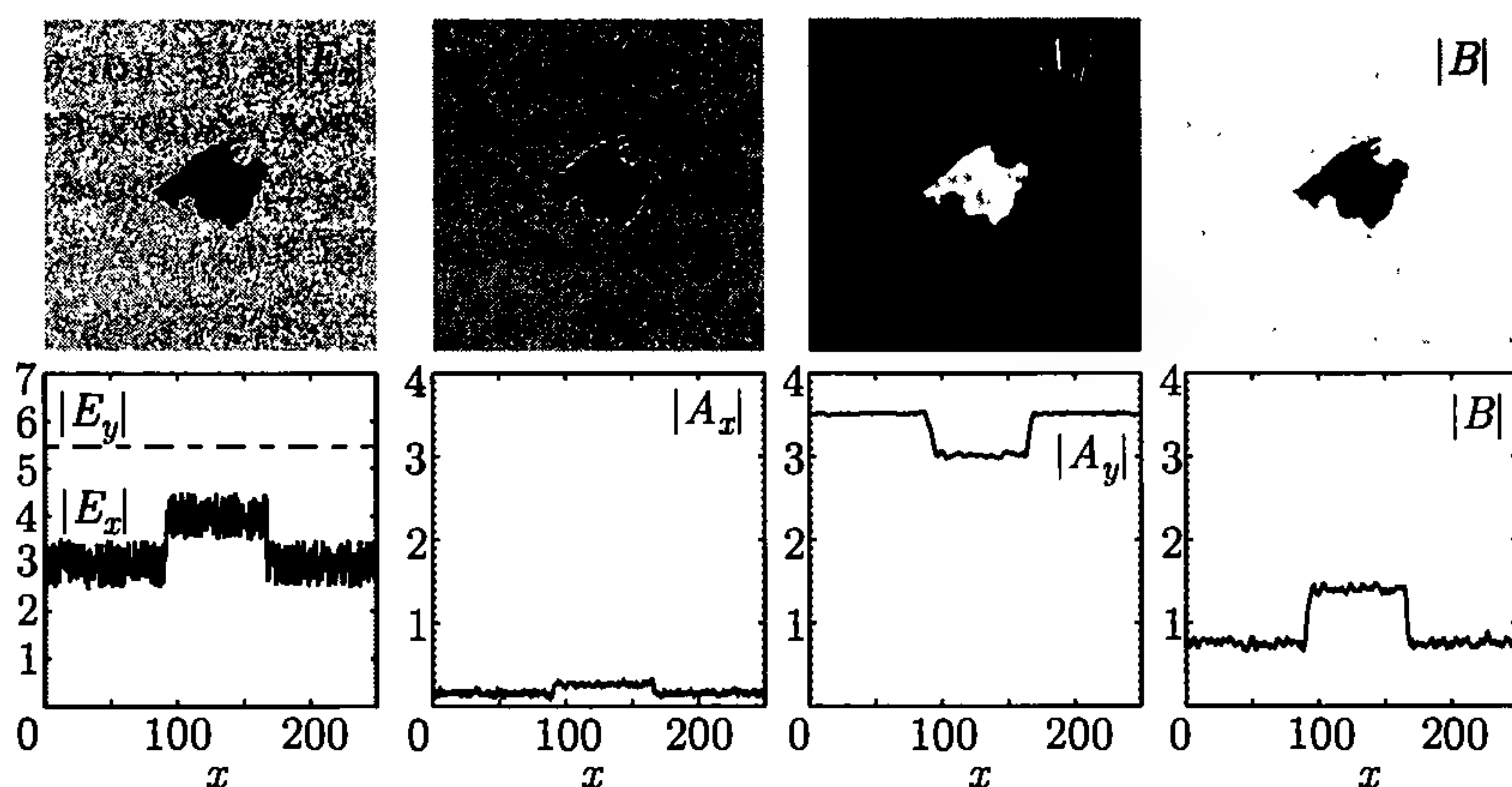


Рис. 8.7. Фильтрация шума в режиме преобразования частоты. В первой строке (слева направо) представлены пространственные распределения амплитуд входного поля $|E_x|$ и внутрирезонаторных полей $|A_x|$, $|A_y|$ и $|B|$. Во второй строке показаны поперечные срезы полей для $|E_y| = 5,5$

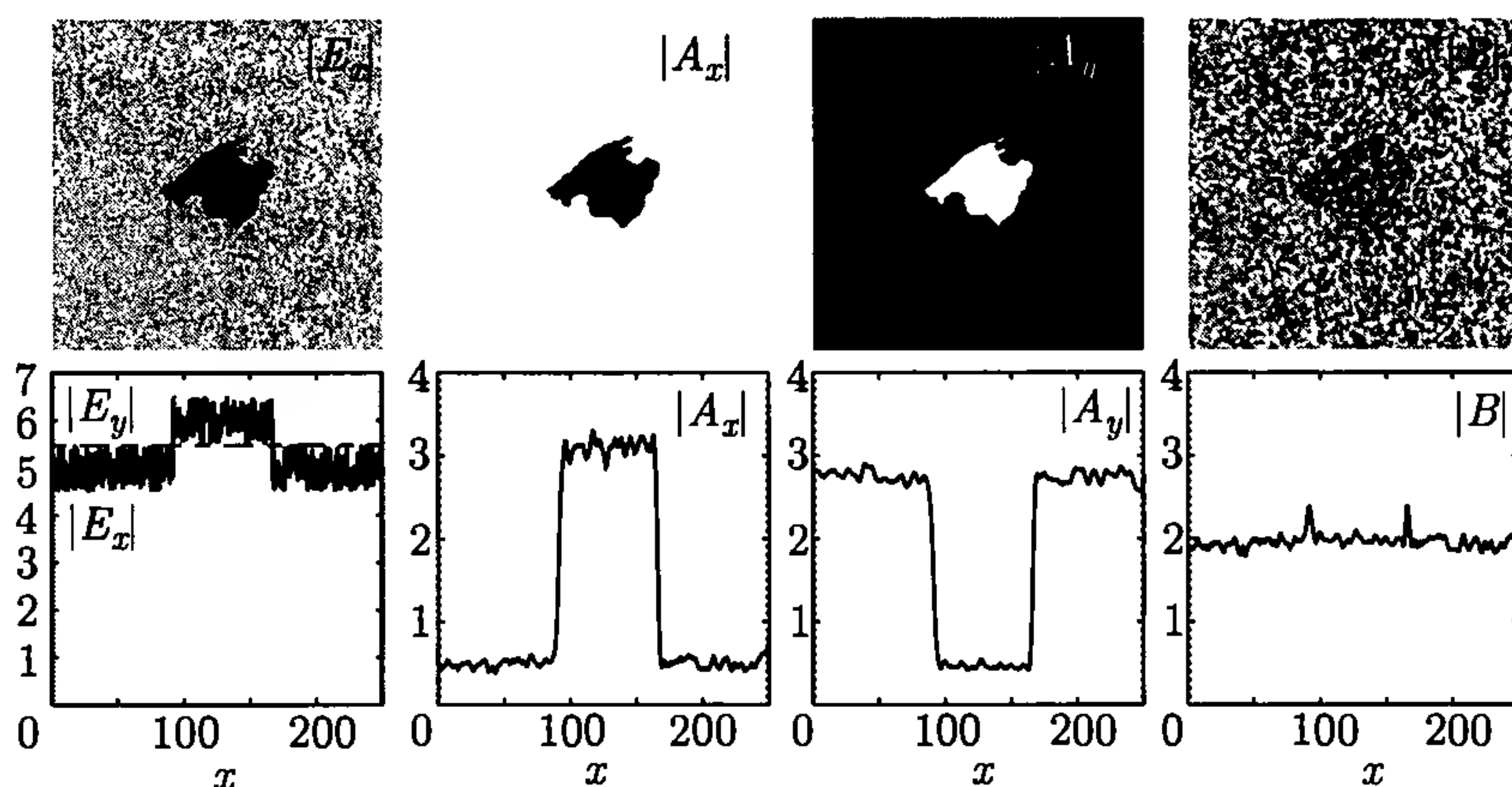


Рис. 8.8. Фильтрация шума в режиме повышения контрастности. В первой строке (слева направо) представлены пространственные распределения амплитуд входного поля $|E_x|$ и внутрирезонаторных полей $|A_x|$, $|A_y|$ и $|B|$. Во второй строке показаны поперечные срезы полей для $|E_y| = 5,5$

8.3. Квантовая обработка изображений при генерации второй гармоники типа I

В предыдущем разделе проведено полностью классическое рассмотрение. В этом и следующем разделах мы исследуем возможности, предоставляемые методом генерации второй гармоники для обработки изображений с точки зрения квантового подхода. Мы будем рассматривать однопроходную конфигурацию, поскольку в этом случае мы сможем отделить сильное классическое поле от (слабых) квантовых флуктуаций, для которых мы запишем линеаризованные уравнения распространения. В этом разделе мы рассмотрим простейший случай взаимодействия типа I, при котором поле основной гармоники имеет только одно выделенное направление поляризации, а следующий раздел будет посвящен случаю фазового синхронизма типа II, когда важную роль играет поляризация полей основных гармоник. В следующих параграфах мы обсудим динамику операторов полей, получим уравнения распространения и проанализируем результаты для различных конфигураций.

8.3.1. Динамика операторов поля. Мы будем использовать подход, аналогичный изложенному в [25] для ОПУ. Главное отличие нашего описания состоит в том, что для ОПУ в большинстве случаев поле накачки может рассматриваться как неистощающееся и для него применимо классическое приближение. При описании процесса ГВГ истощением накачки пренебрегать нельзя и обе гармоники — и основная, и вторая, следует рассматривать квантово-механически [34]. Этот параграф разделен на две части: сперва мы выведем уравнения распространения в нелинейной среде для операторов поля основной и второй гармоник, а затем линеаризуем квантовые флуктуации в окрестности классических решений нелинейных уравнений.

А. Уравнения распространения. Начнем с определения медленно меняющихся операторов уничтожения фотонов основной и второй гармоник $\hat{A}_F(z, \rho, t)$ и $\hat{A}_S(z, \rho, t)$, представляя положительно-частотную часть электрических полей $\hat{E}_i^{(+)}(z, \rho, t)$ ($i = F, S$) в виде:

$$\hat{E}_i^{(+)}(z, \rho, t) = i\xi_i \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\epsilon_0 c}} \exp[i(k_i z - \omega_i t)] \hat{A}_i(z, \rho, t). \quad (8.7)$$

Волновые числа k_F и k_S для волн основной и второй гармоник в нелинейной среде вследствие дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$ зависят от частоты волн. В выражении (8.7) коэффициенты

$$\xi_i = \frac{u(k_i)v(k_i)}{c^2 \cos \rho(k_i)} \quad (8.8)$$

содержат групповую скорость $u(k_i)$, фазовую скорость $v(k_i)$ и некоторый обобщенный угол анизотропии $\rho(k_i)$. Они описывают отличие напряженности электрического поля в среде от его значения в вакууме. z — координата на продольной оси, определенной как ось пучка; $\rho = (x, y)$ — двумерный вектор, описывающий положение точки в поперечной плоскости.

Динамика этих двух полей в кристалле с нелинейностью $\chi^{(2)}$ описывается гамильтонианом [25, 34]:

$$\hat{H} = \hat{H}_{0,F} + \hat{H}_{0,S} + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (8.9)$$

в котором $\hat{H}_{0,F}$ и $\hat{H}_{0,S}$ — гамильтонианы свободных полей основной и второй гармоник в среде, а $\hat{H}_{\text{int}}$ описывает взаимодействие между двумя полями, генерируемыми в нелинейном кристалле. В терминах медленно меняющихся операторов $\hat{\mathcal{A}}_i(z, \rho, t)$ гамильтонианы свободных полей имеют вид [25]:

$$\hat{H}_{0,i} = \frac{\hbar\omega_i}{c} \int_V dz d^2\rho \hat{\mathcal{A}}_i^\dagger(z, \rho, t) \hat{\mathcal{A}}_i(z, \rho, t), \quad (8.10)$$

где интегрирование по пространственным переменным проводится по всему объему кристалла. Среднее значение $\langle \hat{\mathcal{A}}_i^\dagger(z, \rho, t) \hat{\mathcal{A}}_i(z, \rho, t) \rangle$ можно интерпретировать как плотность энергии, приходящаяся на единицу объема, измеренная в единицах $\hbar\omega_i/c$. Гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_{\text{int}}$ отвечает трехволновому взаимодействию, которое при обычных предположениях мгновенного локального нелинейного отклика среды [35] можно записать через медленно меняющиеся операторы полей:

$$\hat{H}_{\text{int}} = i\hbar\lambda \int_V dz d^2\rho \left[e^{i\Delta kz} \hat{\mathcal{A}}_S^\dagger(z, \rho, t) \hat{\mathcal{A}}_F^2(z, \rho, t) - e^{-i\Delta kz} \hat{\mathcal{A}}_S(z, \rho, t) \hat{\mathcal{A}}_F^{\dagger 2}(z, \rho, t) \right], \quad (8.11)$$

где $\hbar\lambda = \chi^{(2)} (\hbar/2\epsilon_0 c)^{3/2} \xi_F^2 \xi_S \sqrt{\omega_F^2 \omega_S}$; $\Delta k = 2k_F - k_S$ — коллинеарная фазовая расстройка. Вклад в гамильтониан $\hat{H}_{\text{int}}$ вносят два слагаемых: первый член в (8.11) отвечает генерации второй гармоники, а второй — параметрическому преобразованию частоты вниз. Динамика двух полевых операторов описывается уравнениями Гейзенберга, которые, исходя из вида гамильтонианов (8.10) и (8.11), можно записать как

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\mathcal{A}}_F(z, \rho, t) = & i\omega_F \hat{\mathcal{A}}_F(z, \rho, t) - i\omega_F \int_V dz' d^2\rho' G_F(z - z', \rho - \rho') \hat{\mathcal{A}}_F(z', \rho', t) - \\ & - 2c\lambda \int_V dz' d^2\rho' G_F(z - z', \rho - \rho') e^{-i\Delta kz'} \hat{\mathcal{A}}_S(z', \rho', t) \hat{\mathcal{A}}_F^\dagger(z', \rho', t), \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\mathcal{A}}_S(z, \rho, t) = & i\omega_S \hat{\mathcal{A}}_S(z, \rho, t) - i\omega_S \int_V dz' d^2\rho' G_S(z - z', \rho - \rho') \hat{\mathcal{A}}_S(z', \rho', t) - \\ & - 2c\lambda \int_V dz' d^2\rho' G_F(z - z', \rho - \rho') e^{-i\Delta kz'} \hat{\mathcal{A}}_F^2(z', \rho', t), \end{aligned} \quad (8.13)$$

где

$$G_i(z - z', \rho - \rho') = \int \frac{dk_z d^2q}{(2\pi)^3} \frac{\omega(\sqrt{k_z^2 + \mathbf{q}^2})}{\omega_i} \exp[i(k_z - k_i)(z - z') + i\mathbf{q} \cdot (\rho - \rho')]. \quad (8.14)$$

Удобнее работать с операторами, определенными не в реальном, а в фурье-пространстве:

$$\hat{A}_\sigma(z, \mathbf{q}, \Omega) = \int d^2\rho e^{-i\mathbf{q} \cdot \rho} \int dt e^{i\Omega t} \hat{A}_\sigma(z, \rho, t). \quad (8.15)$$

Для того, чтобы отделить нелинейные эффекты в кристалле от эффектов, связанных со свободным распространением полей в кристалле, определим для каждого из полей фурье-амплитуды, скорректированные относительно распространения:

$$\hat{A}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) = \xi_i \sqrt{n_i} \exp\{-i[k_i^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_i]z\} \hat{\mathcal{A}}_i(z, \mathbf{q}, \Omega), \quad (8.16)$$

где $k_i^z(\mathbf{q}, \Omega) = \sqrt{k(\omega_i + \Omega)^2 - \mathbf{q}^2}$ — продольное волновое число волны с частотой $\omega_i + \Omega$ и поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$. Экспоненциальный волновой множитель в (8.16) выбран так, чтобы в точности компенсировать зависимость от z волны, связанной с полевым оператором $\hat{A}_i(z, \mathbf{q}, \Omega)$ при свободном распространении. Множитель перед экспонентой $\xi_i \sqrt{n_i} = \sqrt{u_i/c}$, где u_i — это групповая скорость волны с частотой ω_i , дает возможность сопоставить величину $\langle \hat{A}_i^\dagger(z, \rho, t) \hat{A}_i(z, \rho, t) \rangle$ со средней плотностью потока фотонов в среде (фотоны $\cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$).

Применяя параксиальное ($|\mathbf{q}| \ll k_\sigma^z(\mathbf{q}, \Omega)$) и квазимонохроматическое ($\Omega \ll \omega_\sigma$) приближения, стандартные для таких задач, и полагая зависимость полевых операторов от z медленной, можно показать, что фурье-амплитуды, скорректированные относительно распространения, удовлетворяют следующей системе уравнений [34]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_F(z, \mathbf{q}, \Omega) = & -2K \int d^2q' d\Omega' \hat{A}_F^\dagger(z, \mathbf{q}', \Omega') \hat{A}_S(z, \mathbf{q} + \mathbf{q}', \Omega + \Omega') \times \\ & \times \exp\left\{i[k_S^z(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \Omega + \Omega') - k_F^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_F^z(\mathbf{q}', \Omega')]\right\}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_S(z, \mathbf{q}, \Omega) = & +K \int d^2q' d\Omega' \hat{A}_F(z, \mathbf{q}', \Omega') \hat{A}_F(z, \mathbf{q} - \mathbf{q}', \Omega - \Omega') \times \\ & \times \exp\left\{i[k_F^z(\mathbf{q}', \Omega') + k_F^z(\mathbf{q} - \mathbf{q}', \Omega - \Omega') - k_S^z(\mathbf{q}, \Omega)]\right\}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

где $K = (2\pi)^{-3} \sqrt{c^3/u_F^2 u_S} \lambda$ — коэффициент связи взаимодействия. Эти связанные дифференциальные операторные уравнения описывают распространение полей основной и второй гармоник в нелинейной среде. Правые части

представляют суммы по всем трехволновым процессам, в которых могут генерироваться волны основной и второй гармоник с поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$ и частотной отстройкой Ω , проходящим с сохранением энергии и импульса. Эти уравнения являются обобщением уравнений распространения, выведенных в [36] и [37] для одномодового случая.

Решая уравнения (8.17) и (8.18), можно получить функциональную зависимость полей на выходной плоскости кристалла от полей на входе. В принципе это позволяет вычислить выходные поля для любого произвольного квантово-механического состояния электромагнитного поля, освещающего кристалл. Однако из-за нелинейного характера уравнений, для их решения необходимы некоторые приближения, описанные ниже.

В. Соотношение вход-выход для двух полей. Теперь рассмотрим ситуацию, которая подходит для описания процесса обработки изображения: предположим, что распределение поля во входной плоскости кристалла является суперпозицией однородного поля накачки на частоте ω и слабого когерентного сигнала на частоте 2ω с некоторым пространственно-временным распределением, соответствующим входному изображению. Предположим, что в любой точке внутри кристалла поле основной гармоники, генерируемое входным сигналом, остается слабым относительно поля накачки. Следуя [36] и [37] запишем полевые операторы основной и второй гармоник, скорректированные относительно эффекта распространения:

$$\hat{A}_F(z, \mathbf{q}, \Omega) = \tilde{c}_F(z) \delta^{(2)}(\mathbf{q}) \delta(\Omega) + \hat{a}_F(z, \mathbf{q}, \Omega), \quad (8.19)$$

$$\hat{A}_S(z, \mathbf{q}, \Omega) = \tilde{c}_S(z) \delta^{(2)}(\mathbf{q}) \delta(\Omega) + \hat{a}_S(z, \mathbf{q}, \Omega), \quad (8.20)$$

где $\tilde{c}_F(z)$ и $\tilde{c}_S(z)$ — амплитуды сильных монохроматических волн с частотами ω и 2ω соответственно, генерируемыми волной накачки внутри кристалла, рассматриваемые для простоты как плоские волны; $\hat{a}_F(z, \mathbf{q}, \Omega)$ и $\hat{a}_S(z, \mathbf{q}, \Omega)$ — операторы квантовых полей первой и второй гармоник. Такое представление операторов учитывает распространение не только сильного поля накачки, но и любых распределений полей, инжектированных в кристалл. В частности, оно включает распространение вакуумных флуктуаций, проникающих в кристалл через входную плоскость и отвечающих за образование квантовых флуктуаций выходных полей, как показано в [36, 37]. Подставляя (8.19) и (8.20) в (8.17) и (8.18), в нулевом порядке малости получим уравнения:

$$\frac{d}{dz} \tilde{c}_F(z) = -2K \tilde{c}_F^*(z) \tilde{c}_S(z) e^{-i\Delta k z}, \quad (8.21)$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{c}_S(z) = K \tilde{c}_F^2(z) e^{i\Delta k z}, \quad (8.22)$$

которые являются классическими уравнениями нелинейной оптики. В соответствии с законом сохранения потока энергии в кристаллах без потерь (соотношение Мэнли–Роу), полная мощность W остается неизменной: $|\tilde{c}_F(z)|^2 + 2|\tilde{c}_S(z)|^2 = |\tilde{c}_F(0)|^2 + 2|\tilde{c}_S(0)|^2 = W$. Вводя безразмерную характерную длину взаимодействия $z_0 = 1/\sqrt{2W}K$ и масштабируя простран-

ственную переменную $\zeta = z/z_0$ и амплитуды полей $c_F(z) = \tilde{c}_F(z)/\sqrt{W}$, и $c_S(z) = \tilde{c}_S(z)/\sqrt{W/2}$ приходим к уравнениям:

$$\frac{d}{d\zeta} c_F(\zeta) = -c_F^*(\zeta) c_S(\zeta) e^{-i\Delta s \zeta}, \quad (8.23)$$

$$\frac{d}{d\zeta} c_S(\zeta) = c_F^2(\zeta) e^{i\Delta s \zeta}, \quad (8.24)$$

где $\Delta s = \Delta k z_0$. Эти уравнения можно решить аналитически ¹⁾ [46].

В первом порядке малости получим:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_F(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = -c_S(\zeta) \hat{a}_F^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) e^{-i\Delta(\mathbf{q}, \Omega)\zeta} - \sqrt{2} c_F^*(\zeta) \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{iD(\mathbf{q}, \Omega)\zeta}, \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \sqrt{2} c_F(\zeta) \hat{a}_F(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{iD(\mathbf{q}, \Omega)\zeta}. \quad (8.26)$$

В уравнениях (8.25) и (8.26) присутствуют две разные функции фазовой расстройки:

$$\Delta(\mathbf{q}, \Omega) = [k_F^z(\mathbf{q}, \Omega) + k_F^z(-\mathbf{q}, -\Omega) - k_S] z_0, \quad (8.27)$$

$$D(\mathbf{q}, \Omega) = [k_F^z(\mathbf{q}, \Omega) + k_F - k_S^z(\mathbf{q}, \Omega)] z_0. \quad (8.28)$$

Необходимо отметить, что в случае точного фазового синхронизма анализ линеаризованных флуктуаций показывает появление идеально сжатого вакуума в основной гармонике при больших длинах взаимодействия [37]. Это решение противоречит исходному предположению, накладываемому при линеаризации, о малости амплитуд флуктуаций на частоте ω по сравнению со средними значениями полей [38]. Из анализа линейных флуктуаций второй гармоники, возбуждаемой в однопроходной схеме, с использованием стохастического интегрирования полных нелинейных уравнений, записанных в положительном P -представлении [38–40], следует, что это приближение справедливо, когда длины взаимодействия $\zeta < 4$ [34].

Различные члены в уравнениях (8.25) и (8.26) имеют ясную физическую интерпретацию: первый член в правой части (8.25) отражает преобразование внутри кристалла сильной однородной волны второй гармоники, генерируемой в присутствии накачки, в два фотона основной волны с противоположными частотными отстройками Ω и $-\Omega$ и волновыми векторами $\mathbf{q}$ и $-\mathbf{q}$. Этот процесс, который мы будем называть процесс I, приводит к связи амплитуд $\hat{a}_F(z, \mathbf{q}, \Omega)$ и $\hat{a}_F^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega)$. Второй член в правой части (8.25) описывает процесс преобразования частоты вниз; волна второй гармоники с $(\mathbf{q}, \Omega)$ преобразуется в основную волну с $(\mathbf{q}, \Omega)$, что ведет к взаимосвязи операторов $\hat{a}_F(z, \mathbf{q}, \Omega)$

¹⁾ Решение уравнений (8.23) и (8.24) приведено также в книгах [54–56].

и $\hat{a}_S(z, \mathbf{q}, \Omega)$ (процесс II). Из закона сохранения энергии следует, что этот процесс изменения частоты происходит с излучением фотона основной волны накачки. Обратный процесс (процесс III) действует как источник фотонов второй гармоники и ему соответствует правая часть уравнения (8.26). Большая фазовая расстройка приводит к быстрым пространственным осцилляциям этого члена, что уменьшает эффективность данного процесса. Следовательно, процесс I будет эффективен при $\Delta(\mathbf{q}, \Omega)\zeta \ll 1$, в то время как процессы II и III эффективны при $D(\mathbf{q}, \Omega)\zeta \ll 1$. В параксиальном и монохроматическом приближениях продольное волновое число можно записать в виде:

$$k_i^z(\mathbf{q}, \Omega) = k_i + \left[\frac{\omega_i n'_i}{c} + \frac{k_i}{\omega_i} \right] \Omega + \frac{k_i''}{2} \Omega^2 - \frac{q^2}{2k_i}, \quad (8.29)$$

где $k_i'' = \partial^2 k / \partial \omega^2$ и $n'_i = \partial n / \partial \omega$ рассчитываются при $\omega = \omega_i$. Тогда [45]

$$\Delta(\mathbf{q}, \Omega) = \Delta s + \text{sign}(k_F'') \frac{\Omega^2}{\Omega_2^2} - \frac{q^2}{q_2^2}, \quad (8.30)$$

$$D(\mathbf{q}, \Omega) = \Delta s - \frac{\Omega}{\Omega_1} + \text{sign}(k_F'') \frac{\Omega^2}{4\Omega_2^2} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\Delta k}{2k_F} \right) \frac{q^2}{q_2^2}, \quad (8.31)$$

где $q_2 = \sqrt{k_F / z_0}$, $\Omega_1 = \left(\frac{\omega}{c} (2n'_S - n'_F) z_0 \right)^{-1}$ и $\Omega_2 = (|k_F''| z_0)^{-1/2}$.

Удобно ввести величины в векторных обозначениях [45]:

$$\hat{\mathbf{a}}(z, \mathbf{q}, \Omega) = \begin{pmatrix} \hat{a}_F(z, \mathbf{q}, \Omega) \\ \hat{a}_S(z, \mathbf{q}, \Omega) \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{a}}^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) = \begin{pmatrix} \hat{a}_F^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) \\ \hat{a}_S^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Решение уравнений (8.25) и (8.26) можно представить в компактном виде как преобразование вход-выход, связывающее полевые операторы в выходной плоскости кристалла с их значениями на входе:

$$\hat{\mathbf{a}}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) = \mathbf{U}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) \cdot \hat{\mathbf{a}}(0, \mathbf{q}, \Omega) + \mathbf{V}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) \cdot \hat{\mathbf{a}}^\dagger(0, -\mathbf{q}, -\Omega). \quad (8.33)$$

В этом преобразовании присутствуют восемь комплексных коэффициентов: $\mathbf{U}_F = (U_{FF}, U_{FS})$, $\mathbf{U}_S = (U_{SF}, U_{SS})$, $\mathbf{V}_F = (V_{FF}, V_{FS})$ и $\mathbf{V}_S = (V_{SF}, V_{SS})$. Их можно определить, решая нелинейные уравнения.

Аналитические выражения для коэффициентов преобразования вход-выход (8.33) получены в [37] при $q = 0$ и $\Omega = 0$. В общем случае, однако, аналитические решения не известны, так что коэффициенты должны определяться численным интегрированием уравнений (8.25) и (8.26).

8.3.2. Квантовая обработка изображений. Рассмотрим оптическое устройство, представленное на рис. 8.9: квадратично-нелинейный кристалл, накачиваемый волной на частоте ω помещен в двухлинзовую телескопическую систему. Распределение поля, инжектируемого в нелинейный кристалл, представляет собой пространственное преобразование Фурье исходного изоб-

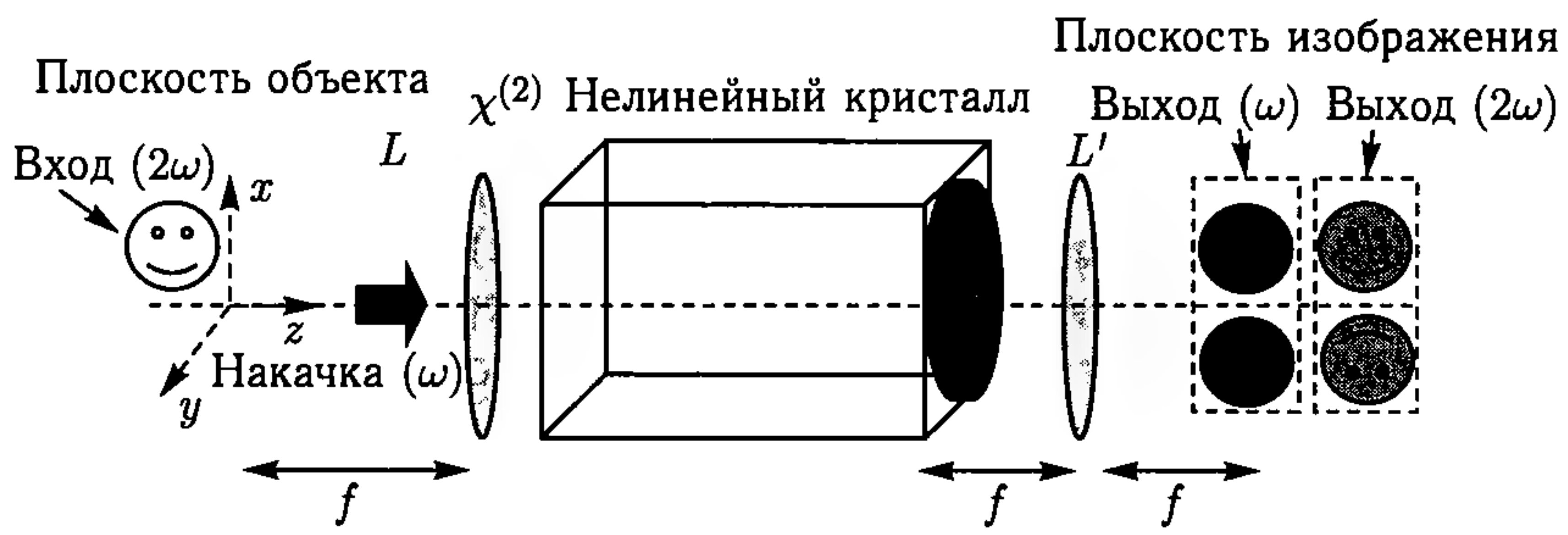


Рис. 8.9. Схема оптического устройства, основанного на генерации второй гармоники. Нелинейный кристалл, накачиваемый на частоте ω , помещен в двухлинзовую телескопическую систему. Зрачок в выходной плоскости кристалла имеет конечную ширину и ограничивает пространственную полосу пропускания системы

ражения. После обработки вторая линза выполняет обратное фурье-преобразование в реальное координатное пространство. Эта двухлинзовая конфигурация отображает любую точку объектной плоскости и плоскости изображения в плоскую волну с определенным поперечным волновым вектором. Эта конфигурация аналогична схеме, основанной на процессе параметрического преобразования частоты вниз [41, 42]. Чтобы реализовать квантовую обработку изображения, мы рассматриваем входное изображение на частоте второй гармоники 2ω . Ожидается, что это устройство позволит получить пару симметричных усиленных копий входного изображения на частотах основной и второй гармоник [34]. Мы обсудим результаты в терминах плоских волн с определенными волновыми векторами, поскольку телескопическая система преобразует эти волновые вектора в положения на поперечной плоскости. Кроме того, мы будем предполагать изменение во времени входного изображения медленным и при расчете выходного изображения положим $\Omega \rightarrow 0$.

Нелинейный кристалл накачивается только на частоте ω . Полагая коллинеарную фазовую расстройку $\Delta k = 0$, получим решения уравнений (8.23) и (8.24) в виде:

$$\tilde{c}_F(\zeta) = e^{i\phi_F^{(0)}} \operatorname{sech}(\zeta), \quad (8.34)$$

$$\tilde{c}_S(\zeta) = e^{i\phi_F^{(0)}} \tanh(\zeta), \quad (8.35)$$

где $\phi_F^{(0)}$ — фаза волны накачки.

Входной сигнал на частоте 2ω описывается когерентным состоянием $|\alpha_{\text{in}}\rangle$ с комплексной амплитудой $\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)$. На частоте ω состояние $|\alpha_{\text{in}}\rangle$ предполагается вакуумным. Следовательно, мы имеем:

$$\begin{aligned} \hat{a}_S(0, \mathbf{q}, \Omega)|\alpha_{\text{in}}\rangle &= \alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)|\alpha_{\text{in}}\rangle, \\ \hat{a}_F(0, \mathbf{q}, \Omega)|\alpha_{\text{in}}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (8.36)$$

При параметрическом преобразовании частоты вниз, в зависимости от свойств симметрии $\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)$, различают два режима усиления: фазово-нечувствительный режим, который реализуется, если входной сигнал задан на половине объектной плоскости ($\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega) = 0$ при $q_y < 0$) [19], и фазово-

чувствительный режим, соответствующий случаю симметричного входного сигнала, когда $\alpha_{in}(\mathbf{q}, \Omega) = \alpha_{in}(-\mathbf{q}, -\Omega)$ [42]. Далее мы обсудим эти два режима в системах с ГВГ.

А. Фазово-нечувствительная конфигурация. Используя преобразование вход-выход (8.33) для входного сигнала, задаваемого выражениями (8.36) получим, что поле основной моды определяется следующим соотношением:

$$\langle \hat{a}_F^\dagger(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_F(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) (|V_{FF}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 + |V_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2) + \\ + |U_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 |\alpha_{in}(\mathbf{q}, \Omega)|^2 + |V_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 |\alpha_{in}(-\mathbf{q}, -\Omega)|^2, \quad (8.37)$$

которое, как видно, не зависит от фазы входного сигнала. Здесь присутствуют вклады четырех различных слагаемых. Первые два члена в правой части (8.37) не зависят от напряженности входной волны и соответствуют спонтанному параметрическому рассеянию, присутствующему в кристалле даже в отсутствие когерентного сигнала на входе. Два других члена пропорциональны, соответственно, интенсивностям входных волн с $(\mathbf{q}, \Omega)$ и $(-\mathbf{q}, -\Omega)$. Поскольку здесь обсуждается схема со специфической инжекцией, для данного волнового вектора $\mathbf{q}$, для которого рассматривается выходной сигнал, только один из этих членов не равен нулю. В случае объекта, ограниченного верхней частью объектной плоскости, на выходе получают два изображения. Одно из них расположено в верхней части выходной плоскости и является усиленной версией входного изображения с интенсивностью $|U_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 |\alpha_{in}(\mathbf{q}, \Omega)|^2$. Другое расположено в нижней полуплоскости, имеет интенсивность $|V_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 |\alpha_{in}(-\mathbf{q}, -\Omega)|^2$ и является усиленной версией перевернутого входного изображения. В основе генерации этих изображений лежит физический механизм обусловленный процессом I: фотоны второй гармоники, генерируемые в присутствии сильной волны накачки внутри кристалла, преобразуются в пары фотонов-близнецов основной моды с противоположными частотными отстройками и волновыми векторами [19].

Интенсивность выходного поля второй гармоники выражается аналогичным образом:

$$\langle \hat{a}_S^\dagger(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) (|V_{SF}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 + |V_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2) + \\ + |U_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 |\alpha_{in}(\mathbf{q}, \Omega)|^2 + |V_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2 |\alpha_{in}(-\mathbf{q}, -\Omega)|^2. \quad (8.38)$$

Выходное поле второй гармоники также содержит две усиленные версии входного изображения: прямую и фазово-сопряженную. Здесь действует другой механизм: это не одновременная генерация двух волн второй гармоники с противоположными волновыми векторами и частотными отстройками, а преобразование двух фотонов основной моды — процесс преобразования частоты вверх (процесс III).

Можно количественно оценить эффективность этих механизмов, определив для каждого из четырех изображений на выходе локальный коэффициент фазово-нечувствительного усиления как отношение интенсивности выходной

волны к интенсивности волны на входе $|\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)|^2$. Если в выходной плоскости кристалла находится зрачок конечной апертуры и достаточного размера, то вкладом спонтанных процессов в выходное поле можно пренебречь [41]. В этом случае коэффициенты усиления имеют вид:

$$G_F(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \frac{\langle \hat{a}_F^\dagger(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_F(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \rangle}{|\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)|^2} = |U_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2, \quad (8.39)$$

$$G_F(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) = \frac{\langle \hat{a}_F^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) \hat{a}_F(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) \rangle}{|\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)|^2} = |V_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2, \quad (8.40)$$

$$G_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \frac{\langle \hat{a}_S^\dagger(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \rangle}{|\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)|^2} = |U_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2, \quad (8.41)$$

$$G_S(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) = \frac{\langle \hat{a}_S^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) \hat{a}_S(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) \rangle}{|\alpha_{\text{in}}(\mathbf{q}, \Omega)|^2} = |V_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)|^2. \quad (8.42)$$

На рис. 8.10 показаны коэффициенты фазово-нечувствительного усиления в зависимости от длины взаимодействия в кристалле. На входной плоскости коэффициенты имеют значения $G_F(\zeta = 0, \mathbf{q}, \Omega) = G_F(\zeta = 0, -\mathbf{q}, -\Omega) = G_S(\zeta = 0, -\mathbf{q}, -\Omega) = 0$ и $G_S(\zeta = 0, \mathbf{q}, \Omega) = 1$, что просто определяет выбранный вход. С ростом длины взаимодействия коэффициент $G_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$ уменьшается, а $G_F(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$ — увеличивается, в то время как значения $G_F(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega)$ и $G_S(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega)$ остаются очень малыми. При малых длинах взаимодействия доминирующим является процесс II. При $\zeta \simeq 1,4$ инжектируемый сигнал второй гармоники целиком участвует в процессе пара-

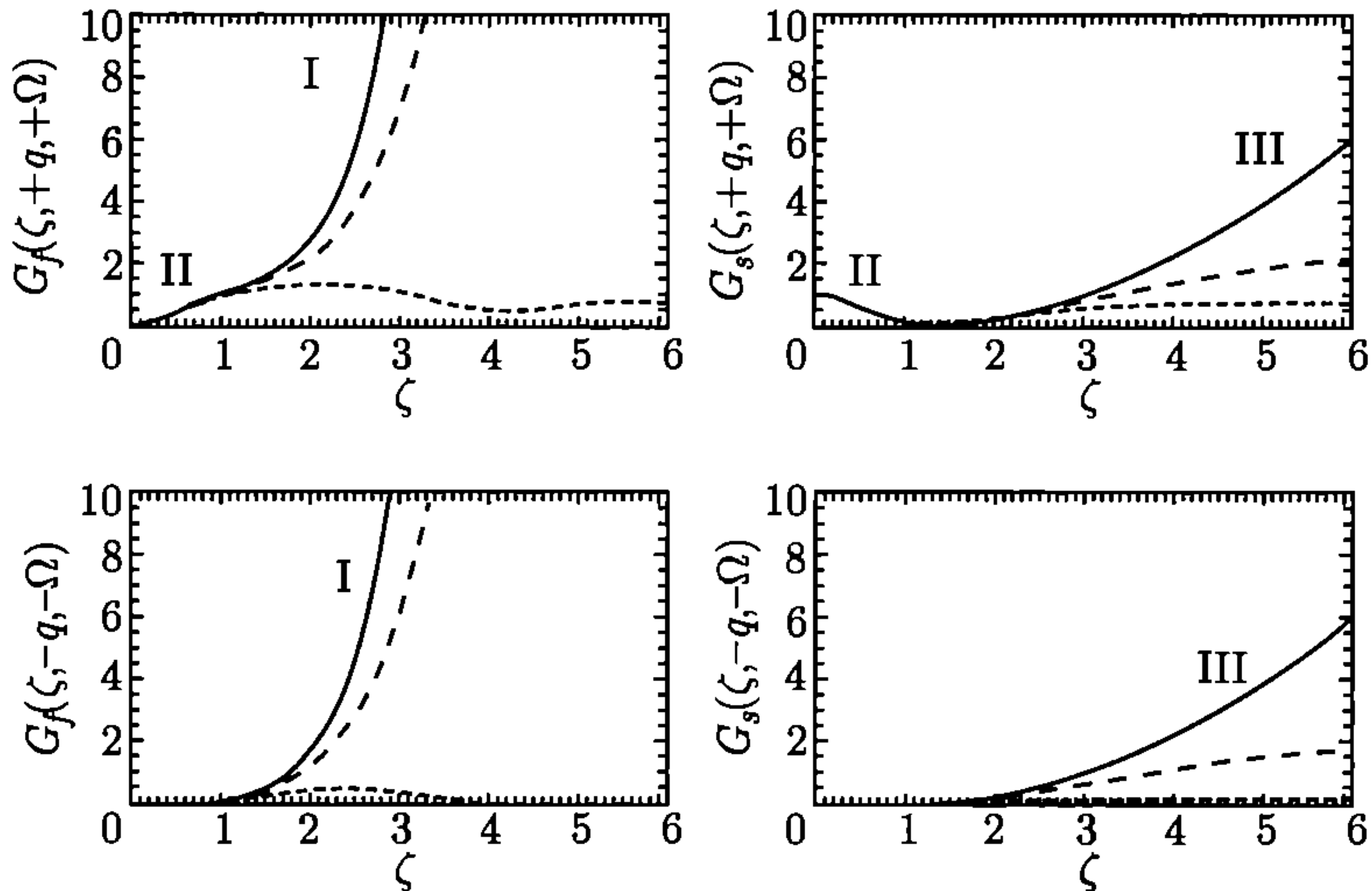


Рис. 8.10. Коэффициент фазово-нечувствительного усиления в зависимости от длины взаимодействия ζ для волн с $\Omega = 0$ и волновыми числами $q = 0,5$ (сплошные линии), $q = 1,2$ (штриховые линии) и $q = 1,6$ (точечные линии), масштабированными в единицах $q_2 = \sqrt{k_F/z_0}$. Символами I, II и III отмечены соответствующие доминирующие элементарные процессы.

Процесс III' совпадает с процессом III с заменой q на $-q$

метрического преобразования частоты вниз. Дальнейшее увеличение длины взаимодействия ведет ко второму этапу обработки сигнала, который для малых волновых чисел (сплошные линии на рис. 8.10) характеризуется быстрым симметричным ростом коэффициентов усиления основной моды с q и $-q$. Это проявление процесса I параметрического преобразования частоты вниз. Эта часть кристалла преимущественно работает как ОПУ с накачкой, зависящей от координаты z . Однако, присутствие слабого остаточного поля накачки на частоте ω приводит к частичному параметрическому преобразованию усиленного поля основной моды с повышением частоты (процесс III). Этот механизм отвечает за небольшое увеличение коэффициентов усиления при q и $-q$ при увеличении длины взаимодействия и ведет к формированию двух фазово-сопряженных выходных изображений на частоте второй гармоники.

Вследствие дифракции, проявляющейся как зависимость функций фазовой расстройки $D(q, \Omega)$ и $\Delta(q, \Omega)$ от q и Ω , коэффициенты усиления при больших значениях поперечных волновых чисел уменьшаются, и при $q > \sqrt{2}$ входной сигнал более не усиливается, а его изменение в зависимости от длины взаимодействия носит осциллирующий характер [34, 43]. Следовательно, эффективно будет обрабатываться только конечная часть входного изображения, имеющая форму диска, центрированного относительно оси пучка [34], аналогично ситуации, имеющей место в ОПУ с идеальным фазовым синхронизмом [19].

В. Фазово-чувствительная конфигурация. Рассмотрим теперь симметричное входное изображение $\alpha_{in}(-q, -\Omega) = \alpha_{in}(q, \Omega)$. Для неподвижных сигналов это соответствует симметрии входного изображения относительно оси пучка. В случае ОПУ для таких симметричных изображений хорошо известно, что выходное поле формируется как когерентная суперпозиция обеих волн-близнецов, появляющихся в элементарных процессах параметрического преобразования частоты вниз [44]. Следовательно, имеющее место усиление фазово-чувствительно, что является одним из необходимых условий усиления изображений без ухудшения отношения сигнал-шум [21, 24, 42].

Когда изображение, поступающее в схему ГВГ, обладает симметрией относительно оси пучка, выходные изображения на каждой частоте демонстрируют такую же симметрию. При тех же предположениях, что делались в случае фазово-нечувствительного усиления, отношение интенсивностей выбранного участка каждого из входных изображений и соответствующей части выходного изображений определяется коэффициентами усиления:

$$G_F^{(\phi_{in})}(\zeta, q, \Omega) = |U_{FS}(\zeta, q, \Omega) e^{i\phi_{in}} + V_{FS}(\zeta, q, \Omega) e^{-i\phi_{in}}|^2, \quad (8.43)$$

$$G_S^{(\phi_{in})}(\zeta, q, \Omega) = |U_{SS}(\zeta, q, \Omega) e^{i\phi_{in}} + V_{SS}(\zeta, q, \Omega) e^{-i\phi_{in}}|^2, \quad (8.44)$$

которые зависят от фазы входного сигнала ϕ_{in} . Для простоты мы рассматриваем только входные изображения с однородной фазой $\alpha_{in}(q, \Omega) = |\alpha_{in}(q, \Omega)| e^{i\phi_{in}}$.

На рис. 8.11 изображены фазовые зависимости коэффициентов усиления для различных значений волновых чисел, которые в телескопической системе

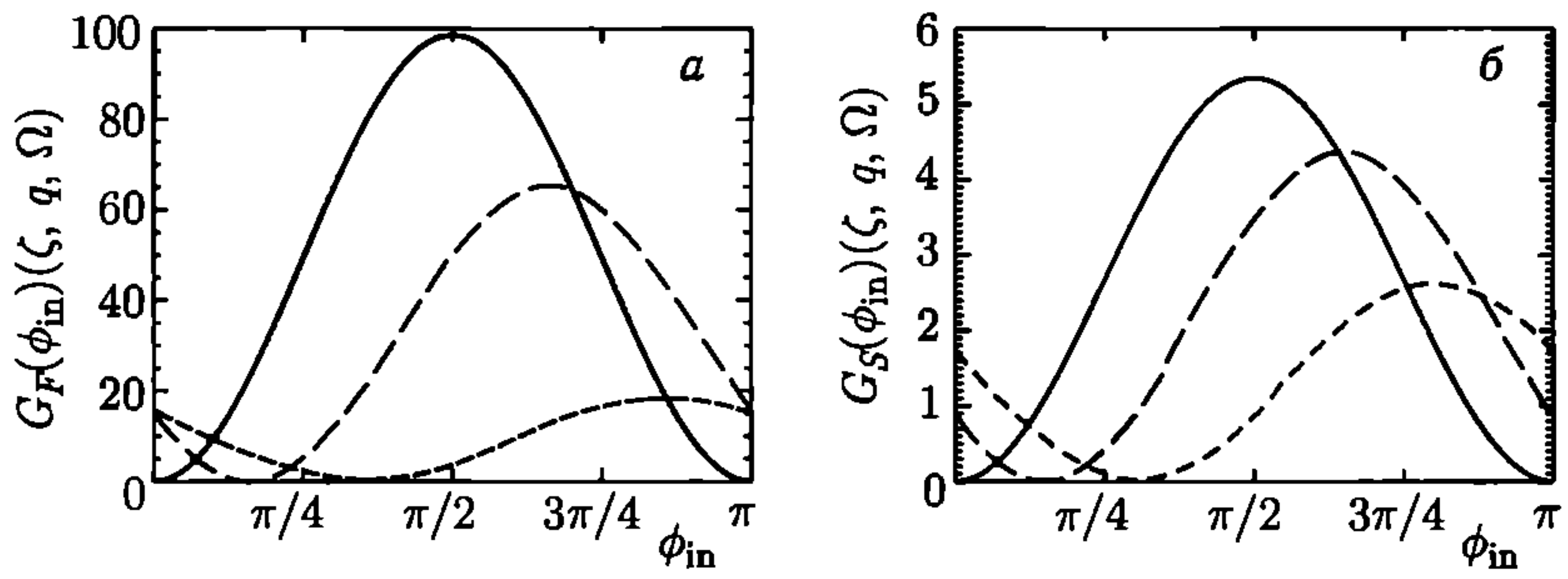


Рис. 8.11. Коэффициенты фазово-чувствительного усиления для основной (а) и второй (б) гармоник поля в зависимости от фазы входного сигнала (в радианах) для поперечных волновых чисел $q = 0$ (сплошные линии), $q = 1$ (штриховые линии) и $q = 1,4$ (точечные линии). Длина взаимодействия $\zeta = 3,32$

соответствуют различным участкам поперечной плоскости. На оптической оси ($\mathbf{q} = 0$) оба коэффициента усиления достигают максимальные значения при $\phi_{in} = \pi/2 + n\pi$ и минимальные значения при $\phi_{in} = n\pi$ [34]. Для внеосевых областей поперечной плоскости положения максимумов и минимумов коэффициентов усиления сдвигаются (пунктирные линии и линии, изображенные точками, на рис. 8.11). Это означает, что для входных изображений с однородной фазой условие максимума коэффициента усиления может удовлетворяться только в одной точке поперечной плоскости. Однако это можно компенсировать, сместив нелинейный кристалл относительно линз, что равнозначно наложению параболического фазового профиля на фазы всех точек входного изображения, как было показано в [42] для случая ОПУ.

Влияние дифракции аналогично случаю фазово-нечувствительного усиления: обработка изображения эффективна в области конечной ширины, центрированной относительно оси пучка, в то время как вне этой области нелинейный кристалл ведет себя как прозрачная среда [34].

Теперь обратимся к квантовым свойствам системы, определяемым квантовыми флуктуациями выходного поля. Сначала для основной и второй гармоник поля введем следующие квадратурные операторы:

$$\hat{x}_i^{\phi_{LO}}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \frac{1}{2} \left[\hat{\tilde{a}}_i(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{-i\phi_{LO}} + \hat{\tilde{a}}_i^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) e^{i\phi_{LO}} \right], \quad (8.45)$$

которые определены через операторы амплитуд поля $\hat{\tilde{a}}_i(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$, связанные с амплитудами $\hat{a}_i(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$, скорректированными относительно эффекта распространения, следующим образом:

$$\hat{\tilde{a}}_i(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \exp \left\{ i[k_i^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_i]z_0\zeta \right\} \hat{a}_i(\zeta, \mathbf{q}, \Omega). \quad (8.46)$$

Экспоненциальный множитель просто восстанавливает фазу, приобретаемую при распространении, которую нам технически удобно было выделить при записи (8.16). Как показано в [25], в отличие от величин, рассмотренных выше, теперь этот фазовый множитель существенен.

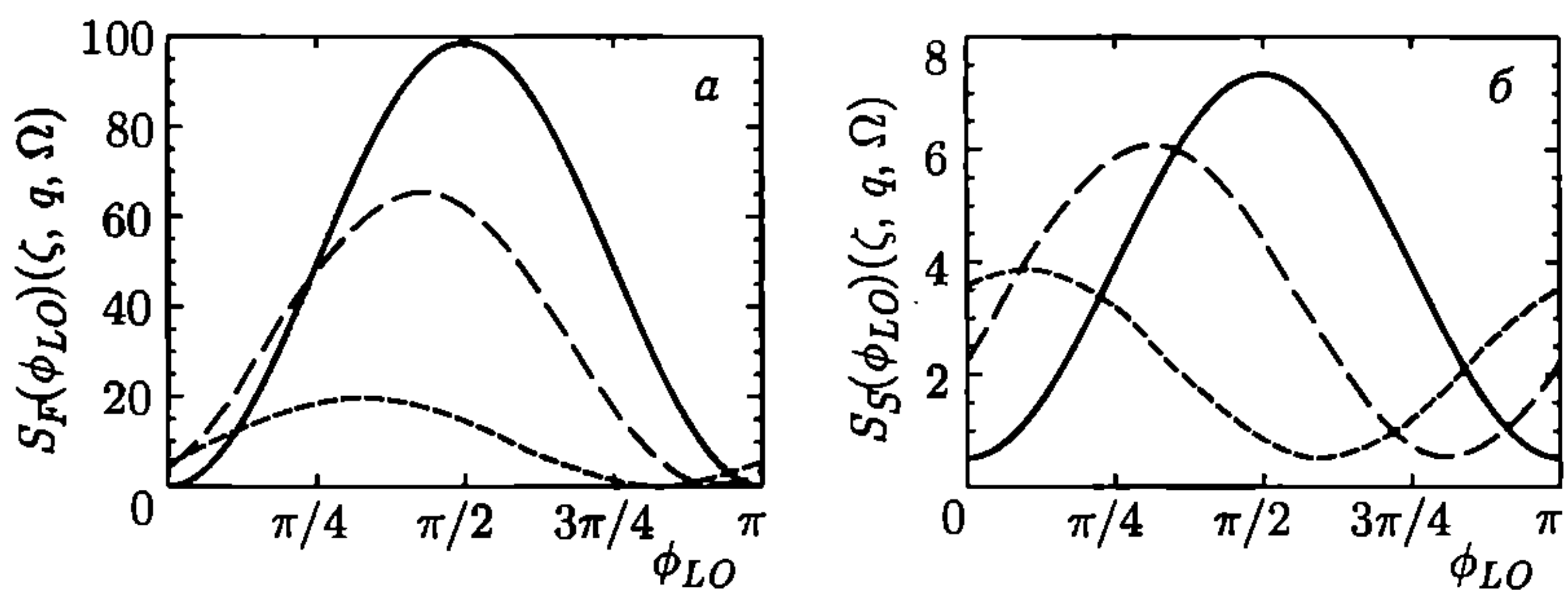


Рис. 8.12. Спектр сжатия $S_F^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$ для полей основной (а) и второй (б) гармоник в зависимости от фазы гомодина (в радианах) для волн с $\Omega = 0$ и поперечными волновыми числами $q = 0$ (сплошные линии), $q = 1$ (штриховые линии) и $q = 1,4$ (точечные линии). Длина взаимодействия $\zeta = 3,32$

Корреляционная функция флуктуаций квадратурных компонент $\delta\hat{x}_i^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$ определяет спектр сжатия $S_i^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$:

$$\langle \delta\hat{x}_i^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \delta\hat{x}_i^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}', \Omega') \rangle = \frac{1}{4} \delta^{(2)}(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(\Omega + \Omega') S_i^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega). \quad (8.47)$$

В случае идеальной квантовой эффективности фотодетекторов, спектр сжатия совпадает со спектральной плотностью флуктуаций фототока, нормированной на уровень дробового шума, измеряемой в схеме гомодинного приема. Фаза ϕ_{LO} соответствует фазе гомодина, используемого в измерительной установке.

На рис. 8.12 изображены функции $S_F^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$ в зависимости от фазы гомодина. Как и в случае одномодового сжатия, изменение фазы гомодина позволяет следить за формой области неопределенности, порождаемой квантовыми флуктуациями поля. Максимум $S_F^{(\phi_{LO})}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)$ соответствует фазе гомодина, выделяющей растянутую квадратурную компоненту, а минимум — сжатую квадратуру. Влияние дифракции можно проанализировать, рассматривая различные значения $\mathbf{q}$. Очевидно, что максимальное и минимальное значения спектра сжатия сдвинуты при различных $\mathbf{q}$. Этот сдвиг можно интерпретировать как вращение оси области неопределенности, также как в ОПУ [25]. В то же время уменьшение амплитуды осцилляций спектра сжатия указывает на уменьшение эффекта сжатия при больших $\mathbf{q}$, вследствие чего область неопределенности вновь обретает все более и более округлую форму, характерную для когерентного состояния.

Чтобы оценить характеристики схемы ГВГ с точки зрения бесшумовой обработки сигнала, удобно рассмотреть ту же схему детектирования, что и для бесшумового усиления в ОПУ [19]. Она заключается в измерении суммы фототоков от двух симметрично расположенных пикселей в выходной плоскости. Для такого устройства коэффициент шума (шум-фактор) определяется отношением спектра сжатия к коэффициенту фазово-чувствительного усиления [34]:

$$F_i(q) = \frac{S_i^{\phi_{out}}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)}{G_i^{\phi_{in}}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega)}, \quad (8.48)$$

где

$$\phi_F^{\text{out}} = \arg[U_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{i\phi_{\text{in}}} + V_{FS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{-i\phi_{\text{in}}} + [k_F^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_F] z_0 \zeta], \quad (8.49)$$

$$\phi_S^{\text{out}} = \arg[U_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{i\phi_{\text{in}}} + V_{SS}(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{-i\phi_{\text{in}}} + [k_S^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_S] z_0 \zeta]. \quad (8.50)$$

На рис. 8.13 показаны коэффициенты шума для основной и второй гармоник выходного поля. Фаза входного сигнала выбрана таким образом, чтобы коэффициент фазово-чувствительного усиления принимал максимальное значение при $q = 0$. Поскольку мы рассматриваем линеаризованные уравнения распространения для операторов поля, коэффициент шума не может быть меньше единичного уровня (линия, изображенная точками) [21], соответствующего бесшумовой работе схемы.

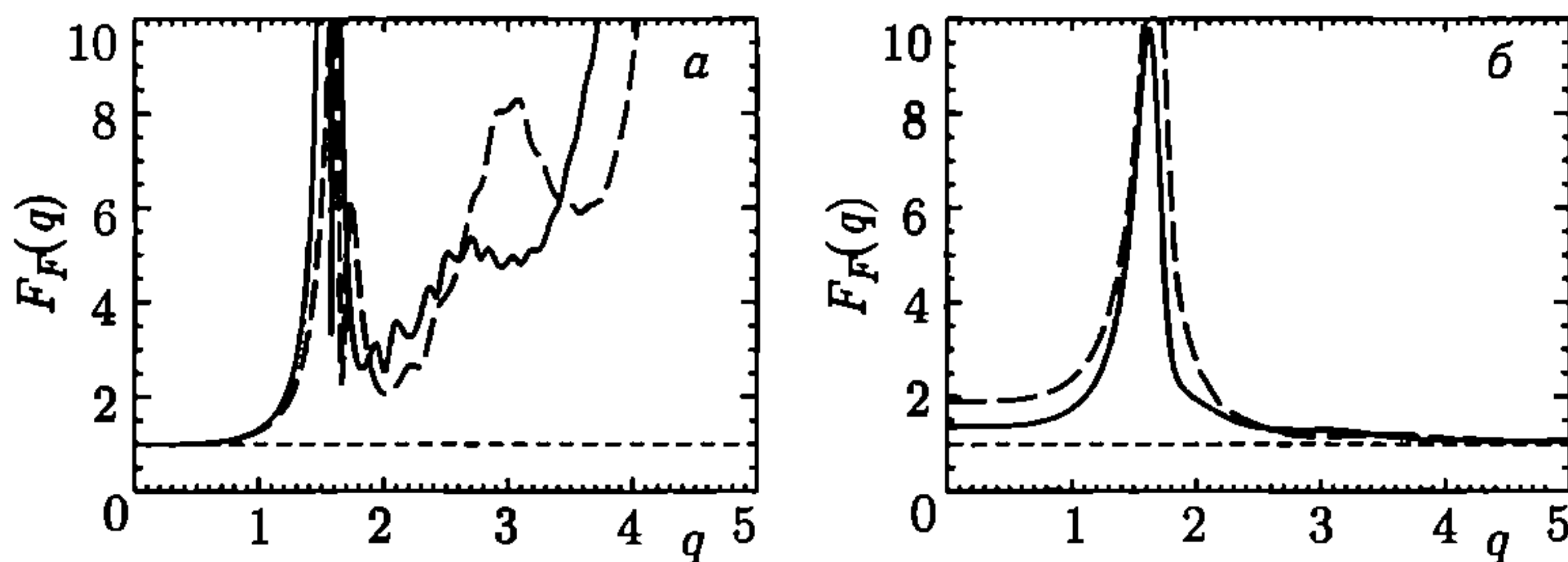


Рис. 8.13. Коэффициент шума для основной (а) и второй (б) гармоник поля в зависимости от поперечного волнового числа для двух различных значений длины взаимодействия $\zeta = 3,32$ (сплошные линии) и $\zeta = 2,5$ (штриховые линии). Линии, изображенные точками, показывают наименьшее возможное значение $F_i(q) = 1$ для линейной системы

В области волновых чисел, для которых обработка изображений эффективна, находим, что выходное поле основной гармоники имеет тот же уровень шума, что и входное изображение ($F_S \approx 1$), так что схема ГВГ не вносит дополнительного шума в сигнал. Коэффициент шума для поля второй гармоники немного больше единицы, что означает ухудшение отношения сигнал-шум в выходном изображении. Однако, при увеличении длины взаимодействия, коэффициент шума стремится к единице в характерной полосе пространственных частот. Наконец, заметим, что при больших значениях поперечных волновых чисел коэффициент шума на частоте второй гармоники равен единице, потому что входной сигнал не воспринимается системой в этой области, в то время как коэффициент шума на основной частоте неограниченно нарастает, так как выходная интенсивность поля на частоте ω в пределе $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ обращается в ноль.

8.4. Квантовая обработка изображений при генерации второй гармоники II-типа

В этом разделе мы рассмотрим возможности обработки изображений, открывающиеся в случае генерации второй гармоники при взаимодействии типа II, где важную роль играет состояние поляризации на основной частоте, как было показано в разд. 8.2 на классическом уровне. Здесь мы рассмотрим

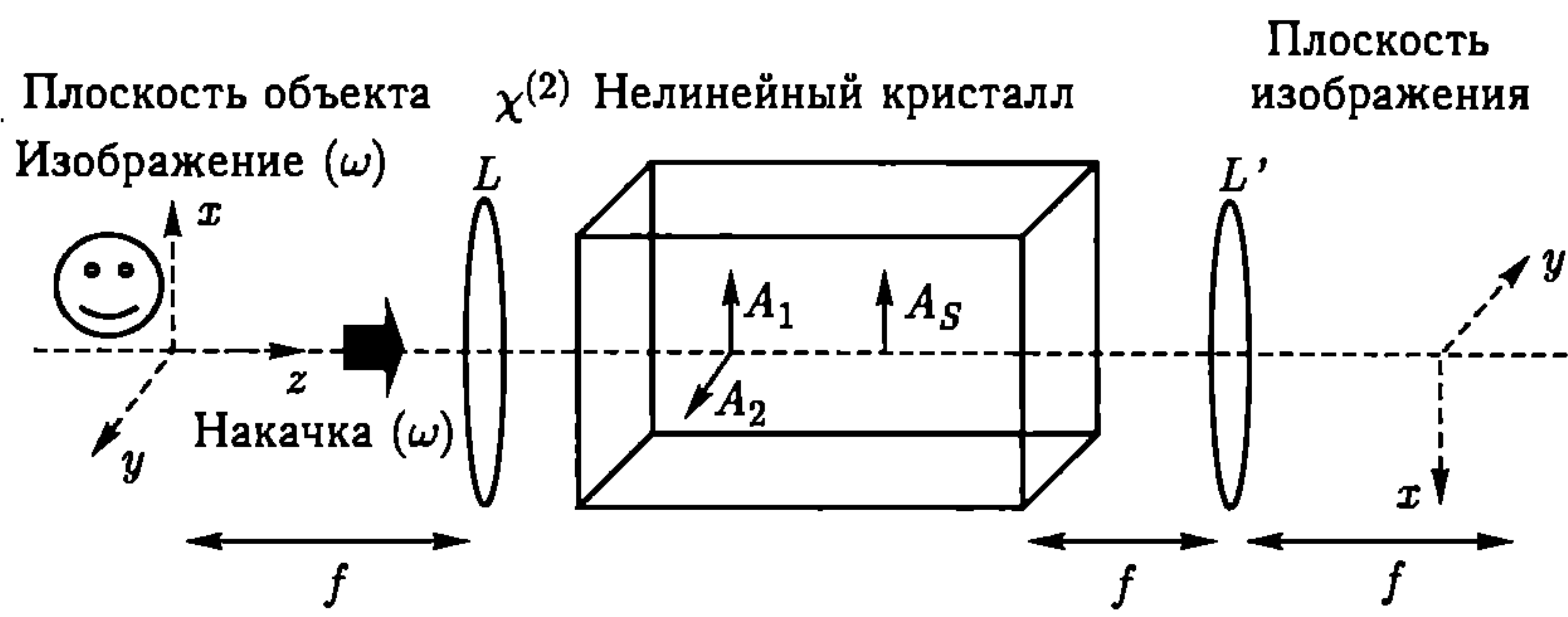


Рис. 8.14. Схема оптического устройства, основанного на генерации второй гармоники при взаимодействии типа II. Нелинейный кристалл, накачиваемый на частоте ω , помещен в двухлинзовую телескопическую систему

роль квантовых флуктуаций в телескопической односторонней конфигурации, изображенной на рис. 8.14 и похожей на рассмотренную в разд. 8.3. Однако, в отличие от рассмотренного случая, где изображение вводилось как сигнал на частоте второй гармоники, здесь мы имеем два ортогонально поляризованных основных поля, и изображение вводим в поля основных гармоник, как в разд. 8.2. Мы покажем, что в односторонней схеме ГВГ при взаимодействии типа II возможно реализовать бесшумовое преобразование частоты вверх для части изображения с данной поляризацией, тогда как часть изображения с ортогональной поляризацией претерпевает бесшумовое усиление. В следующем подразделе будут представлены уравнения распространения для такой системы как обобщение уравнений, рассмотренных в подразд. 8.3.2. Затем мы обсудим свойства изображения для двух различных конфигураций этой системы.

8.4.1. Уравнения распространения. Поступая также, как в подразд. 8.3.2, получим уравнения для фурье-амплитуд, скорректированные относительно распространения:

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_S(z, \mathbf{q}, \Omega) = K \int d^2 q' d\Omega' \hat{A}_1(z, \mathbf{q}', \Omega') \hat{A}_2(z, \mathbf{q} - \mathbf{q}', \Omega - \Omega') \times \\ \times \exp \left\{ i[k_1^z(\mathbf{q}', \Omega') + k_2^z(\mathbf{q} - \mathbf{q}', \Omega - \Omega') - k_S^z(\mathbf{q}, \Omega)]z \right\}, \quad (8.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_1(z, \mathbf{q}, \Omega) = -K \int d^2 q' d\Omega' \hat{A}_2^\dagger(z, \mathbf{q}', \Omega') \hat{A}_S(z, \mathbf{q} + \mathbf{q}', \Omega + \Omega') \times \\ \times \exp \left\{ i[k_S^z(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \Omega + \Omega') - k_1^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_2^z(\mathbf{q}', \Omega')]z \right\}, \quad (8.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_2(z, \mathbf{q}, \Omega) = -K \int d^2 q' d\Omega' \hat{A}_1^\dagger(z, \mathbf{q}', \Omega') \hat{A}_S(z, \mathbf{q} + \mathbf{q}', \Omega + \Omega') \times \\ \times \exp \left\{ i(k_S^z(\mathbf{q} + \mathbf{q}', \Omega + \Omega') - k_2^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_1^z(\mathbf{q}', \Omega'))z \right\}, \quad (8.53)$$

где индексы 1, 2 и S отвечают x -поляризованному полю основной гармоники, y -поляризованному полю основной гармоники и полю второй гармоники, соответственно. Эти уравнения имеют простую физическую интерпретацию:

генерация поля данной моды является результатом всех возможных трехволновых процессов, идущих с сохранением энергии и поперечной составляющей импульса.

Теперь, как и в предыдущем разделе, применим приближение линеаризации. Предполагая, что накачка осуществляется сильным классическим полем, которое внутри кристалла приводит к появлению сильного классического поля на частоте второй гармоники, получим:

$$\hat{A}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) = \tilde{c}_i(z) \delta^{(2)}(\mathbf{q}) \delta(\Omega) + \hat{a}_i(z, \mathbf{q}, \Omega), \quad (8.54)$$

где i принимает значения $1, 2, S$; $\tilde{c}_i(z)$ — амплитуды классических сильных монохроматических полей; $\hat{a}_i(z, \mathbf{q}, \Omega)$ — операторы квантовых полей. Поскольку поток энергии в кристаллах без потерь сохраняется, полная мощность $W = |\tilde{c}_1(z)|^2 + |\tilde{c}_2(z)|^2 + 2|\tilde{c}_S(z)|^2$ остается постоянной. Вводя безразмерную характерную длину взаимодействия $z_0 = 1/\sqrt{2W} K$, масштабируем координату $\zeta = z/z_0$ и амплитуды полей $c_1(z) = \tilde{c}_1(z)/\sqrt{W}$, $c_2(z) = \tilde{c}_2(z)/\sqrt{W}$ и $c_S(z) = \tilde{c}_S(z)/\sqrt{W/2}$, и подставляем (8.54) в уравнения (8.51)–(8.53). В нулевом порядке получим классические уравнения нелинейной оптики:

$$\frac{d}{d\zeta} c_1(\zeta) = -c_2^*(\zeta) c_S(\zeta) e^{-i\Delta s \zeta}, \quad (8.55)$$

$$\frac{d}{d\zeta} c_2(\zeta) = -c_1^*(\zeta) c_S(\zeta) e^{-i\Delta s \zeta}, \quad (8.56)$$

$$\frac{d}{d\zeta} c_S(\zeta) = +2c_1(\zeta) c_2(\zeta) e^{i\Delta s \zeta}, \quad (8.57)$$

где $\Delta s = \Delta k z_0$.

В первом порядке получают уравнения распространения для квантовых операторов, связанных с полями основной и второй гармоник:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_1(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = & -c_S(\zeta) e^{-i\Delta_1(\mathbf{q}, \Omega)z} \hat{a}_2^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) - \\ & - \sqrt{2} c_2^*(\zeta) e^{-iD_1(\mathbf{q}, \Omega)z} \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega), \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_2(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = & -c_S(\zeta) e^{i\Delta_1(-\mathbf{q}, -\Omega)z} \hat{a}_1^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) - \\ & - \sqrt{2} c_1^*(\zeta) e^{-iD_2(\mathbf{q}, \Omega)z} \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega), \end{aligned} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = & + \sqrt{2} c_2(\zeta) e^{iD_1(\mathbf{q}, \Omega)z} \hat{a}_1(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) + \\ & + \sqrt{2} c_1(\zeta) e^{iD_2(\mathbf{q}, \Omega)z} \hat{a}_2(\zeta, \mathbf{q}, \Omega). \end{aligned} \quad (8.60)$$

Фазовые множители, присутствующие в этих уравнениях, имеют вид:

$$\Delta_1(\mathbf{q}, \Omega) = z_0(k_1^z(\mathbf{q}, \Omega) + k_2^z(-\mathbf{q}, -\Omega) - k_S), \quad (8.61)$$

$$D_1(\mathbf{q}, \Omega) = z_0(k_1^z(\mathbf{q}, \Omega) + k_2 - k_S^z(\mathbf{q}, \Omega)), \quad (8.62)$$

$$D_2(\mathbf{q}, \Omega) = z_0(k_1 + k_2^z(\mathbf{q}, \Omega) - k_S^z(\mathbf{q}, \Omega)). \quad (8.63)$$

Используя векторную форму записи [45],

$$\hat{\mathbf{a}}(z, \mathbf{q}, \Omega) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(z, \mathbf{q}, \Omega) \\ \hat{a}_2(z, \mathbf{q}, \Omega) \\ \hat{a}_S(z, \mathbf{q}, \Omega) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) \\ \hat{a}_2^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) \\ \hat{a}_S^\dagger(z, \mathbf{q}, \Omega) \end{pmatrix}, \quad (8.64)$$

решение уравнений распространения (8.58)–(8.60) принимает вид:

$$\hat{a}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) = \mathbf{U}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) \cdot \hat{\mathbf{a}}(0, \mathbf{q}, \Omega) + \mathbf{V}_i(z, \mathbf{q}, \Omega) \cdot \hat{\mathbf{a}}^\dagger(0, -\mathbf{q}, -\Omega). \quad (8.65)$$

Введенные здесь 18 комплексных коэффициентов можно найти из решения уравнений распространения.

Наложённое на однородное поле накачки оптическое изображение инжектируется в нелинейный кристалл в когерентном состоянии $|\alpha_{\text{in}}\rangle$. Это квантовое состояние можно записать как

$$\hat{\mathbf{a}}(0, \mathbf{q}, \Omega)|\alpha_{\text{in}}\rangle = \alpha(q) \delta(\Omega)|\alpha_{\text{in}}\rangle. \quad (8.66)$$

Амплитуда $\alpha = (\alpha_1(q), 0, 0)$, согласно векторным обозначениям, определенным в (8.64), включает в себя пространственное распределение входного изображения на частоте основной гармоники с поляризациями x и y и на частоте второй гармоники. Мы рассматриваем изображение стационарное во времени и обладающее x -поляризацией.

Представляет интерес число фотонов каждого поля, регистрируемое фотодетектором, расположенным в данной точке ρ плоскости изображения, которая в телескопической конфигурации отождествляется с данным поперечным волновым числом. Предполагая, что размер детектора σ_d много меньше характерного масштаба изменения полей, а его квантовая эффективность равна единице, среднее число фотонов можно записать в виде:

$$\langle \hat{N}_i(\zeta, q) \rangle = \sigma_d \langle \hat{a}_i^\dagger(\zeta, q, 0) \hat{a}_i(\zeta, q, 0) \rangle = \sigma_d |\alpha^{\text{out}}(q)|^2, \quad (8.67)$$

где

$$\alpha_i^{\text{out}}(q) = \mathbf{U}_i(q, 0) \cdot \alpha(q) + \mathbf{V}_i(q, 0) \cdot \alpha^*(-q), \quad (8.68)$$

соответствует амплитудам волн $i = 1, 2, S$ на выходе системы. Число фотонов определяется амплитудой компоненты входного изображения с данным волновым числом q , а также, вследствие процесса параметрического преобразования частоты вниз, существенно зависит от входной волны $-q$. Дисперсия числа фотонов выражается как

$$\langle (\Delta \hat{N}_i(L, q))^2 \rangle = \sigma_d |\alpha_i^{\text{out}}(q)|^2 (1 + 2\mathbf{V}_i^*(q, 0) \cdot \mathbf{V}_i(q, 0)). \quad (8.69)$$

Уровень шума измеряемого изображения характеризуется отношением сигнал-шум:

$$\text{SNR}_i = \frac{\langle \hat{N}_i(L, q) \rangle^2}{\langle (\Delta \hat{N}_i(L, q))^2 \rangle}, \quad (8.70)$$

которое следует сравнивать с отношением сигнал-шум входного изображения $\text{SNR}_1^{\text{in}} = \sigma_d |\alpha_1(q)|^2$. Коэффициент шума, представляющий собой отношение $\text{SNR}_1^{\text{in}}/\text{SNR}_i$, равен

$$F_i = \frac{1 + 2\mathbf{V}_i^*(q, 0) \cdot \mathbf{V}_i(q, 0)}{|\alpha_i^{\text{out}}(q)|^2 / |\alpha_1(q)|^2}. \quad (8.71)$$

Как было отмечено в подразд. 8.3.2, если коэффициент шума равен единице, то говорят о бесшумовой обработке изображения, и на уровне квантовых флуктуаций качество изображения сохраняется. Это наилучшая возможная ситуация в системе, подобной той, что рассматривается нами здесь. Однако, в общем случае коэффициент шума больше, чем единица, и, следовательно, имеет место ухудшение качества изображения, которое может привести даже к полной потере информации в случае слабых сигналов.

8.4.2. Линейная у-поляризованная накачка: режим добавления частоты. Рассмотрим сначала простейшую ситуацию: поле накачки выберем линейно поляризованным вдоль направления y . Это выражается в виде начальных условий:

$$c_1(0) = 0; \quad c_2(0) = 1; \quad c_3(0) = 0. \quad (8.72)$$

Поскольку накачка в ортогональной x -поляризации отсутствует, то ГВГ не происходит, и из классических уравнений нелинейной оптики [27–31,34] следует, что

$$c_1(\zeta) = 0; \quad c_2(\zeta) = 1; \quad c_3(\zeta) = 0. \quad (8.73)$$

Линеаризованные уравнения распространения для квантовых операторов (8.58)–(8.60) можно легко решить аналитически. В результате получим следующие преобразования вход-выход:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(\zeta, q, \Omega) = & \left(\cos(\tilde{D}_1 \zeta) + i \frac{D_1}{2\tilde{D}_1} \sin(\tilde{D}_1 \zeta) \right) e^{-iD_1 \zeta/2} \hat{a}_1(0, q, \Omega) - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{\tilde{D}_1} \sin(\tilde{D}_1 \zeta) e^{-iD_1 \zeta/2} \hat{a}_S(0, q, \Omega), \end{aligned} \quad (8.74)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_S(\zeta, q, \Omega) = & \left(\cos(\tilde{D}_1 \zeta) - i \frac{D_1}{2\tilde{D}_1} \sin(\tilde{D}_1 \zeta) \right) e^{iD_1 \zeta/2} \hat{a}_S(0, q, \Omega) + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\tilde{D}_1} \sin(\tilde{D}_1 \zeta) e^{iD_1 \zeta/2} \hat{a}_1(0, q, \Omega), \end{aligned} \quad (8.75)$$

$$\hat{a}_2(\zeta, q, \Omega) = \hat{a}_2(0, q, \Omega), \quad (8.76)$$

где $\tilde{D}_1(q, \Omega) = \sqrt{2 + D_1^2(q, \Omega)/4}$. Хотя y -поляризованное изображение не претерпевает изменений при распространении в нелинейном кристалле, это устройство способно параметрически преобразовать x -поляризованное изображение на входе с частоты ω на частоту 2ω . Этот эффект является следствием зависимости выходных операторов $\hat{a}_S(\zeta, q, \Omega)$ и $\hat{a}_1(\zeta, q, \Omega)$ от операторов

$a_1(0, q, \Omega)$ и $a_S(0, q, \Omega)$ на входе. Поскольку волна второй гармоники не создается в кристалле, процесс параметрического преобразования частоты вниз не возможен и, следовательно, при распространении не возникает связи между частотами (q, Ω) и $(-q, -\Omega)$. В сравнении с общим видом преобразования вход-выход (8.65), в рассматриваемом нами случае все коэффициенты $V_i(q, \Omega)$ исчезают, в результате чего выходной сигнал не зависит от фазы входного сигнала.

Коэффициент усиления при параметрическом преобразовании частоты вверх равен:

$$G_S(\zeta, q) \equiv \frac{\langle \hat{N}_S(\zeta, q) \rangle}{\langle \hat{N}_1(0, q) \rangle} = 2 \frac{\sin^2(\tilde{D}_1(q, \Omega)z)}{\tilde{D}_1(q, \Omega)^2}. \quad (8.77)$$

Идеальное преобразование с $G_S = 1$ достигается, если $D_1(q, \Omega) = 0$ и $\sin(\tilde{D}_1(q, \Omega)z) = 1$. Первое условие, соответствующее идеальному согласованию волновых векторов, определяет ансамбль точек в плоскости (q, Ω) пространственных и временных частот, и, в случае неподвижного изображения, это не более двух значений q . Второе условие означает, что даже в этом случае максимум эффективности реализуется только на определенных длинах распространения $\zeta_k = (\pi/\sqrt{2})(k + 1/2)$, где $k = 0, 1, \dots$

Коэффициент шума совпадает с обратной скоростью параметрического преобразования частоты вверх:

$$F(q) = \frac{1}{R_{\text{up}}(q)}. \quad (8.78)$$

Преобразование вход-выход (8.74)–(8.76) полностью эквивалентно преобразованию на светоделителе. В случае когерентного изображения и в предположении, что поле на входе второй гармоники находится в вакуумном состоянии, не полное параметрическое преобразование частоты вверх означает, что средняя интенсивность на выходе уменьшилась по сравнению с изображением на входе, но количество шума сохранилось и соответствует шуму когерентного состояния. В результате имеет место ухудшение изображения, и коэффициент шума прошедшего изображения равен обратному коэффициенту пропускания светоделителя. Квантовый шум, присутствующий в параметрически преобразованном изображении, можно представить как суперпозицию шума уже присутствовавшего во входном изображении и прошедшего частично вместе с самим изображением, и шума, исходно присутствовавшего в модах второй гармоники, частично отраженных светоделителем. Следовательно, уменьшения уровня шума выходного изображения можно достигнуть только уменьшая флуктуации, присутствующие в поле второй гармоники на входе. Это можно сделать, инжектируя на частоте второй гармоники вместо обычного вакуума сжатый вакуум. Подбирая соответствующим образом квадратурные компоненты, можно уменьшить этот вклад в полный уровень шума, и, в пределах идеального сжатия, достичь единичного значения коэффициента шума, т.е. бесшумовой обработки изображения. В следующем подразделе мы рассмотрим несколько отличную схему, которая позволяет получить бесшумовое

параметрическое преобразование частоты вверх без использования дополнительного источника неклассического света.

8.4.3. Накачка, поляризованная линейно под углом 45° : преобразование с повышением частоты и усиление без шума. Рассмотрим случай, когда поле накачки поляризовано линейно под углом 45° по отношению к оси x . Начальные условия для классических сильных полей имеют вид:

$$c_1(0) = c_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad c_s(0) = 0. \quad (8.79)$$

Поскольку теперь поле на основной частоте накачивается в двух ортогональных поляризациях, внутри кристалла генерируется сильное поле второй гармоники. В рассматриваемом случае идеально согласованных волновых векторов решения классических уравнений [27–31, 34] выглядят чрезвычайно просто [46]:

$$c_1(\zeta) = c_2(\zeta) = \frac{\text{sech}(\zeta)}{\sqrt{2}}; \quad c_s(\zeta) = \tanh(\zeta). \quad (8.80)$$

Удобно ввести поляризационный базис, повернутый на 45° относительно базиса (x, y) [36, 37, 45]:

$$\hat{a}_\pm(\zeta, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1(\zeta, q) \pm \hat{a}_2(\zeta, q)). \quad (8.81)$$

В этом базисе $c_+(\zeta) = \text{sech}(\zeta)$ и $c_-(\zeta) = 0$. Из уравнений (8.58)–(8.60) нетрудно получить уравнения распространения в новом базисе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_\pm(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = & -c_s(\zeta) g_\pm(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_+^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) + \\ & + c_s(\zeta) g_\mp(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_-^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) - \sqrt{2} c_+^*(\zeta) h_\pm(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_s(\zeta, \mathbf{q}, \Omega), \end{aligned} \quad (8.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_s(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = & \sqrt{2} c_+(\zeta) h_+^*(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_+(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) + \\ & + \sqrt{2} c_+(\zeta) h_-^*(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_-(\zeta, \mathbf{q}, \Omega), \end{aligned} \quad (8.83)$$

где

$$g_\pm(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \frac{e^{-i\Delta_1(\mathbf{q}, \Omega)\zeta} \pm e^{-i\Delta_1(-\mathbf{q}, -\Omega)\zeta}}{2}, \quad (8.84)$$

$$h_\pm(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \frac{e^{-iD_1(\mathbf{q}, \Omega)\zeta} \pm e^{-iD_2(\mathbf{q}, \Omega)\zeta}}{2}. \quad (8.85)$$

Уравнения (8.82)–(8.83) можно упростить, сделав дополнительные предположения:

$$\Delta_1(q, \Omega) = \Delta_1(-q, -\Omega), \quad D_1(q, \Omega) = D_2(q, \Omega). \quad (8.86)$$

Эти равенства всегда справедливы для $q = \Omega = 0$. В любом случае нас главным образом интересует область пространственных частот в окрестности $q = 0$, так как при взаимодействии типа I обработка изображений эффективна преимущественно в этой области. Подставляя (8.86) в (8.82)–(8.83), уравнение распространения для поля $a_-(\zeta, q)$ отделяется от остальных. В результате получаем уравнение для ОПУ типа I, где $c_S(\zeta)$ играет роль ζ -зависимой накачки:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_-(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = c_S(\zeta) e^{-i\Delta_1(\mathbf{q}, \Omega)\zeta} \hat{a}_-^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega). \quad (8.87)$$

Уравнения, описывающие два других поля сводятся к уравнениям для ГВГ типа I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_+(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = & -c_S(\zeta) \hat{a}_+^\dagger(\zeta, -\mathbf{q}, -\Omega) e^{-i\Delta_1(\mathbf{q}, \Omega)\zeta} - \\ & - \sqrt{2} c_+^*(\zeta) \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{-iD_1(\mathbf{q}, \Omega)\zeta}, \end{aligned} \quad (8.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}_S(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) = \sqrt{2} c_+(\zeta) \hat{a}_+(\zeta, \mathbf{q}, \Omega) e^{iD_1(\mathbf{q}, \Omega)\zeta}. \quad (8.89)$$

Такое разбиение задачи о ГВГ типа II на две — ГВГ типа I и ОПУ типа I — позволяет обобщить выводы, полученные для одномодовых моделей в однопроходной [37] или в резонаторной [47] конфигурации, на случай большого числа поперечных пространственных мод.

Чтобы использовать преимущество связи между волнами с пространственно-временными частотами $(\mathbf{q}, \Omega)$ и $(-\mathbf{q}, -\Omega)$, которые генерируются в процессе параметрического преобразования частоты вниз, рассмотрим, как и в подразд. 8.3.2, симметричное входное изображение:

$$\alpha_\pm(q) = \alpha_\pm(-q). \quad (8.90)$$

Интенсивность на выходе системы зависит теперь от фазы ϕ_{in} входного изображения. Для простоты рассмотрим однородную фазу входного изображения $\alpha e^{i\phi_{\text{in}}}$, где компоненты вектора α вещественны. Тогда интенсивность на выходе имеет вид:

$$|\alpha_i^{\text{out}}(q)|^2 = |\mathbf{U}_i(q, 0) \cdot \alpha(q) e^{i\phi_{\text{in}}} + \mathbf{V}_i(q, 0) \cdot \alpha(q) e^{-i\phi_{\text{in}}}|^2. \quad (8.91)$$

Простейшая схема измерения состоит из одного детектора, расположенного в окрестности q . Коэффициент шума тогда представим в виде (8.71) с дополнительным множителем 2, возникающим из-за симметризации входного изображения перед инжектированием:

$$F_i = 2 \frac{1 + 2\mathbf{V}_i^*(q, 0) \cdot \mathbf{V}_i(q, 0)}{|\mathbf{U}_i(q, 0) \cdot \alpha e^{i\phi_{\text{in}}} + \mathbf{V}_i(q, 0) \cdot \alpha e^{-i\phi_{\text{in}}}|^2 / |\alpha_1(q)|^2}. \quad (8.92)$$

Для ОПУ бесшумовой характер обработки изображения достигим только в пределе больших значений коэффициента усиления [19]. В рассмотрен-

ном здесь случае параметрического преобразования частоты вверх скорость преобразования всегда невелика. Следовательно, с точки зрения обработки изображения очень важно рассмотреть схему симметричного детектирования, в которой два детектора расположены в точках равноудаленных в противоположных направлениях относительно оси системы (что соответствует в телескопической конфигурации волновым векторам, рассматриваемым здесь). Измеряют сумму фототоков:

$$\hat{N}_i(L, q) = \hat{N}_i(L, q) + \hat{N}_i(L, -q). \quad (8.93)$$

Коэффициент шума для этой величины имеет вид:

$$F_i = \frac{1 + 2V_i^*(q, 0) \cdot V_i(q, 0) + 2\text{Re}(e^{-2i\phi_i^{\text{out}}} U_i(q, 0) \cdot V_i(-q, 0))}{|U_i(q, 0) \cdot \alpha e^{i\phi_{\text{in}}} + V_i(q, 0) \cdot \alpha e^{-i\phi_{\text{in}}}|^2 / |\alpha_1(q)|^2}, \quad (8.94)$$

который отличается от выражения (8.71) дополнительным интерференционным членом. ϕ_i^{out} определяет фазу выходной амплитуды:

$$\phi_i^{\text{out}} = \text{Arg}[U_i(q, 0) \cdot \alpha e^{i\phi_{\text{in}}} + V_i(q, 0) \cdot \alpha e^{-i\phi_{\text{in}}}] \quad (8.95)$$

Для ОПУ было показано, что, если фаза входного изображения выбрана так, чтобы обеспечить максимальное усиление, то при этом усилении отношение сигнал-шум сохраняется, и, следовательно, оно является бесшумовым [41].

Как отмечалось выше, фазовая чувствительность схемы обработки изображения является важным требованием для выявления интересных свойств квантовых изображений. Эта чувствительность проявляется в нескольких характеристиках. Во-первых, поведение ОПУ с зависимой от расстояния z накачкой характеризуется коэффициентом усиления:

$$G_{\text{OPA}}(q) = \frac{\langle N_-(L, q) \rangle}{\langle N_-(0, q) \rangle}. \quad (8.96)$$

На рис. 8.15, а показана зависимость $G_{\text{OPA}}(0)$ от фазы входного изображения. Коэффициент усиления осциллирует между $\cosh(L)$ (максимальное усиление) и $\text{sech}(L)$ (минимальное усиление). Во-вторых, поведение ГВГ типа I можно характеризовать такими величинами как коэффициент параметрического преобразования частоты вверх и коэффициент переноса:

$$R_{\text{up}}(q) = \frac{\langle N_S(L, q) \rangle}{\langle N_+(0, q) \rangle}, \quad R_{\text{trans}}(q) = \frac{\langle N_+(L, q) \rangle}{\langle N_+(0, q) \rangle}. \quad (8.97)$$

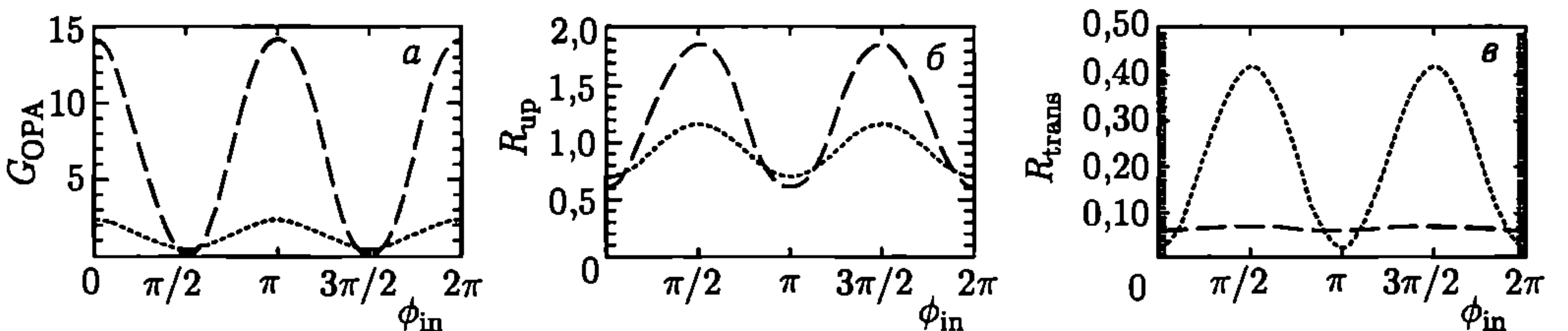


Рис. 8.15. Коэффициенты усиления (а), параметрического преобразования частоты вверх (б) и переноса (в) в зависимости от фазы входного сигнала при $\zeta = 1$ (точечные линии) и $\zeta = 2$ (штриховые линии)

Фазовые зависимости этих величин при $q = 0$ построены на рис. 8.15. В пределе больших длин распространения коэффициент параметрического преобразования частоты вверх осциллирует между минимальным значением $1/2$ и максимальным значением 2 , которые являются следствием сохранения энергии и фазы при ГВГ. Закон сохранения энергии требует, чтобы после полного параметрического преобразования число фотонов второй гармоники равнялось половине исходного числа фотонов основной моды. Следовательно, амплитуда должна уменьшиться в $\sqrt{2}$ раз. Напротив, фаза выходного поля в результате полного параметрического преобразования в два раза больше фазы входного поля на основной частоте. В случае пренебрежимо малой фазовой расстройки максимальный коэффициент параметрического преобразования частоты вверх достигается при $\phi_{in} = \pi/2$ и $3\pi/2$ на всех расстояниях. Однако следует отметить, что в общем случае фаза, при которой коэффициент параметрического преобразования максимален может зависеть от расстояния. Также интересно отметить (см. рис. 8.15), что фаза входного сигнала, при которой параметрическое преобразование минимально, обеспечивает максимальное усиление «—» поляризованной компоненты.

Рассмотрим теперь поведение шума в процессе параметрического преобразования частоты вверх. Ограничимся случаями фаз входного сигнала, обеспечивающими минимальное или максимальное параметрическое преобразование, и построим коэффициент параметрического преобразования частоты вверх и коэффициент шума в зависимости от длины распространения (рис. 8.16).

Видно, что в режиме минимального параметрического преобразования коэффициент шума быстро спадает до единичного значения и, следовательно, параметрическое преобразование изображения происходит без добавления шума. Такое поведение можно понять следующим образом: в пределе боль-

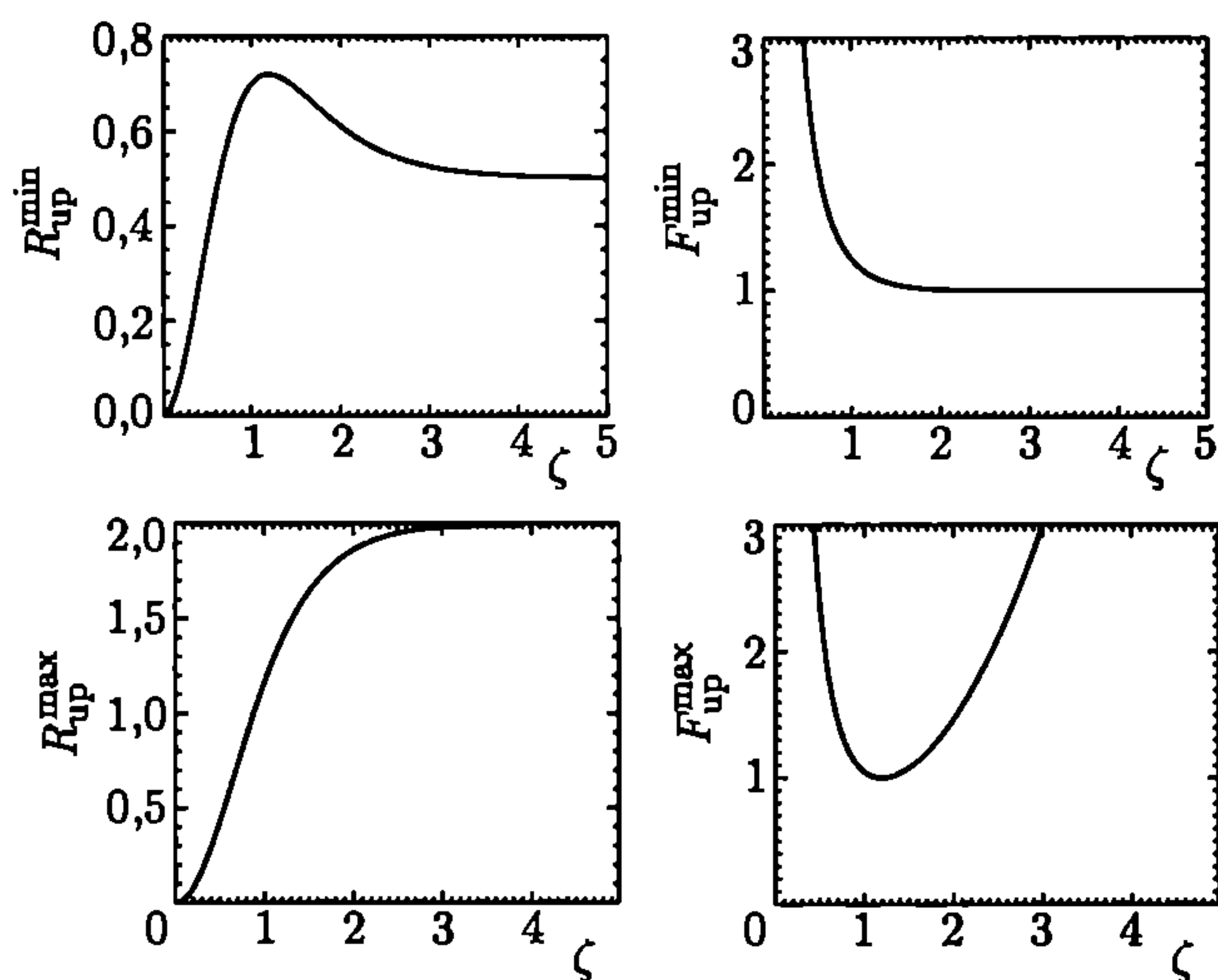


Рис. 8.16. Коэффициент параметрического преобразования частоты вверх и коэффициент шума в зависимости от длины распространения в схеме симметричного детектирования при значении поперечного волнового вектора $q = 0$. В верхней строке $\phi_{in} = 0$, в нижней — $\phi_{in} = \pi/2$

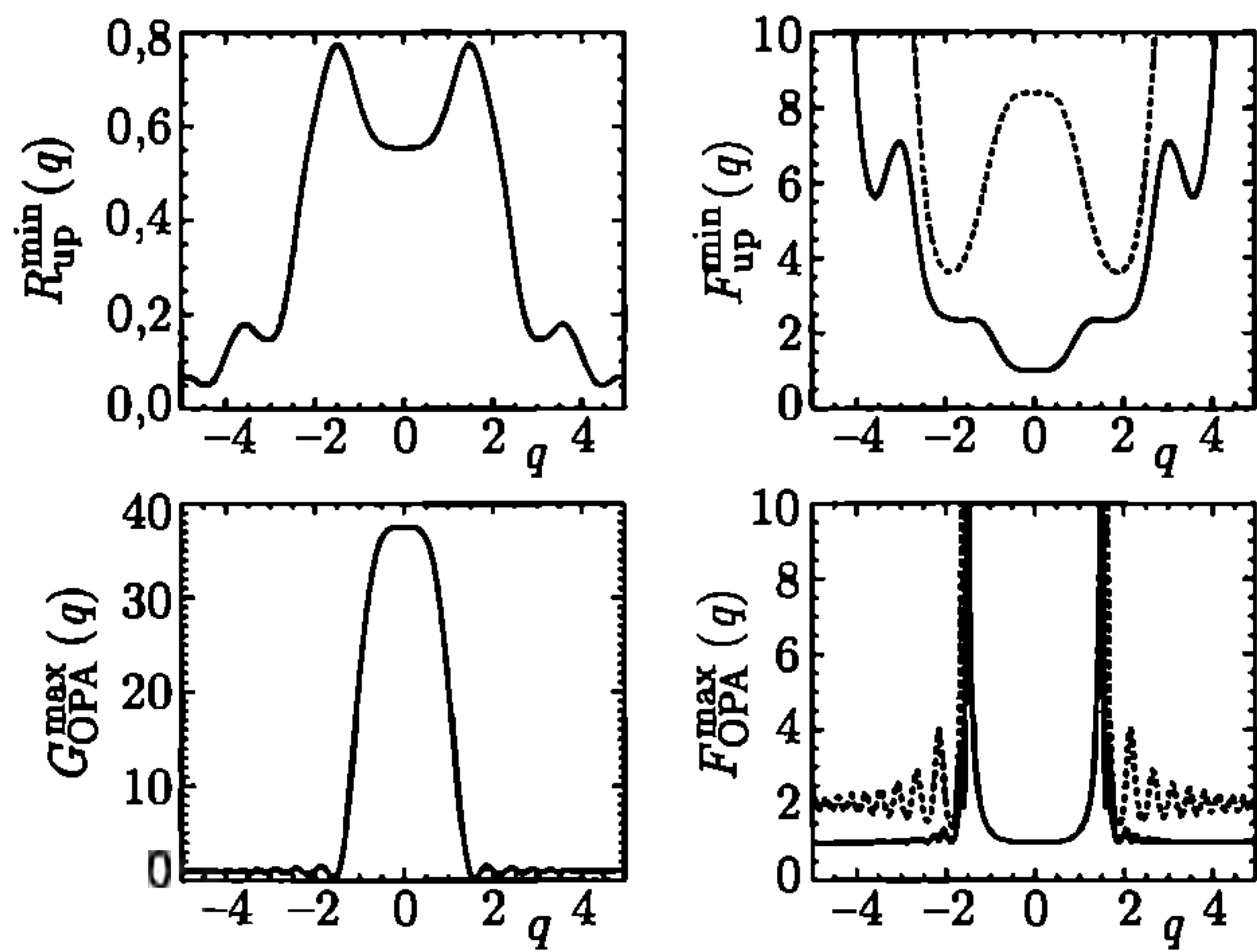


Рис. 8.17. Коэффициент параметрического преобразования частоты вверх (наверху слева) и коэффициент усиления ОПУ (внизу слева) в зависимости от положения в поперечной плоскости при $\phi_{in} = 0$. Соответствующие зависимости для коэффициентов шума изображены справа. Кривые, изображенные точками, относятся к случаю детектирования одним детектором, а сплошные кривые — симметричному детектированию

шой длины распространения флуктуации амплитуды, входящие в кристалл на частоте второй гармоники, уменьшаются при распространении, так что в рассматриваемом пределе они не вносят вклад в шум амплитуды выходного поля на частоте второй гармоники. Это не так для коэффициента шума в случае максимального параметрического преобразования. Определяя $y_i(\zeta, q, \Omega) = (\hat{a}_i(\zeta, q, \Omega) - \hat{a}_i^\dagger(\zeta, -q, -\Omega))/2i$, в пределе больших ζ получим:

$$y_S(z) = -\sqrt{2} y_+(0) + (1 - z \tanh z) y_S(0). \quad (8.98)$$

Следовательно, фазовые флуктуации входного поля второй гармоники вносят вклад в полные флуктуации, и коэффициент шума больше единицы, как показано на рис. 8.16. Только при длине распространения, удовлетворяющей равенству

$$1 - \zeta \tanh(\zeta) = 0, \quad (8.99)$$

входные флуктуации второй гармоники не дают вклада, и имеет место бесшумовая обработка изображения ($F = 1$).

Наконец, рассмотрим свойства схемы обработки изображений в зависимости от положения в поперечной плоскости. На рис. 8.17 изображены зависимости коэффициента параметрического преобразования частоты вверх и коэффициента усиления ОПУ при значении входной фазы, отвечающем минимуму параметрического преобразования (максимуму коэффициента усиления ОПУ). Также показаны соответствующие коэффициенты шума для одного детектора, помещенного в точку q , и при симметричном детектировании с двумя детекторами, расположенными в q и $-q$. Коэффициент параметрического преобразования и коэффициент усиления ОПУ остаются приблизительно постоянными в пределах диска конечного диаметра, центрированного на главной оптической оси системы ($q = 0$). Коэффициент шума при параметрическом

преобразовании $F_{\text{ур}}$ стремится в этой центральной области к единице, что характеризует бесшумовую обработку изображения. Однако это интересное свойство справедливо только для схемы симметричного детектирования. Если выходное поле измеряется с помощью только одного детектора, то по сравнению с шумом входного изображения наблюдается большой избыточный шум. Для коэффициента усиления ОПУ в центральной части, где наблюдается максимальное усиление, схема с двумя детекторами дает тот же уровень шума, что и результат существенно неклассических корреляций двух выходных полей с q и $-q$. При больших q , где практически отсутствует усиление, коэффициенты шума $F_{\text{ОРА}}$ для симметричного детектирования и измерения одним детектором отличаются в 2 раза вследствие процедуры симметризации входного изображения.

Список литературы

1. Teuber J. Digital Image Processing. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993.
2. Mitwinter J., Warner J. // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. P. 519.
3. Mitwinter J. // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 12. P. 68.
4. Devaux F., Mosset A., Lantz E., Monneret S., Le Gall H. // Appl. Opt. 2001. V. 40. P. 4957.
5. Firester A. H. // J. Appl. Opt. 1969. V. 40. P. 4842; P. 4849.
6. Devaux F., Lantz E. // J. Opt. Soc. Am. B. 1995. V. 12. P. 2245.
7. Devaux F., Lantz E. // Quantum Semiclass. Opt. 1997. V. 9. P. 279.
8. Devaux F., Lantz E. // Opt. Commun. 1995. V. 114. P. 295.
9. Photorefractive Materials and Their Applications II. Topics in Applied Physics / Eds.: P. Günther and J. P. Huignard. V. 62. — New York: Springer Verlag, 1989.
10. Feinberg J. // Opt. Lett. 1980. V. 5. P. 330.
11. Huignard J. P., Herriau J. P. // Appl. Opt. 1978. V. 17. P. 2671.
12. Liang B., Wang Z., Guang J., Mu G., Cartwright C. M. // Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 1086.
13. Ochoa E., Hesselink L., Goodman W. // Appl. Opt. 1985. V. 24. P. 1826.
14. Ja Y. H. // Opt. Comm. 1982. V. 44. P. 24.
15. Ja Y. H. // Opt. Quant. El. 1983. V. 15. P. 457.
16. Ja Y. H. // Appl. Phys. B. 1985. V. 36. P. 21.
17. Rajbenbach H., Delboublié A., Huignard J. P. // Opt. Lett. 1989. V. 14. P. 1275.
18. Rahn M. D., West D. P., Shakos J. D. // J. Appl. Phys. 2000. V. 87. P. 127.
19. Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A., Kolobov M. I. // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2000. V. 2. P. 196.
20. Eur. Phys. J. D. 2003. V. 22. Специальный выпуск «Quantum fluctuations and coherence in optical and atomic structures».
21. Caves C. M. // Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1817.
22. Ou Z. Y., Pereira S. F., Kimble H. J. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3239.
23. Levenson J. A., Abram I., Rivera T., Grangier P. // J. Opt. Soc. Am. B. 1993. V. 10. P. 2233.
24. Kolobov M. I., Sokolov I. V. // Sov. Phys. JETP. 1989. V. 69. P. 1097; Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 101.
25. Kolobov M. I. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539.

26. Choi S. K., Vasilyev M., Kumar P. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 1938.
27. Scotto P., Colet P., San Miguel M. // Opt. Lett. 2003. V. 28. P. 1695.
28. Peschel U., Etrich C., Lederer F. // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 500.
29. Peschel U., Etrich C., Lederer F. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 4005.
30. Longhi S. // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 346.
31. Longhi S. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 346.
32. Ou Z. Y. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 4021.
33. Jacobo A., Colet P., Scotto P., San Miguel M. // Apl. Phys. B. 2005. V. 81. P. 955–962.
34. Scotto P., San Miguel M. // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 043811.
35. Tang C. L., Cheng L. K. Fundamentals of Optical Parametric Processes and Oscillators. — Amsterdam: Harwood Academic, 1995. — P. 30–31.
36. Li R. D., Kumar P. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 2157.
37. Ou Z. Y. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 2106.
38. Olsen M. K., Horowicz R. J., Plimak L. I., Treps N., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 021803.
39. Olsen M. K., Horowicz R. J. // Opt. Commun. 1999. V. 168. P. 135.
40. Olsen M. K., Plimak L. I., Collet M. J., Walls D. F. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 023802.
41. Kolobov M. I., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4930.
42. Sokolov I. V., Kolobov M. I., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 2420.
43. Berzanskis A., Chinaglia W., Lugiato L. A., Feller K.-H., Di Trapani P. // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 1626.
44. Lantz E., Devaux F. // Quantum Semiclassic. Opt. 1997. V. 9. P. 279.
45. Scotto P. // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 033814.
46. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 1918.
47. Ou Z. Y. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 4902.

Литература, добавленная при переводе

48. Воронин Э. С., Дивликеев М. И., Ильинский Ю. А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10. С. 172; ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 51.
49. Andrews R. A. // IEEE J. Quant. Electron. 1969. V. QE-5. P. 548; 1970. V. QE-6. P. 68.
50. Стрижевский В. Л., Воронин Э. С. // УФН. 1979. Т. 127. С. 99.
51. Allevi A., Andreoni A., Bondani M. et al. // J. Mod. Optics. 2004. V. 51. P. 1031.
52. Chirkin A. S., Makeev E. V. // J. Mod. Opt. 2006. V. 53. P. 821.
53. Makeev E. V., Chirkin A. S. // J. Rus. Laser Research. 2006. V. 27. P. 466.
54. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М: ВИНТИ, 1965.
55. Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. — М.: Физматлит, 2004.
56. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики / Пер. с англ. под ред. С. А. Ахманова. — М.: Наука, 1989.

ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОЛИТОНАХ ПРИ СВОБОДНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

Эрик Ланц, Николя Трепс, Клод Фабр

9.1. Введение

Солитоны, вследствие каких бы нелинейных эффектов они не порождались, являются изолированными и долгоживущими объектами, которые в течение длительного времени рассматривались как потенциальные кандидаты для хранения и передачи цифровой информации. В частности, это касалось временных солитонов, которые планировалось применить для высокоскоростной волоконной телекоммуникации, а также пространственных солитонов, которые можно использовать для параллельной обработки информации.

В связи со стремительным развитием квантовой информатики возникает вопрос: представляют ли солитоны определенный интерес только для оперирования с классической цифровой информацией, или также и с квантовой информацией? Поэтому исследование квантовых свойств солитонов вызывает большой интерес с точки зрения указанных приложений. В то время как временные солитоны активно исследовались в этом направлении как теоретически, так и экспериментально [1], проблема квантовых информационных приложений пространственных солитонов все еще остается почти не затронутой. Цель этой главы — сделать обзор предварительных теоретических исследований в этой области, начатых недавно и касающихся солитонов, свободно распространяющихся в нелинейной среде. Случай резонаторных солитонов рассмотрен в следующей главе.

Вследствие точного баланса между дифракцией и нелинейностью, пространственные солитоны распространяются без каких-либо деформаций на большие расстояния, что приводит к усилению квантовых корреляций, а также к локальным эффектам подавления квантового шума. В недавних исследованиях [2–4] эти квантовые эффекты рассмотрены для пространственных солитонов. В работе [2] показано, что «дрожание» солитона, вызванное вакуумными флуктуациями, остается пренебрежимо малым в сравнении с его шириной. В [3] теоретически продемонстрирована возможность получения субпуассоновского света двумя способами: путем помещения диафрагмы в центре пучка в ближней зоне или фильтра низких частот в дальней зоне. Квантовые флуктуации, возникающие при этом, можно рассматривать как

малые флуктуации интенсивного поля, применяя методы линеаризации [5] в отсутствии резонатора. Экспериментально неклассические временные солитоны с флуктуациями ниже стандартного квантового предела были получены в [6, 7]. Ниже мы покажем, что существует некоторое сходство между квантовыми свойствами временных и пространственных солитонов, хотя до сих пор нет экспериментального подтверждения квантовых свойств пространственных солитонов.

В первой части этой главы, посвященной солитонам в свободном пространстве, мы используем общий метод линеаризации, называемый «методом функции Грина», который позволяет численно получить ожидаемые значения квантовых моментов без моделирования стохастического усреднения. Этот метод может быть применен для любого типа солитонов [4, 8] и, вообще говоря, для любых слабых квантовых флуктуаций, будь то флуктуации интенсивного поля или поля, усиленного накачкой [9]. Он будет описан в разд. 9.2. Мы рассмотрим скалярные и векторные пространственные солитоны в средах с кубической и квадратичной нелинейностью ($\chi^{(3)}$ и $\chi^{(2)}$). Их основные свойства перечислены в разд. 9.3. В разд. 9.4 обсуждается степень полного сжатия для этих солитонов, а в разд. 9.5 анализируются квантовые свойства локальных флуктуаций. В большинстве случаев полное сжатие увеличивается с длиной распространения, в то время как локальное сжатие имеет место только на малых расстояниях.

9.2. Общий метод

Мы представим здесь краткое описание метода, позволяющего определить пространственное распределение квантовых флуктуаций солитона в режиме свободного распространения. Мы будем придерживаться изложения в [4]. Так как мы собираемся применить этот метод для различных солитонов ($\chi^{(3)}$ или $\chi^{(2)}$, скалярных или векторных), мы изложим метод в общем виде, описывающем нелинейную связь между n монохроматическими комплексными электрическими полями с частотами ω_i , которые запишем в виде $E_i(\mathbf{r}, z) e^{i(k_i z - \omega_i t)}$, где z — главное направление распространения, $k_i = n_i \omega_i / c$ — продольный волновой вектор (n_i — линейный коэффициент преломления среды на частоте ω_i) и $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечной плоскости.

9.2.1. Уравнения распространения для флуктуаций. В приближении медленно меняющихся амплитуд, используя параксиальное и скалярное приближения, система связанных уравнений распространения для классических амплитуд полей E_i записывается в виде [10]:

$$2ik_i \frac{\partial}{\partial z} E_i(\mathbf{r}, z) + \nabla^2 E_i(\mathbf{r}, z) = F_i(E_1, \dots, E_n), \quad (9.1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — лапласиан по поперечным координатам; $F_i(E_1, \dots, E_n)$ — член, пропорциональный нелинейной поляризации, создаваемой в среде на частоте ω_i различными фурье-компонентами поля.

Предположим, что для данного входного поля мы можем аналитически или численно найти решения уравнений (9.1), которые обозначим $\overline{E}_i(\mathbf{r}, z)$, ($i = 1, \dots, n$).

Переходя теперь к рассмотрению той же задачи на квантовом уровне, используя методы квантовой оптики в представлении Вигнера [11], которые также называют «полуклассическим подходом» [5], можно показать, что классические решения $\overline{E}_i(\mathbf{r}, z)$ можно использовать для определения квантовых флуктуаций в пределе малых флуктуаций.

Действительно, запишем квантовый положительно-частотный оператор поля $\hat{E}_i(\mathbf{r}, z)$ в виде:

$$\hat{E}_i(\mathbf{r}, z) = \langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, z) \rangle + \delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z), \quad (9.2)$$

где $\delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z)$ — оператор локальных квантовых флуктуаций поля на частоте ω_i . Эрмитовский оператор полного электрического поля $\hat{E}(\mathbf{r}, z)$ тогда можно представить как сумму $\sum_i [\hat{E}_i(\mathbf{r}, z) e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \hat{E}_i^\dagger(\mathbf{r}, z) e^{-i(k_i z - \omega_i t)}]$. До тех пор пока поле содержит большое число фотонов, а входные поля находятся в когерентном или близком к когерентному состоянию, квантовые средние полей совпадают с полями, найденными из классической нелинейной оптики: $\langle \hat{E}_i(\mathbf{r}, z) \rangle = \overline{E}_i(\mathbf{r}, z)$. Тогда флуктуации $\delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z)$ остаются малыми по сравнению со средними полями и удовлетворяют простым уравнениям распространения, полученным путем линеаризации классических уравнений распространения ¹⁾ (9.1) около средних значений, а именно:

$$2ik_i \frac{\partial}{\partial z} \delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z) + \nabla^2 \delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z) = \sum_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial E_j} \right)_{E=\overline{E}} \delta \hat{E}_j(\mathbf{r}, z) + \sum_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial E_j^*} \right)_{E=\overline{E}} \delta \hat{E}_j^\dagger(\mathbf{r}, z). \quad (9.3)$$

В следующем подразделе будет рассмотрен метод функции Грина, позволяющий записать решение уравнений (9.3).

9.2.2. Метод функции Грина. Главное преимущество уравнения распространения (9.3) состоит в его линейном характере, так что его решение в данной поперечной плоскости $z = z^{\text{out}}$ можно построить как линейную комбинацию входных флуктуаций в плоскости $z = z^{\text{in}}$:

$$\delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z^{\text{out}}) = \sum_j \iint d^2 r' G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \hat{E}_j(\mathbf{r}', z^{\text{in}}) + \sum_j \iint d^2 r' H_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta \hat{E}_j^\dagger(\mathbf{r}', z^{\text{in}}), \quad (9.4)$$

¹⁾ Линеаризация уравнений соответствует параметрическому приближению, справедливому на малых длинах распространения. В работах [31, 32] развит метод решения квантового нелинейного уравнения Шредингера на основе его представления в континуально-интегральном виде, что позволило выйти за рамки параметрического приближения.

где $G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $H_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функции Грина, ассоциированные с уравнениями (9.3). Уравнение (9.4) представляет собой интеграл Гюйгенса–Френеля, описывающий распространение квантовых флуктуаций в пределе малых флуктуаций.

Квантовые флуктуации входного поля — это флуктуации вакуумного или когерентного поля. Для скалярных полей в параксиальном приближении они удовлетворяют следующим соотношениям [12]:

$$\langle \delta \hat{E}_j(\mathbf{r}, z^{\text{in}}) \delta \hat{E}_k^\dagger(\mathbf{r}', z^{\text{in}}) \rangle = C_j \delta_{jk} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (9.5)$$

где $C_j = \frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 L}$, L — длина объема квантования вдоль оси Oz . Входные корреляционные функции не антинормально упорядоченных операторов равны нулю.

Из (9.3) и (9.5) нетрудно получить корреляционные функции между квантовыми флуктуациями различных операторов. Например,

$$\langle \delta \hat{E}_i(\mathbf{r}, z^{\text{out}}) \delta \hat{E}_k^\dagger(\mathbf{r}', z^{\text{out}}) \rangle = \sum_j C_j \iint d^2 \tau_1 G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_k^{j*}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1). \quad (9.6)$$

Следовательно, любая корреляционная функция или дисперсия флуктуаций представима в виде комбинации функций Грина $G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $H_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которые нам следует теперь вычислить. Для этого воспользуемся уравнениями (9.3): функция $G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, например, является решением этой системы уравнений при следующих начальных условиях ¹⁾:

$$\delta \hat{E}_k(\mathbf{r}, z^{\text{in}}) = \delta_{jk} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \delta \hat{E}_k^\dagger(\mathbf{r}, z^{\text{in}}) = 0. \quad (9.7)$$

Функция Грина $G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ приблизительно рассчитывается с использованием численных методов. Разбиваем поперечную плоскость на пикселы и ищем решение (9.3), используя пошаговый метод [13], со следующими начальными условиями: единица на данном пикселе и ноль на всех остальных пикселах. При этом необходимо выбрать масштаб поперечной решетки достаточно большим относительно радиуса солитона, чтобы избежать ложных эффектов, связанных с периодическими граничными условиями, накладываемыми в пределах этой решетки при процедуре быстрого преобразования Фурье.

9.2.3. Корреляции между фототоками. Для того чтобы измерить локальные флуктуации поля, будем предполагать, что используемые фотодетекторы имеют квантовую эффективность 1 и чувствительны только к компонентам поля на частоте ω_j . Если фотодетектор имеет очень малую площадь dS в окрестности точки $\mathbf{r}$, из теории фотодетектирования следует, что в пределе

¹⁾ Условия (9.7) являются формальными для получения выражения для функции Грина $G_i^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$; они противоречат друг другу, поскольку являются эрмитово сопряженными.

малых флуктуаций при прямом детектировании флуктуации фототока $\delta\hat{I}_j(\mathbf{r})$ записываются в виде:

$$\delta\hat{I}_j(\mathbf{r}) = \overline{E}_j(\mathbf{r}, z^{\text{out}}) dS \sum_i \iint d^2r_1 [A_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \delta\hat{E}_i(\mathbf{r}_1, z^{\text{in}}) + \text{э. с.}], \quad (9.8)$$

в случае, когда среднее поле $\overline{E}_j(\mathbf{r}, z^{\text{out}})$ вещественно (решение для солитона в этом случае может быть записано в аналитическом виде и рассмотрено в подразд. 9.3.1). $A_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является комбинацией функций Грина G и H :

$$A_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + H_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^*. \quad (9.9)$$

Для того, чтобы измерить локальные флуктуации определенной квадратурной компоненты поля, можно использовать схему балансного гомодинного приема с полем гомодина $E_{\text{loc}}(\mathbf{r}) = |E_{\text{loc}}(\mathbf{r})| e^{i\theta}$. При условии, что амплитуда поля гомодина существенно больше, чем амплитуда измеряемого поля, флуктуации фототока имеют вид:

$$\delta\hat{I}_j(\theta, \mathbf{r}) = |E_{\text{loc}}(\mathbf{r})| dS \sum_i \iint d^2r_1 [B_j^i(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \delta\hat{E}_i(\mathbf{r}_1, z^{\text{in}}) + \text{э. с.}], \quad (9.10)$$

где $B_j^i(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ равно

$$B_j^i(\theta, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i\theta} G_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + e^{-i\theta} H_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^*. \quad (9.11)$$

В частности, при $\theta = 0$ (или $\pi/2$) флуктуации фототока дают сигнал, пропорциональный квадратурной компоненте синфазной (или противофазной) средней амплитуде, то есть амплитудную (или фазовую) квадратурную флуктуацию.

Зная зависимость этих локальных флуктуаций фототока от флуктуаций входного поля $\delta\hat{E}_i(\mathbf{r}, z^{\text{in}})$, используя выражения (9.8) и (9.10), а также корреляционную функцию входных полей (9.5), можно записать корреляцию (ковариацию) между пикселями:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \theta) = \langle \delta\hat{I}(\theta, \mathbf{r}) \delta\hat{I}(\theta, \mathbf{r}') \rangle. \quad (9.12)$$

Можно также определить корреляционные функции или локальные дисперсии в случае фотодетекторов большой площади, интегрируя эти выражения по поверхности детектора. Например, дисперсия фототока, измеренного фотодетектором большой площади S равна:

$$\begin{aligned} \langle (\delta\hat{I}_j)^2 \rangle = \sum_i C_i \iint_S d^2\mathbf{r} \iint_S d^2\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{r}_1 \overline{E}_i(\mathbf{r}, z^{\text{out}}) \times \\ \times \overline{E}_i(\mathbf{r}', z^{\text{out}}) A_j^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) A_j^i(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1)^*. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Метод функции Грина можно применять при любой конфигурации полей, распространяющихся в нелинейной среде. В этой главе мы рассмотрим скалярный и векторный $\chi^{(3)}$ пространственные солитоны, а также $\chi^{(2)}$ пространственные солитоны.

9.3. Пространственные солитоны: средние значения

9.3.1. $\chi^{(3)}$ скалярный пространственный солитон. Скалярный солитон можно получить в керровской среде для одной поперечной координаты x , используя, например, плоский волновод¹⁾. Классическое уравнение распространения для комплексной медленно меняющейся амплитуды электрического поля $U(x, z)$ в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial U(x, z)}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial x^2} + i\gamma |U(x, z)|^2 U, \quad (9.14)$$

где γ — обычный коэффициент Керра; z — направление распространения; k — продольный волновой вектор; x — координата в поперечной плоскости. Используя масштабный множитель η и масштабируя переменные $\zeta = \eta z$, $r = x\sqrt{2\eta k}$, уравнение можно привести к каноническому виду. Как хорошо известно [14], его решение — это гиперболический секанс, инвариантный относительно ζ :

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\cosh r}. \quad (9.15)$$

9.3.2. $\chi^{(3)}$ векторный пространственный солитон. В течении нескольких последних лет было продемонстрировано огромное число многокомпонентных солитонов²⁾ [15]. Среди них простейшим примером является бимодальный векторный солитон, состоящий из двух встречных круговых компонент, удерживающих друг друга в керровской среде без двулучепреломления, изображенный на рис. 9.1, а. Комплексные огибающие этих компонент U и V удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений Шредингера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Z} &= i \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + i\gamma(|U|^2 U + C|V|^2 U), \\ \frac{\partial V}{\partial Z} &= i \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + i\gamma(|V|^2 V + C|U|^2 V), \end{aligned} \quad (9.16)$$

где γ — коэффициент Керра; C отвечает силе фазовой кросс-модуляции (например, $C = 7$ в изотропной жидкости такой как для CS_2 [16]). Как видно из рис. 9.1, б, этот солитон, находясь в связанном состоянии, распространяется, оставаясь в равновесии благодаря некогерентной связи между двумя круговыми компонентами. Если он один в керровской среде, то симметричное поле U стремится к самофокусировке. Однако, антисимметричное поле V с противоположной круговой поляризацией стремится дифрагировать, и можно показать, что соответствующим выбором интенсивностей (в безразмерных

¹⁾ Теория скалярного одномерного пространственного солитона аналогична теории временного солитона, с которой можно познакомиться по книгам [33–35].

²⁾ Впервые многокомпонентные солитоны в нелинейной оптике изучались авторами работы [36].

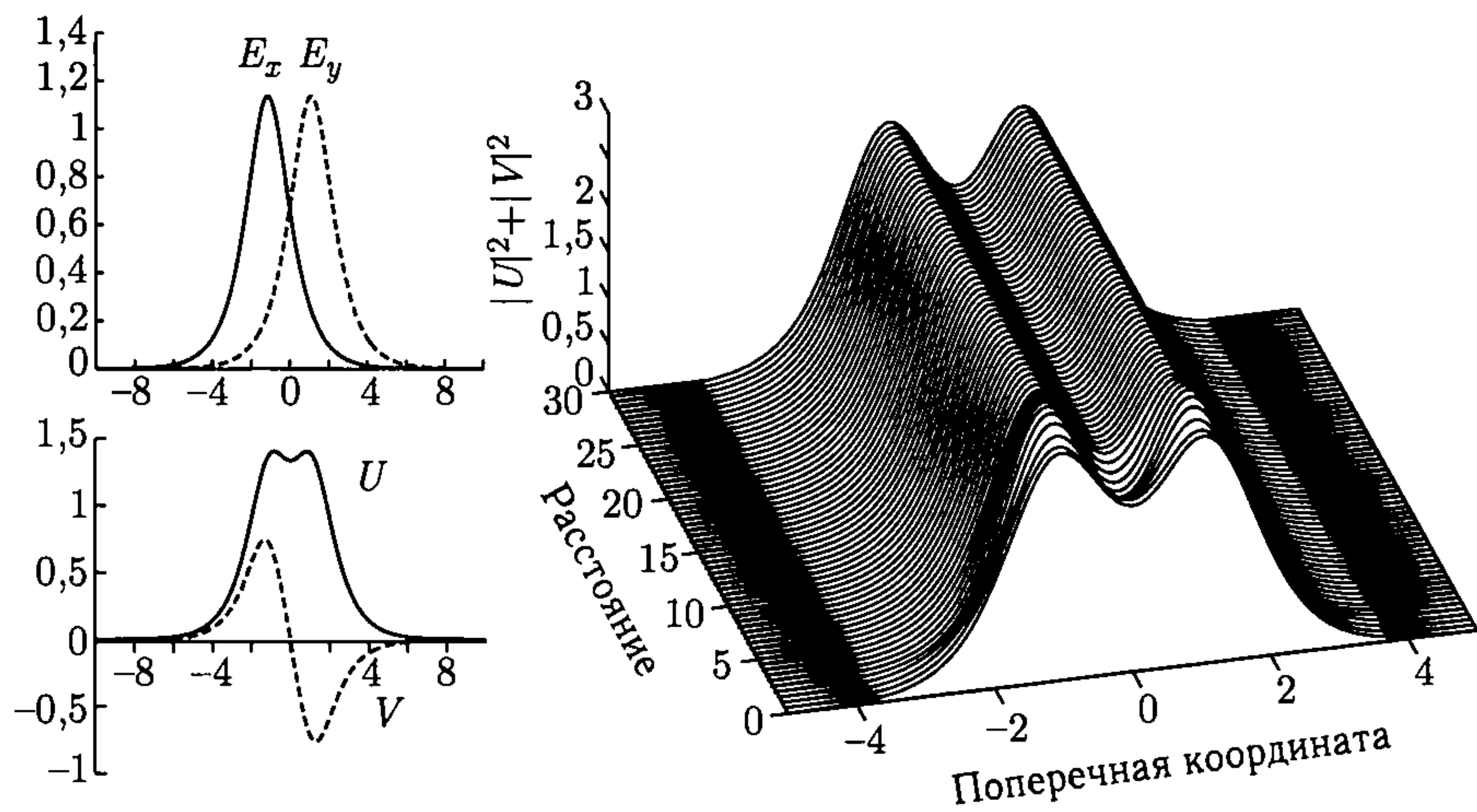


Рис. 9.1. Векторный солитон в базисе ортогональных линейных поляризаций (E_x и E_y) и в базисе круговых поляризаций (U и V). Рисунок справа показывает распространение связанного состояния солитона без изменения

единицах на рис. 9.1) можно обеспечить точный баланс между дифракцией и самофокусировкой. Однако, это равновесие не устойчиво, если коэффициент фазовой кросс-модуляции больше, чем коэффициент фазовой самомодуляции, что приводит к нарушающей симметрию неустойчивости, экспериментальная демонстрация которой представлена в [17].

9.3.3. $\chi^{(2)}$ пространственный солитон¹⁾. В среде с квадратичной нелинейностью комплексные медленно меняющиеся амплитуды поля основной гармоники $E_1(\mathbf{r}, z) e^{i(k_1 z - \omega t)}$ и поля второй гармоники $E_2(\mathbf{r}, z) e^{i(k_2 z - 2\omega t)}$ связаны следующей системой уравнений [10] (без учета эффекта сноса):

$$\begin{aligned} 2ik_1 \frac{\partial}{\partial z} E_1(\mathbf{r}, z) + \nabla^2 E_1(\mathbf{r}, z) &= -2 \frac{\omega^2}{c^2} \chi^{(2)} E_1^* E_2 e^{-i\Delta k z}, \\ 2ik_2 \frac{\partial}{\partial z} E_2(\mathbf{r}, z) + \nabla^2 E_2(\mathbf{r}, z) &= -4 \frac{\omega^2}{c^2} \chi^{(2)} E_1^2 e^{i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $\Delta k = 2k_1 - k_2$. Здесь мы также ограничим наш анализ случаем одной поперечной координаты x . Уравнения (9.17) также можно переписать в каноническом виде [15]:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \alpha u + u^* v &= 0, \\ i \sigma \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \sigma(2\alpha + \beta)v + \frac{1}{2} u^2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.18)$$

¹⁾ Возможность формирования пространственных солитонов в квадратично-нелинейных кристаллах впервые была продемонстрирована в работах [37, 38].

вводя, как и в случае $\chi^{(3)}$, масштабирующий множитель η и параметр свободного продольного фазового смещения α , и полагая $\zeta = \eta z$, $\tau = x\sqrt{2\eta k_1}$, $\sigma = \frac{k_2}{k_1}$, $\beta = \frac{\Delta k}{\eta}$, $u = 2\frac{\omega^2 \chi^{(2)}}{k_1 c^2} \frac{E_1}{\eta} e^{-i\alpha\zeta}$, $v = \frac{\omega^2 \chi^{(2)}}{k_1 c^2} \frac{E_2}{\eta} e^{-i(2\alpha+\beta)\zeta}$.

Уравнения (9.18) имеют бесконечный набор решений, инвариантных относительно ζ , каждое из которых дает точное значение отношения мощности полей основной и второй гармоники. Среди этих решений одно представляет интерес с точки зрения вычислений, поскольку является единственным известным на сегодня решением, имеющим аналитическое выражение (аналитический солитон). Оно отвечает частному случаю $\alpha = 1$, $\sigma(2\alpha + \beta) = 1$ и имеет вид:

$$u = \frac{3\sqrt{2}}{2 \cosh^2 \tau/2}, \quad v = \frac{3}{2 \cosh^2 \tau/2}. \quad (9.19)$$

Для этого аналитического солитона отношение мощности второй гармоники к мощности основной гармоники равно 2 (случай равного числа фотонов), и масштабирующий множитель η имеет вполне определенное значение $\eta = k_2 \frac{2k_1 - k_2}{k_1 - 2k_2} \approx -2\Delta k/3$. Когда данное соотношение между масштабирующим множителем и фазовой расстройкой не выполняется, солитон существует, но более не является аналитическим. Его форма остается почти такой же, что описывается выражениями (9.19). В дальнейшем мы будем использовать аналитический солитон (9.19) как характерный пример, имея в виду, что результаты, полученные для солитонов, соответствующих близким параметрам, не должны существенно отличаться от полученных с помощью аналитического солитона.

Уточним порядки величин, опираясь на эксперимент, описанный в [18], хотя он и не отвечает случаю одной размерности в поперечном направлении. Пространственный солитон имел ширину 20 мкм при освещенности на входе порядка 50 ГВт/см². В наших приведенных единицах это соответствует параметру распространения $\zeta = 1$ при распространении в нелинейном КТР-кристалле длиной 0,3 мм.

9.4. Сжатие во всем пучке

Применяя методы, описанные в разд. 9.2, можно определить пространственные квантовые свойства солитонов, введенных в разд. 9.3. В этом разделе мы рассмотрим свойства полного сжатия для солитонов трех видов.

9.4.1. $\chi^{(3)}$ скалярный пространственный солитон. Как известно [19], эффект Керра в случае плоской волны приводит к заметному сжатию, которое монотонно увеличивается при распространении. Наилучшее, или иначе оптимальное, сжатие достигается для некоторой квадратурной компоненты, которая не является ни амплитудной ни фазовой. Однако шум в амплитудной квадратуре поля остается на уровне дробового. На рис. 9.2 представлены результаты метода функции Грина для скалярного солитона. Видно, что эти результаты достаточно близки к случаю плоской волны, когда фотодетек-

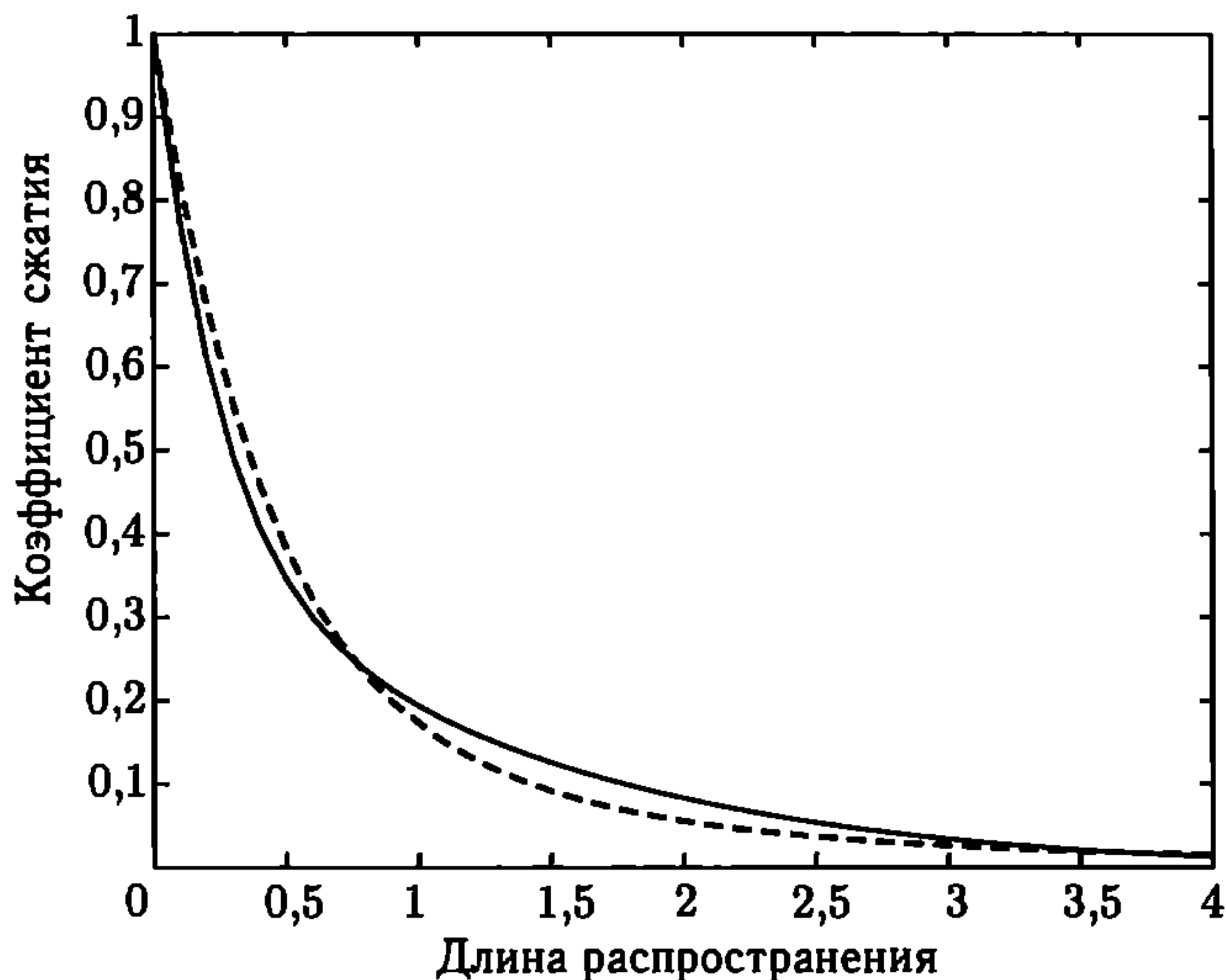


Рис. 9.2. Наилучшее полное сжатие в единицах дробового шума в керровских скалярных солитонах (сплошная линия) в зависимости от нормированной длины распространения. Пунктирная кривая соответствует случаю плоской волны. В обоих случаях нормированная длина распространения пропорциональна нелинейной фазе ζ

тор имеет площадь много большую, чем размер солитона. Пренебрежение дифракцией оказывается практически эквивалентно рассмотрению одномодового распространения в оптическом волноводе [1, 20], поскольку в последнем дифракция компенсируется эффектом самофокусировки при данном значении нелинейной фазы ζ . Таким образом, пространственные солитоны могут быть полезны для получения сильного сжатия, с учетом того ограничения, что при детектировании необходимо использовать технику гомодинного приема.

9.4.2. $\chi^{(3)}$ векторный солитон: сжатие во всем пучке и корреляции между поляризациями. Поскольку векторные солитоны не интегрируемы аналитически, то функцию импульсного отклика идеального векторного солитона на дираковски-подобное изменение поля определить гораздо сложнее и рассчитывается она следующим образом. Возмущение представляет собой единичный однопиксельный шаг, умноженный на малый коэффициент до того как добавляется к полю, чтобы обеспечить почти идеальную линейность уравнения распространения относительно возмущения. Сперва, используя (9.16), для обоих полей, неизменного и измененного, численно рассчитывается распространение, и затем решения вычитается одно из другого. Наконец, результат вычитания делится на исходный коэффициент умножения, чтобы найти значение на выходе, соответствующее одному однопиксельному шагу на входе. На рис. 9.3, а показан коэффициент полного сжатия векторного солитона для наилучшей квадратуры ¹⁾. Этот рисунок очень похож на рис. 9.2, полученный для скалярного солитона: наблюдается сильное сжатие, хотя несколько меньшее, чем в случае скалярного солитона при той же

¹⁾ Имеется ввиду квадратура, для которой можно наблюдать наиболее выраженный эффект сжатия

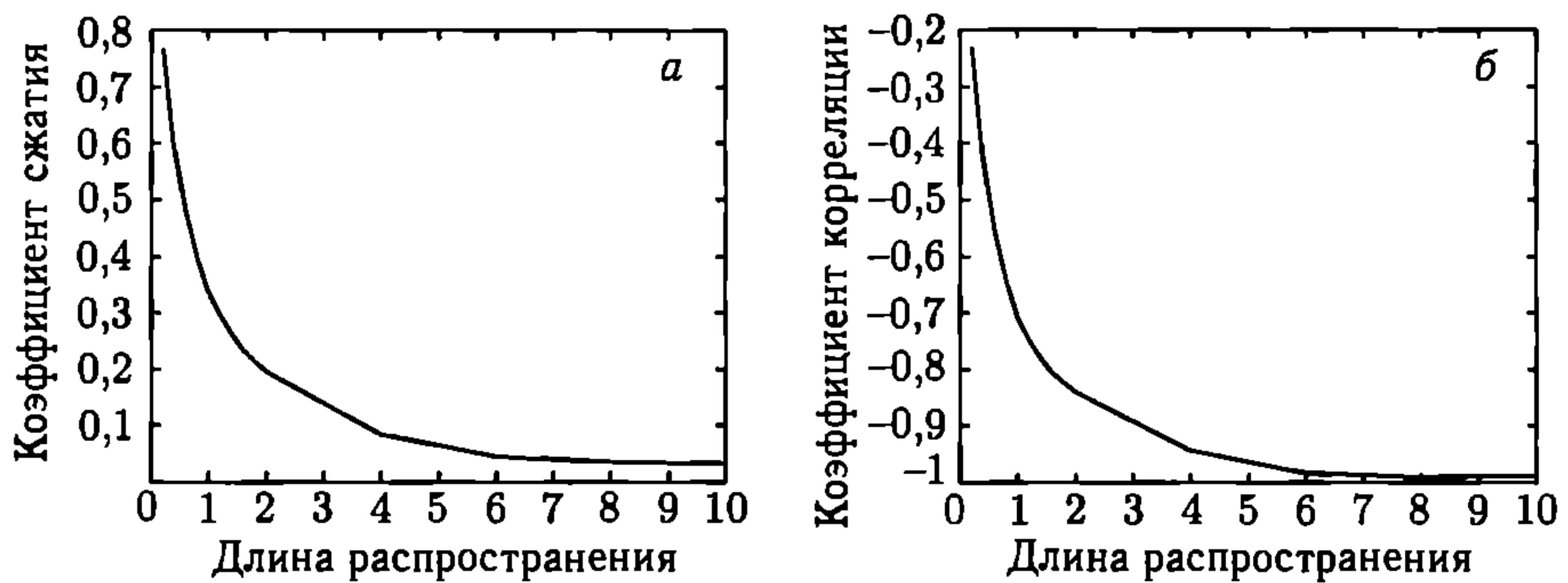


Рис. 9.3. Наилучшее полное сжатие в единицах дробового шума (а) и коэффициент корреляции между круговыми поляризациями (б) в зависимости от нормированной длины распространения

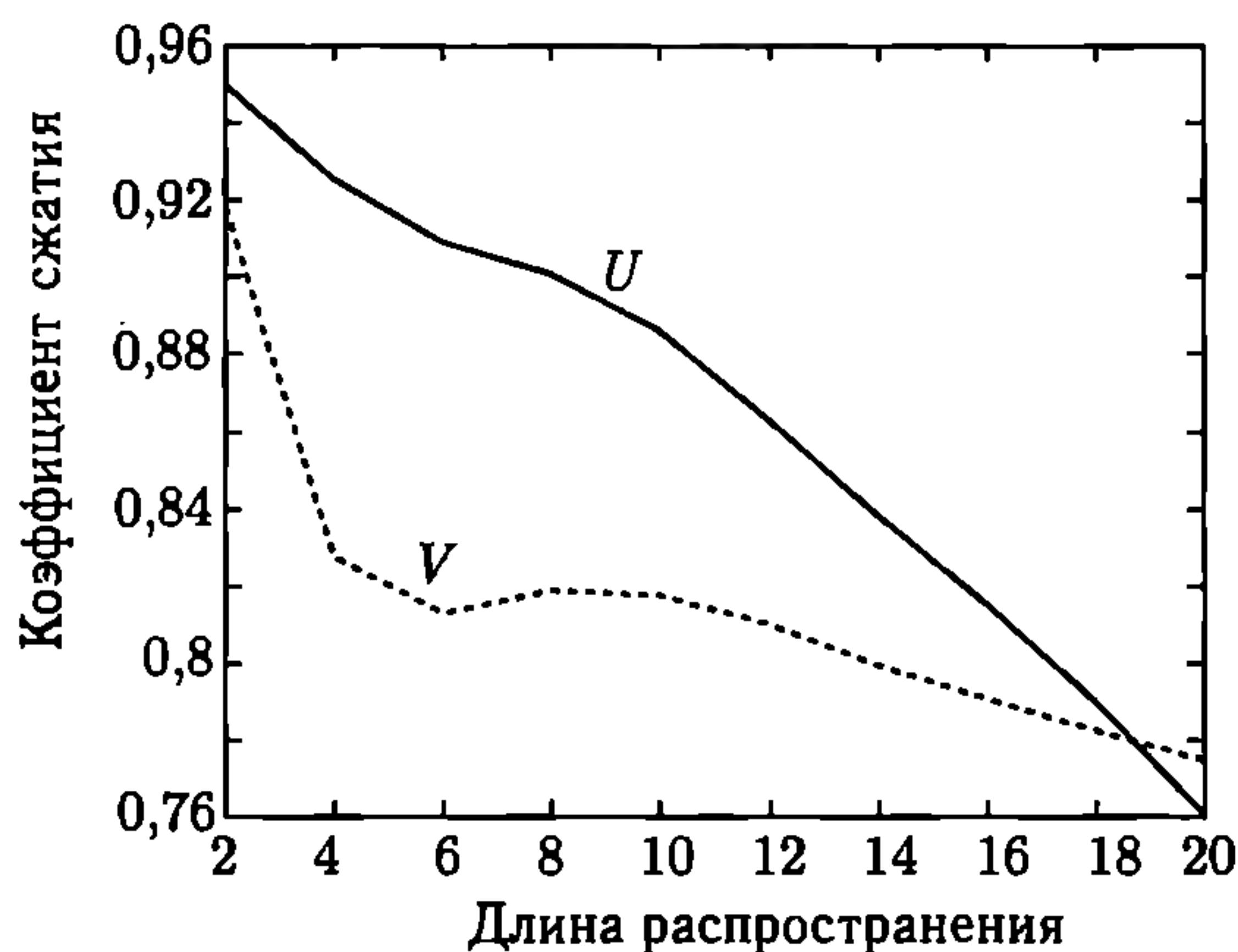


Рис. 9.4. Наилучшее полное сжатие в единицах дробового шума для каждой из круговых поляризаций в зависимости от нормированной длины распространения

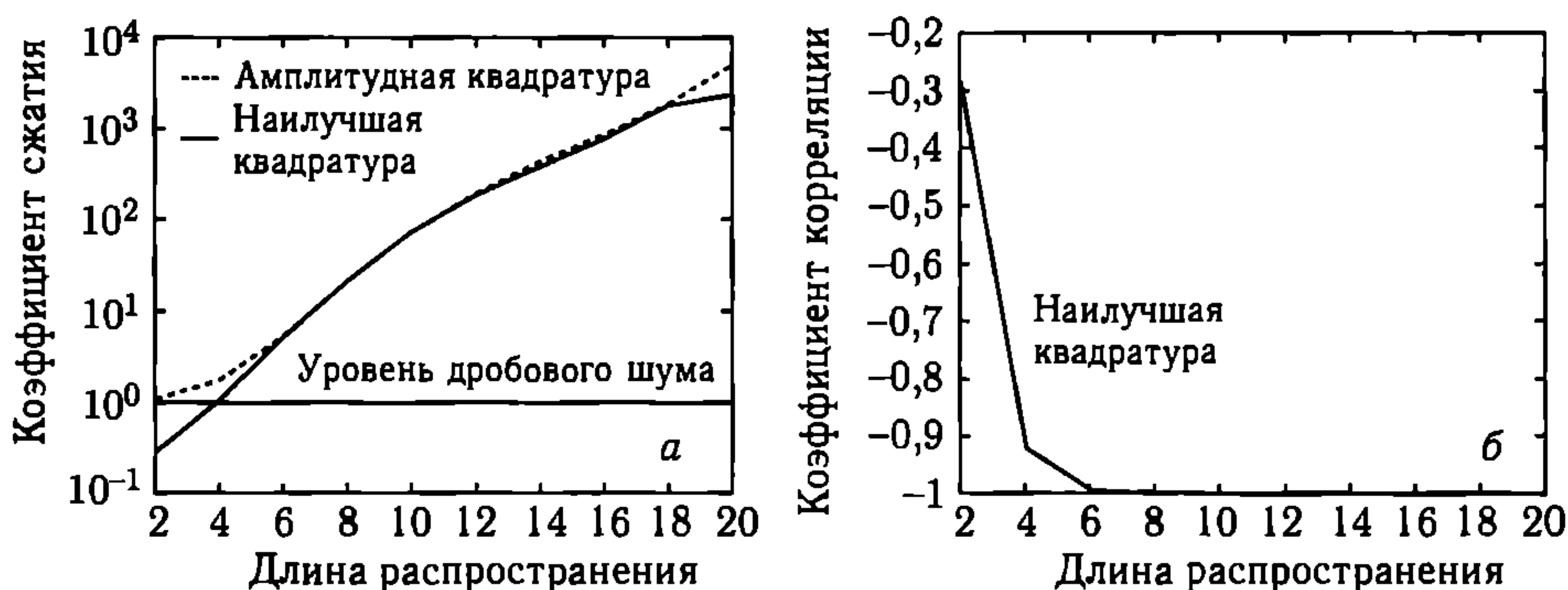


Рис. 9.5. Коэффициент сжатия (а) и коэффициент корреляции (б) линейных поляризаций в зависимости от нормированной длины распространения

длине распространения. Как показано на рис. 9.3, б, причина этого сжатия заключается в сильной антикорреляции между круговыми компонентами. В этом можно убедиться, глядя на рис. 9.4, где изображено наилучшее сжатие для каждой круговой компоненты в отдельности в зависимости от длины

распространения, которое, как видно, много слабее. Можно заключить, что векторный солитон как целое проявляет квантовые свойства, также как и скалярный солитон, а поля в каждой поляризации сами по себе не являются солитонами. На рис. 9.5 показано, что сжатие в линейных поляризациях пропадает после относительно короткой длины распространения даже для наилучшей квадратуры. Более того, флуктуации нарастают экспоненциально. С другой стороны, флуктуации в обоих линейных поляризациях полностью антикоррелированы после некоторой длины распространения, как и ожидалось, поскольку наблюдается сильное сжатие всего пучка. Мы убедились, что результаты, касающиеся всего пучка, можно также получить, используя описание поля в базисе линейных поляризаций.

9.4.3. $\chi^{(2)}$ пространственный солитон. В среде с нелинейностью $\chi^{(2)}$ при распространении плоской волны, когда на входе среды при $\zeta = 0$ присутствует только поле на основной частоте, генерация второй гармоники приводит к постепенному росту амплитудного сжатия всего поля на основной частоте [21]. Сжатие становится почти идеальным при больших длинах распространения [22]. Другая ситуация наблюдается, когда рассматривают эволюцию $\chi^{(2)}$ пространственного солитона. В этом случае можно показать, что сжатие осциллирует в зависимости от длины распространения и достигает

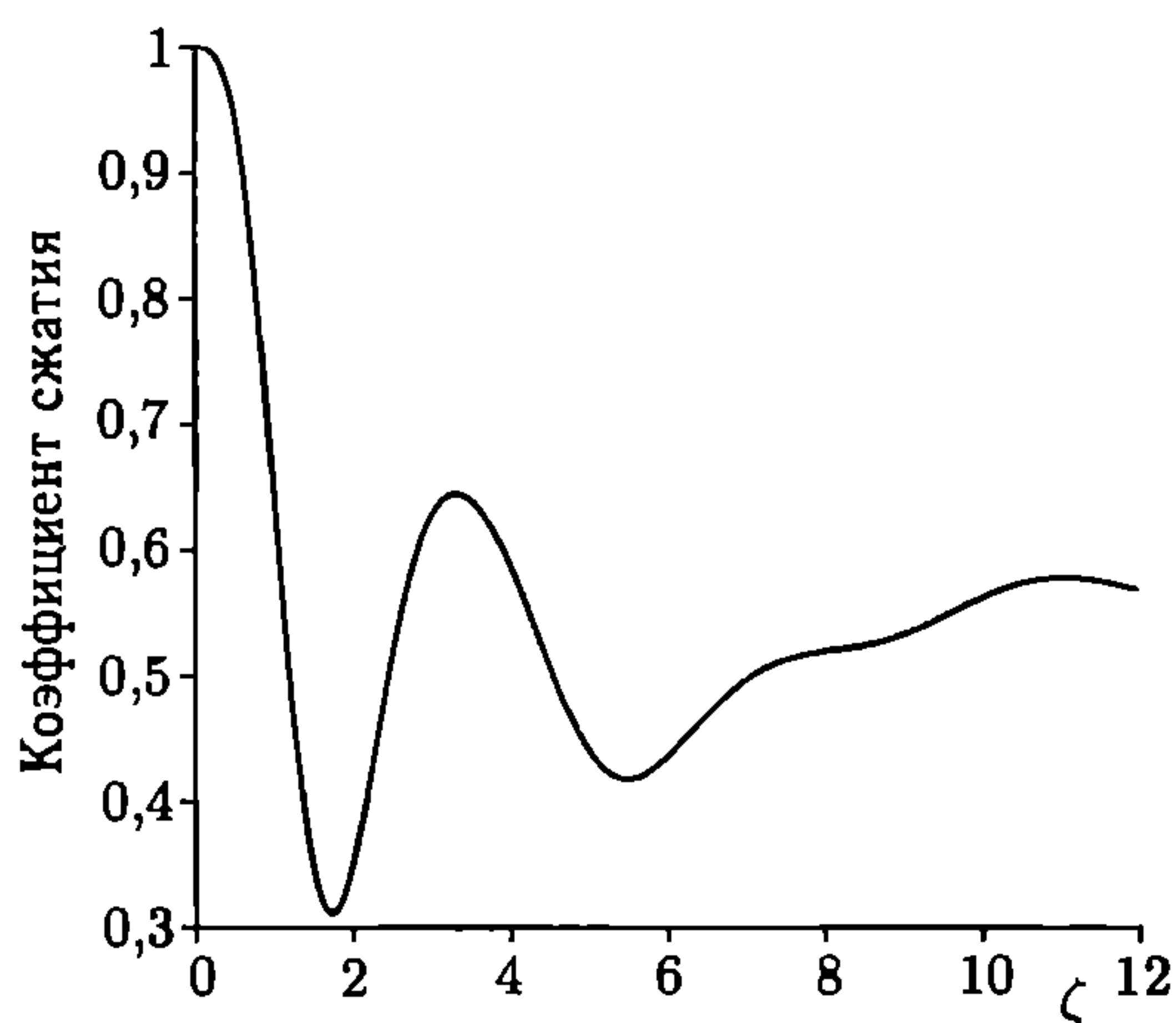


Рис. 9.6. Коэффициент сжатия амплитудной квадратуры поля второй гармоники в зависимости от длины распространения

максимального значения 70%. На рис. 9.6 представлено полное амплитудное сжатие на частоте второй гармоники [23]. Шум в этой квадратуре осциллирует, но остается ниже уровня дробового шума, тогда как в другой (фазовой) квадратуре поля второй гармоники сжатие отсутствует.

9.5. Локальные квантовые флуктуации

Выражение (9.13) и аналогичная формула, полученная из (9.10) для случая балансного гомодинного детектирования, позволяют определить флуктуации фототока, измеренные фотодетекторами с площадью поверхности S

любого размера и формы. Минимальный размер поверхности, для которого наше вычисление с учетом сделанных приближений дает физически верный результат, совпадает с размером пиксела и имеет длину, равную поперечной длине дискретизации, используемой при вычислении функции Грина G и H . Мы представим здесь результаты для $\chi^{(3)}$ векторных солитонов. Результаты для $\chi^{(2)}$ солитонов очень похожи на результаты для $\chi^{(3)}$ солитонов, но обладают тем важным отличием, что все эффекты сжатия эффективны в амплитудной квадратуре второй гармоники, т.е. не требуют гомодинного приема.

9.5.1. $\chi^{(3)}$ скалярный пространственный солитон. Поскольку сжатие в амплитудной квадратуре поля отсутствует, моделировали гомодинное детектирование, полагая, что гомодин с частотой излучения ω и фотодетектор очень малого размера с единичной квантовой эффективностью находятся на выходе нелинейной среды, позволяя измерять квантовый шум в произвольной квадратурной компоненте в точке (x, z_{out}) . Варьируя фазу гомодина, чтобы достичь минимального уровня шума, получаем величину, которую мы называем «наилучшим сжатием». На рис. 9.7, а и б эта величина показана в зависимости от x для двух значений нормированной длины распространения ($\zeta = 0,3$ и $\zeta = 3$), а также фазовый угол гомодина, позволяющий выделить квадратуру с наилучшим сжатием. Можно видеть, что излучение, детектируемое центральным пикселом, сжато сильнее всего. Подавление шума остается малым, потому что детектирование малой части пучка эквивалентно внесению потерь, если пучок одномодовый, что всегда соответствует рассматриваемому здесь случаю [24]. При больших длинах распространения наблюдаемый уровень шума оказывается ниже дробового уровня для любой квадратуры. Действительно, из рис. 9.8, изображающего изменение наилучшего сжатия на центральном пикселе в зависимости от длины распространения, видно,

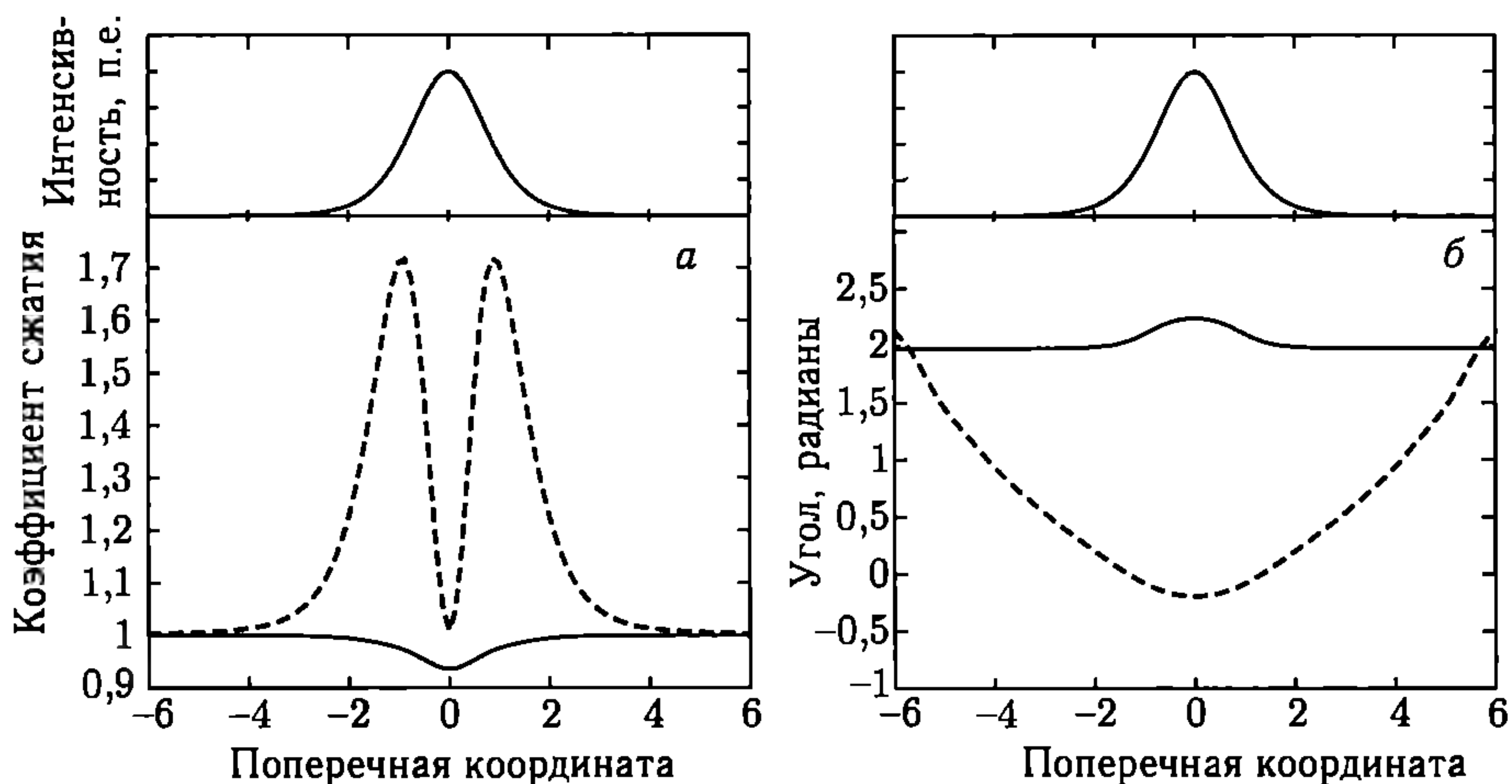


Рис. 9.7. Внизу: а) наилучшее полное сжатие в единицах дробового шума и б) соответствующий угол на единичном пикселе в зависимости от поперечной координаты. Сплошные кривые соответствуют длине распространения 0,3, штриховые — длине распространения 3. Наверху: соответствующие поперечные профили интенсивности скалярных солитонов

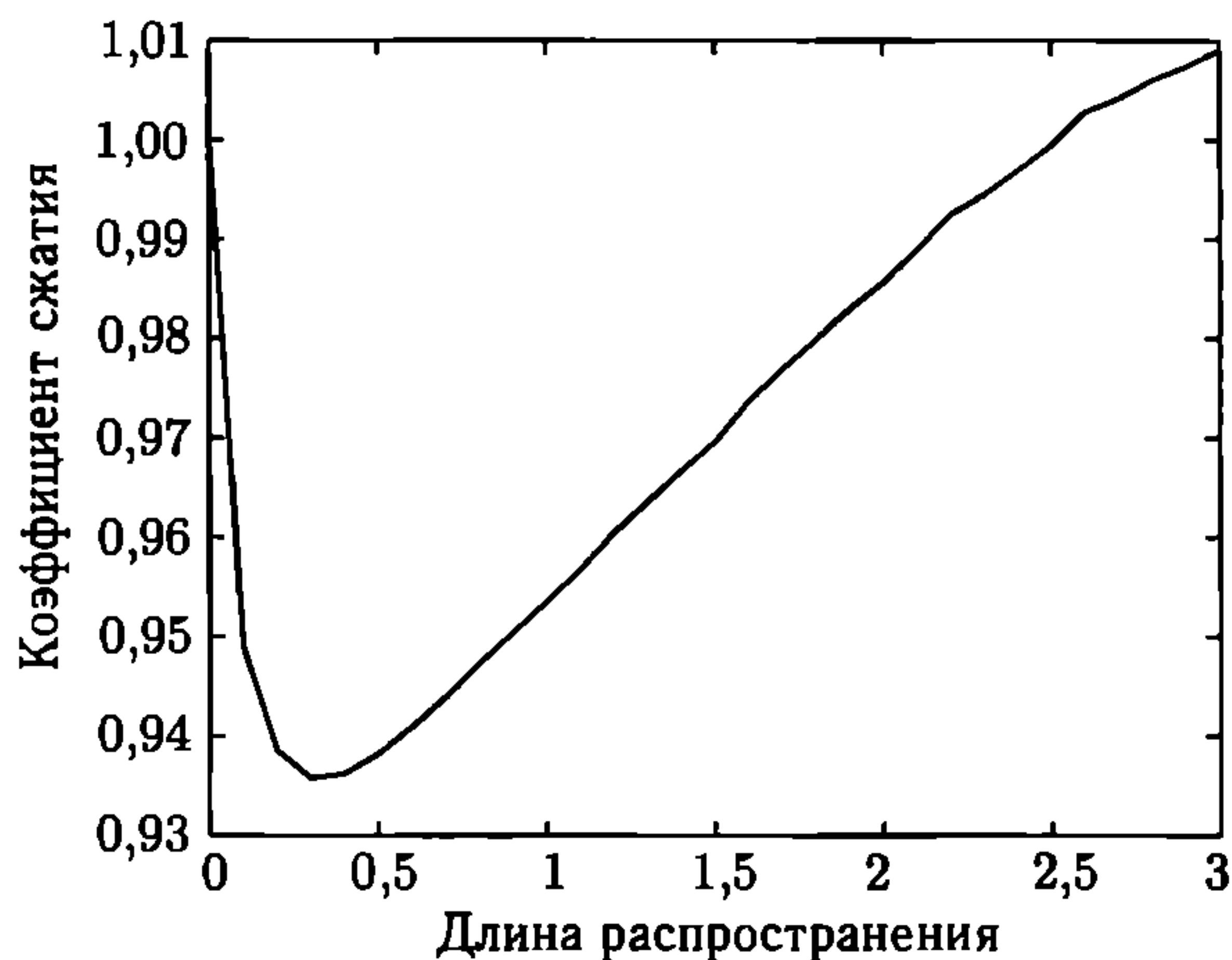


Рис. 9.8. Наилучшее сжатие на центральном пикселе в единицах дробового шума в зависимости от длины распространения

что флуктуации на этом пикселе уменьшаются до некоторой оптимальной длины распространения ($\zeta = 0,3$), а затем начинают расти и при существенно больших длинах распространения превосходят уровень дробового шума. Следовательно, большая длина распространения приводит, с одной стороны, к образованию локального избыточного шума, а с другой — к сжатию по полному пучку (см. рис. 9.2). В этом нет противоречия, поскольку, как мы покажем, вследствие дифракции имеет место постепенное образование антикорреляций между различными поперечными частями солитона. Рис. 9.9 показывает наилучшее сжатие для фотодетектора с варьлируемым размером, центрированным относительно оси пучка. Такой фотодетектор выполняет функцию ирисовой диафрагмы, позволяя детектировать только центральную часть пучка с минимальным размером, соответствующим размеру центрального пиксела, и максимальным размером, соответствующим измерению всего

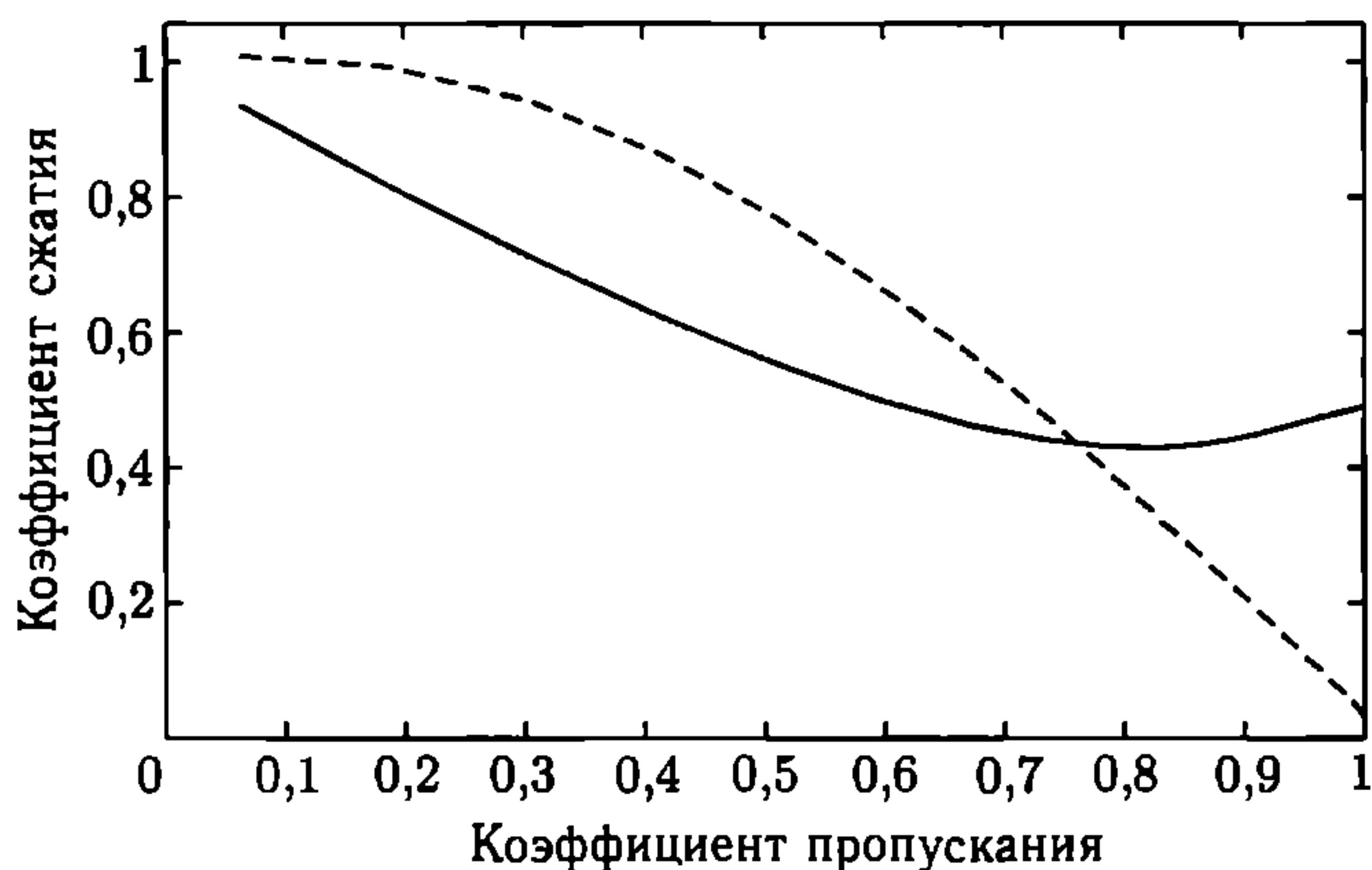


Рис. 9.9. Наилучшее сжатие при измерении фотодетектором с переменной апертурой в зависимости от коэффициента пропускания, определяемого как отношение измеренной интенсивности к полной интенсивности пучка. Сплошная кривая соответствует длине распространения 0,3, штриховая — длине распространения 3

пучка. Как и ожидалось, шум при очень малой площади детектора близок к дробовому. Сжатие на малом центральном участке детектора больше при малых длинах распространения, а для всего пучка — при больших. При $\zeta = 0,3$ сжатие максимально для конечного размера детектора (при значении коэффициента пропускания 0,8, что соответствует нормированному радиусу 1), в то время как для $\zeta = 3$ максимальное сжатие обеспечивается при измерении всего пучка. Объясняется это опять же наличием антикорреляций между двумя частями солитона при больших длинах распространения (см. разд. 9.6).

Во многих случаях пространственные солитоны проявляют себя как одномодовые объекты. Данный анализ позволяет нам проверить проявление такого одномодового характера на квантовом уровне. Предположим, что система находится в одномодовом квантовом состоянии. Это значит, что ее можно описать вектором состояния $|\Psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \dots$, причем $|\Psi\rangle$ — квантовое состояние моды, имеющей такую же пространственную структуру, что и поле солитона, а все остальные моды находятся в вакуумном состоянии. В [25] показано, что если световой пучок описывается таким вектором, то шум, измеряемый большим фотодетектором, перед которым находится ирисовая диафрагма с переменной апертурой, изменяется линейно относительно пропускания диафрагмы. Из рис. 9.9 видно, что в случае пространственного скалярного солитона это не так, поскольку рассматривается распределение квантового шума, то такой солитон нельзя трактовать как одномодовый объект. Заметим также, что отклонение от линейного характера зависимости составляет порядка 10%, так что одномодовое описание солитона можно считать все же достаточно хорошим приближением.

9.5.2. Сжатие по интенсивности при пространственной фильтрации. В предыдущем параграфе рассмотрено сжатие, которое возможно измерить только в схеме гомодинного приема. Сжатие в амплитудной квадратуре, которое наиболее легко измерить, поскольку для этого не требуется применение методов интерферометрии, а достаточно прямого детектирования, в результатах предыдущего параграфа отсутствовало. Мекоци и Кумар [3] показали, что простое диафрагмирование («вырезание») центральной части пучка солитона обеспечивает сжатие интенсивности оставшегося света. Они предложили следующее интуитивное объяснение: если флуктуация интенсивности всего пучка положительна, то солитон становится уже (его ширина обратно пропорциональна мощности), и диафрагма приведет к большим потерям, что компенсирует нарастание мощности, вызванное флуктуацией. В фурье-плоскости прямоугольная диафрагма (фильтр низких частот) позволяет получить даже еще более хорошее сжатие. На рис. 9.10 показано сжатие по интенсивности, полученное с использованием метода функции Грина при наличии апертуры в фурье-плоскости. Эти результаты полностью согласуются с представленными в [3] на рис. 1, которые получены другим линеаризационным методом. Небольшое отличие результатов, возможно, является следствием небольшого различия в ширине апертуры. Также как Мекоци и Кумар, мы убедились, что субпуассоновский свет легко получить от пространственного солитона, помещая обычную апертуру в фурье-плоскости. Эти результаты являются

переносом в область пространственных переменных метода, который использовался в экспериментах для получения сжатия во времени в оптоволоконных солитонах [26].

9.5.3. $\chi^{(3)}$ векторный солитон. На рис. 9.11 показана зависимость коэффициента сжатия для одного пикселя от поперечной координаты этого пикселя для длины распространения, при которой это локальное сжатие наиболее интенсивно. Степень сжатия такая же как в скалярном случае (см. рис. 9.7), однако, присутствуют два пика сжатия, расположенных в тех же точках, что и пики интенсивности многомодового векторного солитона. Как и в скалярном случае, локальное сжатие максимально при относительно небольших длинах распространения (рис. 9.11, б). На рис. 9.12 показано наилучшее сжатие для детектора с переменным размером, центрированного на одном из пиков интенсивности. В отличие от рис. 9.9, зависимость от коэффициента пропускания имеет далеко не линейный характер, что свидетельствует, как и предполагалось, о не одномодовости системы. Видно, что

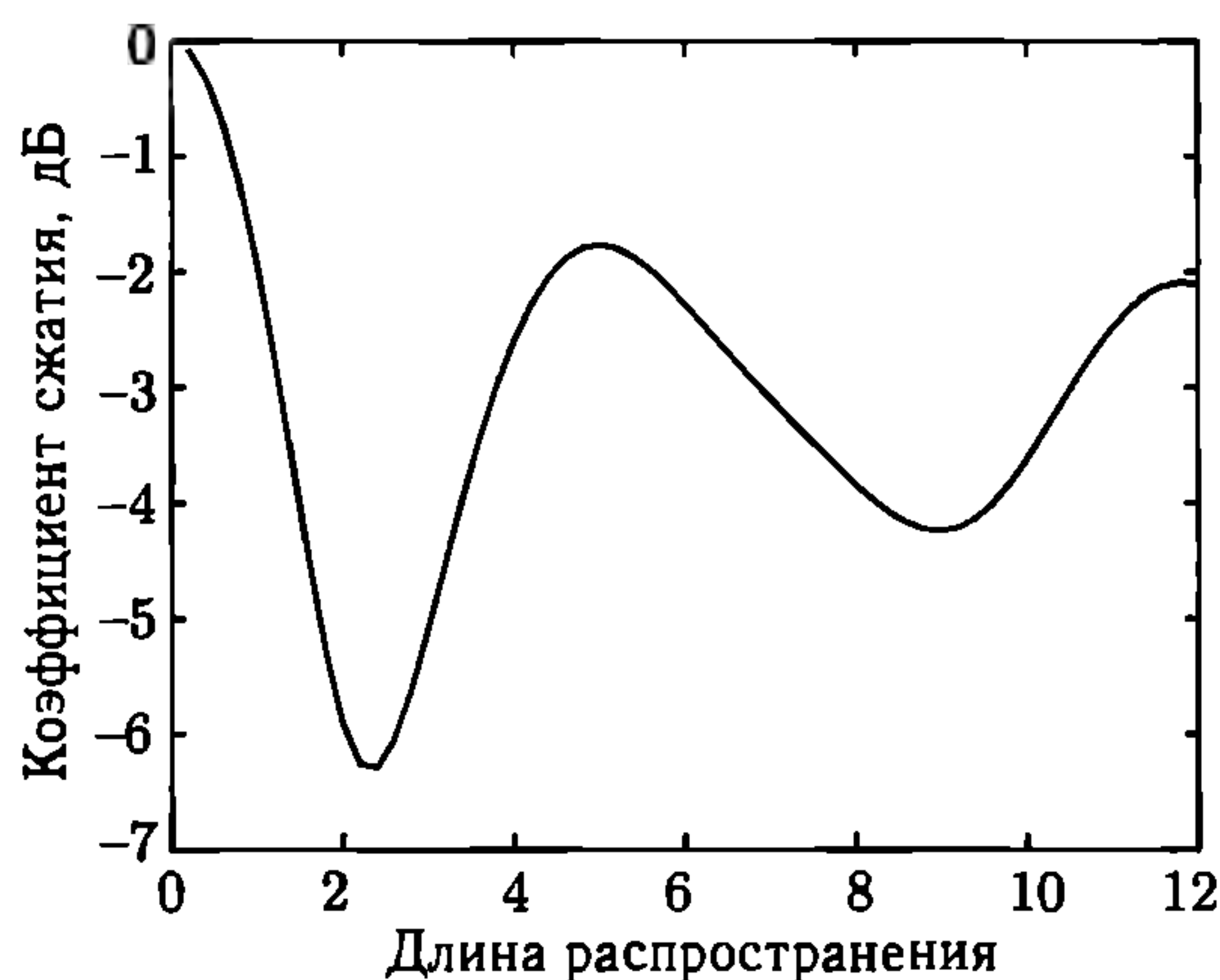


Рис. 9.10. Сжатие по интенсивности (дБ) для случая, когда детектор помещается в центр фурье-плоскости. Полная апертура детектора равна 0,25 в единицах пространственных частот, соответствующих нормированным единицам обычного пространства

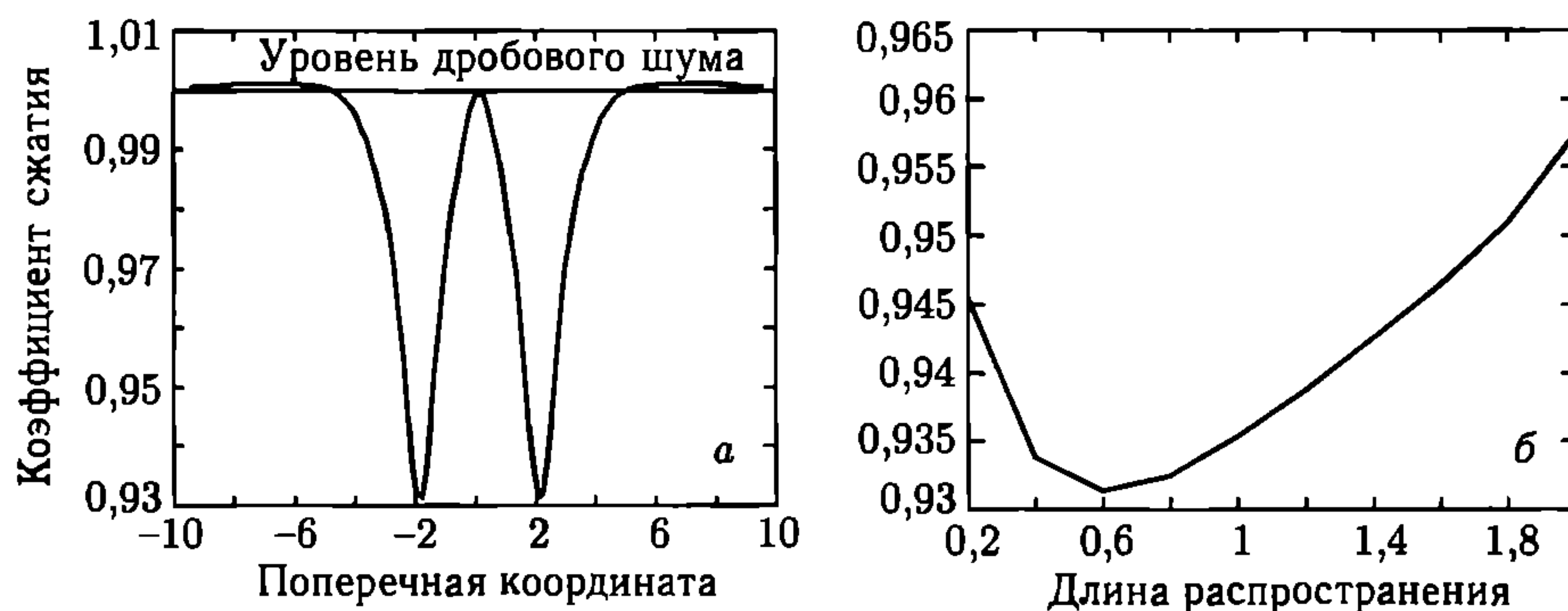


Рис. 9.11. Наилучшее сжатие на одном пикселе в зависимости от поперечной координаты при $\zeta = 0,6$ (а) и в зависимости от длины распространения при значении поперечной координаты, отвечающем наиболее сильному сжатию (б)

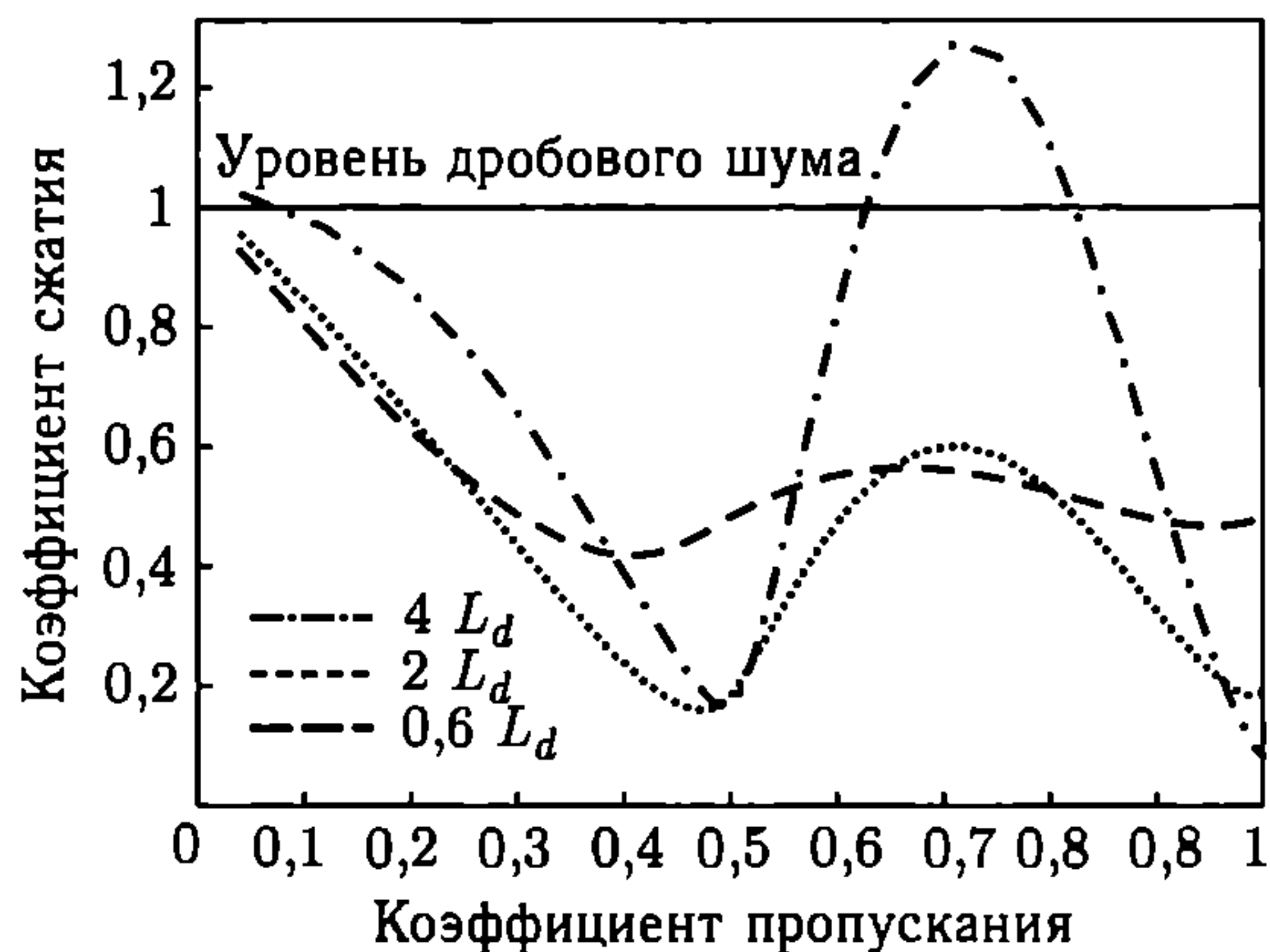


Рис. 9.12. Наилучшее сжатие при регистрации фотодетектором с переменной апертурой, центрированным на пике интенсивности, в зависимости от коэффициента пропускания, определяемого как отношение измеренной интенсивности к полной интенсивности пучка для трех различных длин распространения

при больших длинах распространения полное сжатие стремится к максимуму, если размер фотодетектора примерно равен ширине пика. Это полное сжатие означает наличие пространственных антикорреляций. Действительно, локальное сжатие на одном пикселе исчезает на таких больших расстояниях (см. рис. 9.11 и 9.12).

9.6. Квантовые корреляции между квадратурными компонентами поля в разных точках

Применяя методы, развитые в разд. 9.5, и используя выражение, аналогичное (9.13), можно определить пространственные квантовые корреляции между разными квадратурными компонентами, измеренными в двух пространственно разделенных областях.

9.6.1. $\chi^{(3)}$ скалярный пространственный солитон. На рис. 9.13 показано, что ковариация между пикселями, при выделении на них наилучшей сжатой квадратуры, возрастает и расширяется при изменении длин распространения от $\zeta = 0,3$ до $\zeta = 3$ (ковариация рассчитана с помощью (9.12), где наилучшее сжатие определяется для полного пучка). В самом деле, при $\zeta = 0,3$ присутствуют только антикорреляции между пикселями, близко расположенными друг к другу. При $\zeta = 3$ корреляции между смежными пикселями становятся положительными, а сжатие обеспечивается антикорреляциями между левой и правой частями солитона. Отметим, что рассмотренная ковариация рассчитана с учетом размера пикселя [4].

9.6.2. Векторные солитоны. На рис. 9.14 представлены пространственные корреляции в терминах функции ковариации $C(x, x', \theta)$ двух поляризаций. Функция ковариации между двумя модами, при выделении для каждой из них наилучшей сжатой квадратуры, рассчитана для двух длин распространения. Видно, что при $\zeta = 0,6$, если измеряются различные круговые

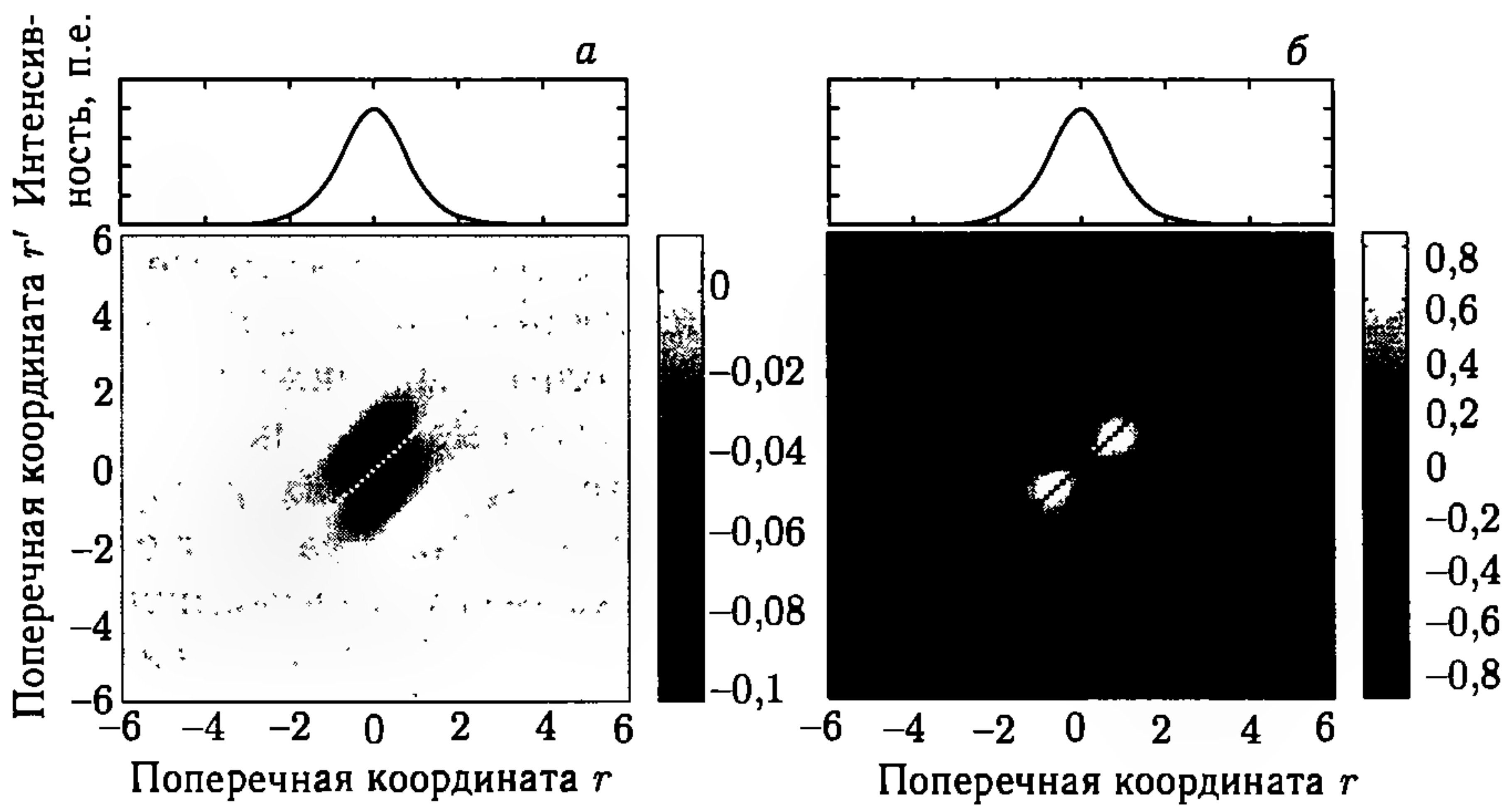


Рис. 9.13. Внизу: Ковариация $C(x, x', \theta)$ между пикселями при выделении на них наилучшей сжатой квадратуры, рассчитанная для длины распространения, равной 0,3 (а) и 3 (б). Значения на главной диагонали (дисперсии) удалены. Наверху: соответствующий поперечный профиль интенсивности скалярного солитона

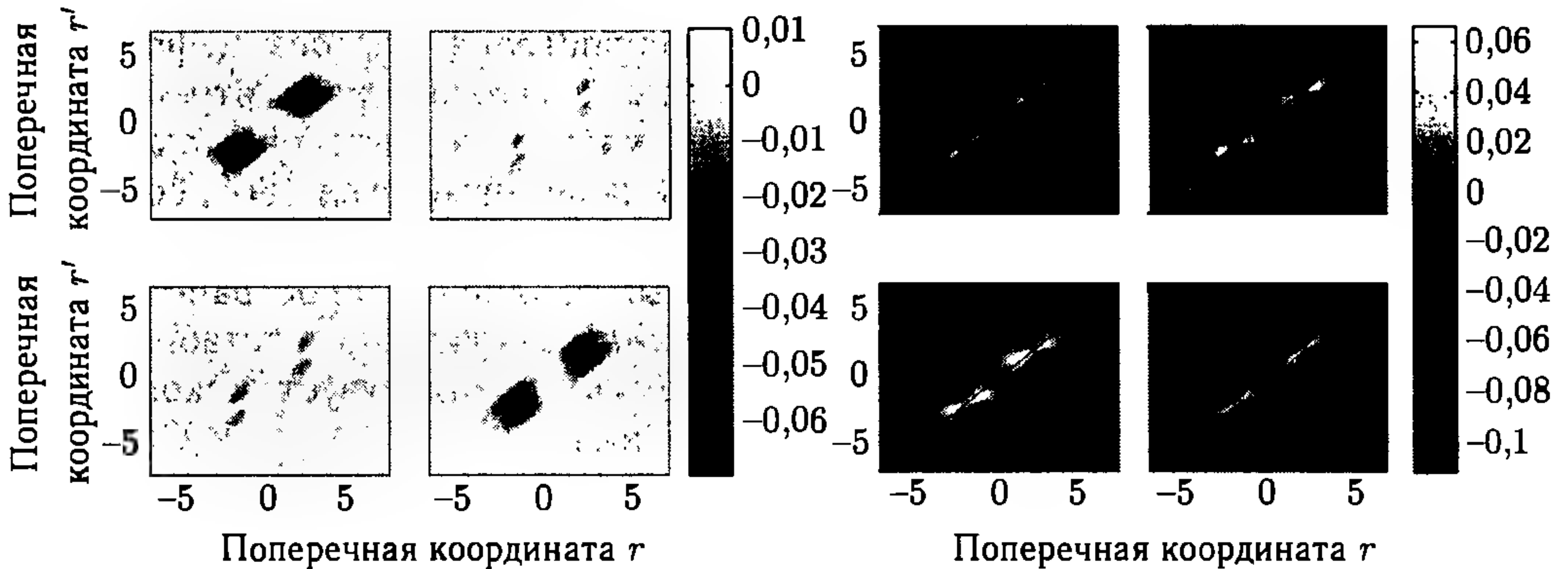


Рис. 9.14. Ковариация $C(x, x', \theta)$ в единицах дробового шума между пикселями при выделении на них наилучшей сжатой квадратуры, рассчитанная для двух длин распространения: а) 0,6 и б) 2. Значения на главной диагонали (дисперсии) удалены

поляризации, то между пикселями возникают антикорреляции. Это значит, что эффект фазовой кросс-модуляции уже заметен, в то время как эффекты дифракции и самомодуляции еще малы. При $\zeta = 2$ антикорреляции возникают также между излучением пикселей одинаковой поляризации, также как для скалярного солитона.

9.6.3. $\chi^{(2)}$ пространственные солитоны. Ковариация между амплитудными квадратурами основной и второй гармоник ведет себя очень схожим образом с ковариацией скалярного $\chi^{(3)}$ солитона при выделении наилучшей сжатой квадратуры (см. рис. 9.13). Это значит, что имеют место антикорреляции между левой частью солитона основной гармоники и правой частью солитона второй гармоники, и наоборот. Здесь снова квантовые свойства носят нелокальный характер.

9.7. Заключение

Суммируем основные результаты, касающиеся пространственного распределения квантовых флуктуаций одномерных солитонов, которые мы представили в этой главе. При рассмотрении измерений над всем солитоном как целое показано, что скалярные керровские солитоны, также как и векторные солитоны, проявляют свойства сжатия, аналогичные сжатию при распространении плоской волны в той же среде на тех же длинах распространения. Вследствие дифракции при распространении солитона развиваются сильные антикорреляции между симметричными точками в пятне скалярного солитона, между поляризационными компонентами для векторного солитона, и между частотными компонентами для $\chi^{(2)}$ солитона. Поскольку формирование этих антикорреляций не связано с фазовыми эффектами, в $\chi^{(2)}$ солитонах можно наблюдать сжатие в амплитудной квадратуре без гомодинного приема.

Имея ввиду приложения к квантовой информатике, следующий шаг исследований состоит в выявлении квантовых свойств массивов солитонов и возможного квантового перепутывания между различными компонентами массива солитонов. С классической точки зрения, Трилло с соавторами [27] показали, что подобный массив может распространяться без деформаций или повторений. Предварительные результаты квантового рассмотрения [28] позволяют сказать, что при рассмотрении массива солитонов, такого что смежные солитоны отличаются друг от друга на фазовый угол 180° , солитоны ведут себя как независимые объекты, обнаруживая сжатие в каждом из солитонов массива аналогичное сжатию одиночных скалярных пространственных солитонов. С другой стороны, для сфазированных солитонов нестабильность модуляции (т.е. экспоненциальный рост шума) препятствует какому-либо сжатию после некоторой длины распространения.

Насколько нам известно, только в одном эксперименте продемонстрирован эффект, связанный с квантовыми флуктуациями в пространственных солитонах: для массива керровских солитонов в плоском волноводе квантовый пространственный шум приводит к дрожанию от импульса к импульсу, которое экспериментально исследовано в [29, 30]. Детальные экспериментальные исследования локального квантового шума и корреляций, которые были бы крайне интересны, трудно реализовать из-за большого числа классических флуктуаций, имеющих место в мощных лазерах, необходимых для создания солитонов.

Список литературы

1. Spalter S., Korolkova N., Konig F., Sizmann A., Leuchs G. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 786.
2. Nagasako E. M., Boyd R. W., Agrawal G. S. // Opt. Express. 1998. V. 3. P. 171.
3. Mecozzi A., Kumar P. // Quantum and Semiclass. Optics. 1998. V. 10. P. L21.
4. Treps N., Fabre C. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 033816; Europhys. Lett. 1997. V. 38. P. 335.

5. *Fabre C.* Quantum fluctuations in light beams // Les Houches Session 63 / Eds. S. Reynaud, E. Giacobino, and J. Zinn-Justin. — Amsterdam: North-Holland, 1997. — P. 181.
6. *Drummond P. D., Carter S. J.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1987. V. 4. P. 1465.
7. *Rosenbluh M., Shelby R. M.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 153;
Drummond P. D., Shelby R. M., Friberg S. R., Yamamoto Y. // Nature. 1993. V. 365. P. 307.
8. *Lantz E., Sylvestre T., Maillotte H., Treps N., Fabre C.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2004. V. 6. P. S295.
9. *Lantz E., Treps N., Fabre C., Brambilla E.* // Eur. Phys. J. D. 2004. V. 29. P. 437.
10. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики / Пер. с англ. под ред. С. А. Ахманова. — М.: Наука, 1989.
11. *Gatti A., Wiedemann H., Lugiato L. A., Marzoli I., Oppo G. L., Barnett S.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 877.
12. *Lugiato L. A., Gatti A., Wiedemann H.* Quantum fluctuations and non-linear optical patterns // Les Houches Session 63 / Eds. S. Reynaud, E. Giacobino, J. Zinn-Justin. — Amsterdam: North-Holland, 1997. — P. 431.
13. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
14. *Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H.* // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479.
15. *Кушарь Ю. С., Агравал Г. П.* Оптические солитоны: От волоконных световодов к фотонным кристаллам: Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2005.
16. *Boyd R. W.* Nonlinear optics. — San Diego: Academic Press, 1992.
17. *Cambournac C., Sylvestre T., Maillotte H., Vanderlinden B., Kockaert P., Emplit Ph., Haelterman M.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 083901.
18. *Torruelas W. E., Wang Z., Hagan D. J., VanStryland E. W., Stegeman G. I., Torner L., Menyuk C. R.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 5036.
19. *Kitagawa M., Yamamoto Y.* // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 3974.
20. *Shelby R., Levenson M., Perlmutter S., De Voe R., Walls D.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 681.
21. *Ou Z.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 2106.
22. *Olsen M., Horowicz R., Plimak L., Treps N., Fabre C.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 021803.
23. *Keller G.* Etude du bruit quantique dans un soliton spatial. Internal report (unpublished).
24. *Fabre C., Fouet J. B., Maître A.* // Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 76.
25. *Treps N., Delaubert V., Maître A., Courty J.-M., Fabre C.* // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 013820.
26. *Spalter S., Burk M., Ströbner U., Böhm M., Sizmann A., Leuchs G.* // Europhys. Lett. 1997. V. 38. P. 335.
27. *Trillo S., Wabnitz S., Kennedy T. A. B.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 1732.
28. *Lantz E.* Correlations and squeezing in a soliton array in Kerr media. Internal report (unpublished).
29. *Lantz E., Cambournac C., Maillotte H.* // Optics Express. 2002. V. 10. P. 942.
30. *Fanjoux G., Lantz E., Devaux F., Maillotte H.* Influence of the spatio-temporal coherence of the light on the jitter of spatial soliton arrays propagating in a non instantaneous medium waveguide. 2005.

Литература, добавленная при переводе

31. *Белинский А. В., Чиркин А. С.* Квантовая теория нелинейного распространения шредингеровских солитонов: сжатые состояния и субпуассоновская статистика // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. С. 407.
32. *Чиркин А. С.* Квантовая теория оптических солитонов // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 70. Р. 633.
33. *Ахманов С. А., Вислоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
34. *Сухоруков А. П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. — М.: Наука, 1988.
35. *Ахмедиев Н. Н., Анкевич А.* Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки. — М.: Физматлит, 2003.
36. *Карамзин Ю. Н., Филиппук Т. С., Сухоруков А. П.* О новом классе связанных солитонов в диспергирующей среде с квадратичной нелинейностью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астроном.». 1978. Т. 19, вып. 4. С. 91–98.
37. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.* Нелинейное взаимодействие дифрагирующих световых пучков в среде с квадратичной нелинейностью: взаимофокусировка и ограничение эффективности оптических преобразователей частоты // Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 734.
38. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.* О взаимофокусировке мощных световых пучков в средах с квадратичной нелинейностью // ЖЭТФ. 1975. Т. 60. С. 834.

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В РЕЗОНАТОРНЫХ СОЛИТОНАХ

Жак-Лука Онно, Джон Джефферс

10.1. Введение

Пространственные структуры в протяженных нелинейных оптических устройствах могут демонстрировать важные квантовые особенности. Квантовые изображения в вырожденных параметрических генераторах света (ВПГС) проявляют квадратурное сжатие в ближней зоне [1, 2] и корреляции Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) в дальней зоне [3]. Эти эффекты обусловлены генерацией перепутанных фотонов в процессе параметрического преобразования частоты вниз в оптическом резонаторе. Обзор этих эффектов можно найти в [4, 5].

Хотя детерминированные пространственные структуры широко распространены во многих областях науки, таких как гидродинамика, морфогенез, наука о численности биологических видов, распределенные химические реакции и другие, связь квантовых флуктуаций и нелинейных пространственных структур в оптике можно наблюдать даже при комнатной температуре. Квантовые изображения являются управляемыми шумом предшественниками пространственных картин, наблюдаемых выше порога, но вызванных квантовыми флуктуациями источников света, таких как ВПГС, ПГС [6], керровские резонаторы [7] и резонаторные генераторы второй гармоники [8].

Недавний интерес к пространственно-временным структурам фотонных устройств с резонаторной геометрией связан с возможностью создания локализованных состояний, также известных как оптические «дыры от пуль» [9] или резонаторные солитоны (РС) [10]. Одним из главных достоинств этих структур по сравнению с пространственно протяженными, такими как картины, является возможность использовать их в качестве элементов для обработки информации и оптической памяти [10]. Недавние эксперименты по наблюдению РС в полупроводниковых устройствах [11] еще больше усилили интерес к фундаментальным аспектам этих структур.

Целью данной главы является обзор некоторых особенностей РС на основе модели ПГС с учетом квантовых флуктуаций¹⁾. Квантовые флуктуации могут отвечать за рост массивов РС [12, 13] и за появление заметных квантовых флуктуаций в ближней и дальней зонах [14] локализованных состояний.

¹⁾ Формирование резонаторных солитонов на основе классического подхода рассматривается, например, в [28–30].

Многие из эффектов, обсуждаемых ниже, можно встретить и в других нелинейных оптических резонаторных устройствах ¹⁾, таких как керровский резонатор, резонатор с насыщающимся поглотителем или резонаторный генератор второй гармоники. Мы ограничимся описанием ПГС, и, в частности, без потери общности, ВПГС, поскольку в этом случае квантовые корреляции усиливаются за счет генерации бифотонов.

Глава содержит четыре раздела. В разделах 10.2 и 10.3 описываются РС в ВПГС и отдельно рассматриваются квантовые флуктуации в моделях ВПГС. Раздел 10.4 посвящен росту массивов РС, вызываемому квантовыми флуктуациями. В разд. 10.5 рассматриваются квантовые квадратуры и корреляции РС в ближней и дальней зонах, а в разд. 10.6 представлено заключение и обсуждаются пути дальнейшего развития.

10.2. Резонаторные солитоны в вырожденном параметрическом генераторе света

Классические уравнения для средних полей ВПГС с фазовым синхронизмом, когда для обоих полей — сигнального и накачки — выполнены условия резонанса (см. рис. 10.1), имеют вид [15]:

$$\begin{aligned}\partial_t A_0 &= \Gamma [-A_0 + E - A_1^2] + \frac{ia}{2} \nabla^2 A_0, \\ \partial_t A_1 &= -A_1 - i\Delta_1 A_1 + A_0 A_1^* + ia \nabla^2 A_1.\end{aligned}\tag{10.1}$$

Здесь A_0 и A_1 — медленно меняющиеся амплитуды поля накачки и сигнального поля, соответственно; время нормировано на время жизни сигнального фотона в резонаторе; $\Gamma = \gamma_0/\gamma_1$ — отношение скоростей затухания

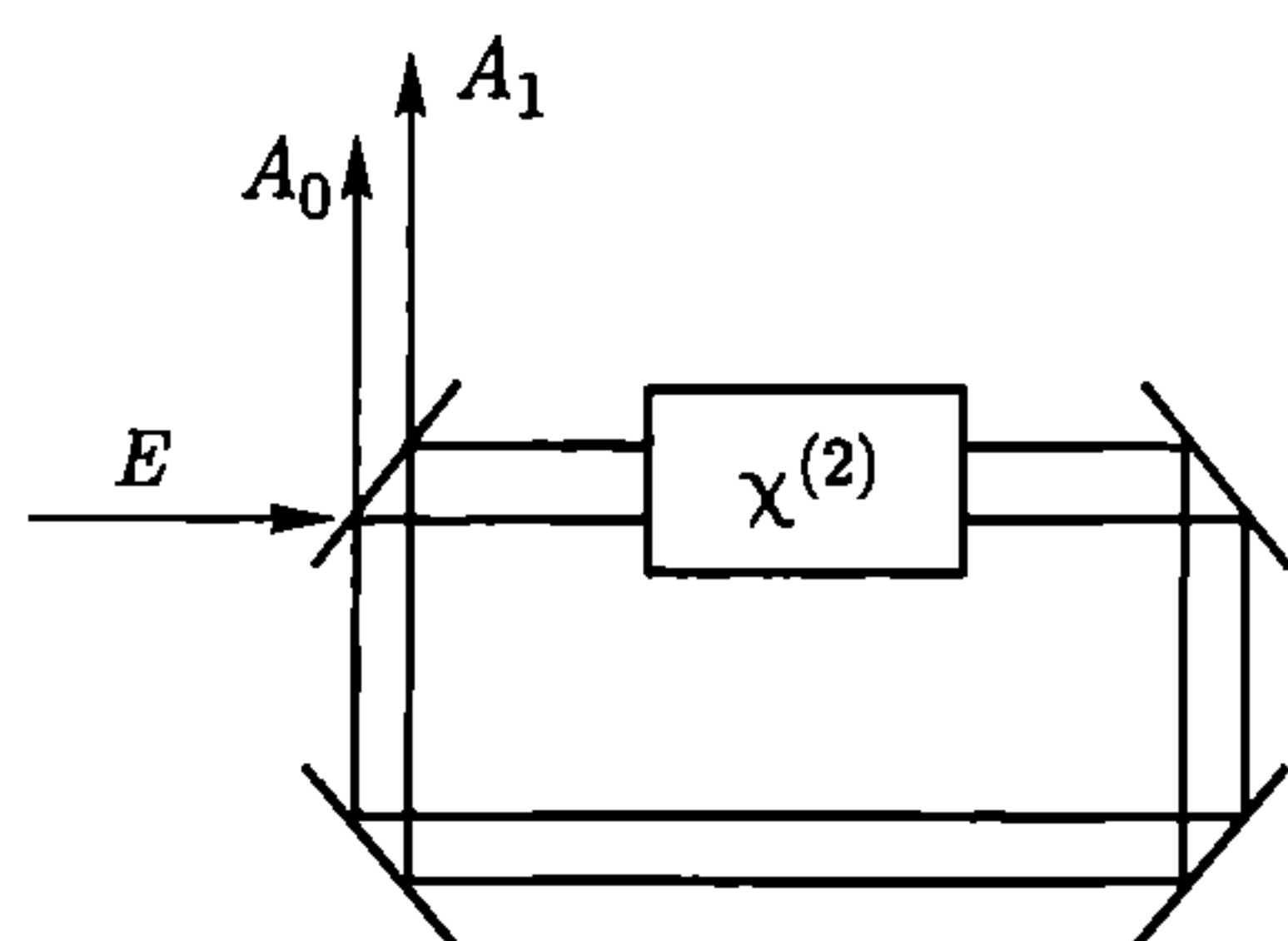


Рис. 10.1. Схематическое изображение ВПГС с двухчастотным резонансом

поля накачки и сигнального поля в резонаторе; E — амплитуда внешнего поля накачки (здесь предполагается, что эта величина вещественна); Δ_1 — отстройка сигнального поля; $a = c/\gamma_1 k_z$ — дифракционный параметр, где c — скорость света и k_z — продольный волновой вектор поля накачки. Для удобства мы предполагаем, что отстройка накачки равна нулю. Поскольку в дальнейшем отношение скоростей затухания полей в резонаторе будет меняться, уравнения записаны без обычного нормирования дифракционных коэффициентов на γ_0 и γ_1 [15]. Оператор Лапласа

$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ сводится к дифференцированию $\partial^2/\partial x^2$ только по одной переменной в поперечном направлении (одномерная задача).

10.2.1. Пространственные уравнения и доменные стенки с осциллирующими хвостами. При одномерной постановке задачи все стационарные

¹⁾ См., например, работу [31].

состояния (устойчивые и неустойчивые) должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим пространственные производные. Для ВПГС уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_0 &= \left(\frac{2i\Gamma}{a} \right) (-A_0 + E - A_1^2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_1 &= \left(\frac{i}{a} \right) \left(-A_1 - i\Delta_1 A_1 + A_0 A_1^* \right).\end{aligned}\tag{10.2}$$

Выше порога генерации сигнального поля при положительной и нулевой отстройках уравнения ВПГС допускают два стационарных однородных решения [16]:

$$\begin{aligned}A_0^s &= E - (A_1^s)^2, \quad A_1^s = \pm \left(\frac{EI_s}{1 + I_s + i\Delta_1} \right)^{1/2} \equiv \sigma e^{i\theta}, \\ I_s &= |A_1^s|^2 = \sigma^2 = \sqrt{E^2 - \Delta_1^2} - 1,\end{aligned}\tag{10.3}$$

где σ и θ — модуль и фаза A_1^s соответственно, и

$$\sin(\beta - 2\theta) = \left(\frac{\sigma^2}{2E} \right) \sin \beta, \quad \beta = \arg(1 - i\Delta_1).\tag{10.4}$$

В фазовом пространстве уравнений (10.2) однородные состояния соответствуют двум фиксированным точкам. Для случаев, представляющих здесь интерес, Трилло с соавторами [16] численно обнаружили, что решение, отвечающее доменной стенке (ДС) и связывающее два однородных состояния (10.3), устойчиво при одномерном рассмотрении. Такие решения являются естественными солитонами, принадлежат к широкому классу РС и отвечают гетероклиническим связям между двумя фиксированными точками в фазовом пространстве полей и их пространственных производных. Пример проекции этих гетероклинических связей показан на рис. 10.2. Решения стационарных уравнений (10.2) можно найти численно с любой требуемой точностью [17]. Отметим, что решения системы уравнений (10.2) почти всегда расходятся на бесконечности (т. е. не соответствуют физическим интенсивностям полей), что нетрудно установить, исследуя якобиан системы в окрестности общей фазовой точки. Таким образом, примечательно, что эти уравнения допускают решения с конечными интенсивностями, начинающихся и заканчивающихся в фиксированных точках, а именно — гетероклиническую и гомоклиническую орбиты, описываемые в этой главе.

10.2.2. Резонаторные солитоны, формируемые захваченными доменными стенками. Соседние пары доменных стенок в стационарных условиях представляют гомоцентрические траектории в фазовом пространстве уравнений (10.2): поля начинаются около одного однородного решения при больших отрицательных значениях x и заканчиваются на том же самом однородном решении при больших положительных x . При достаточно большом разделении

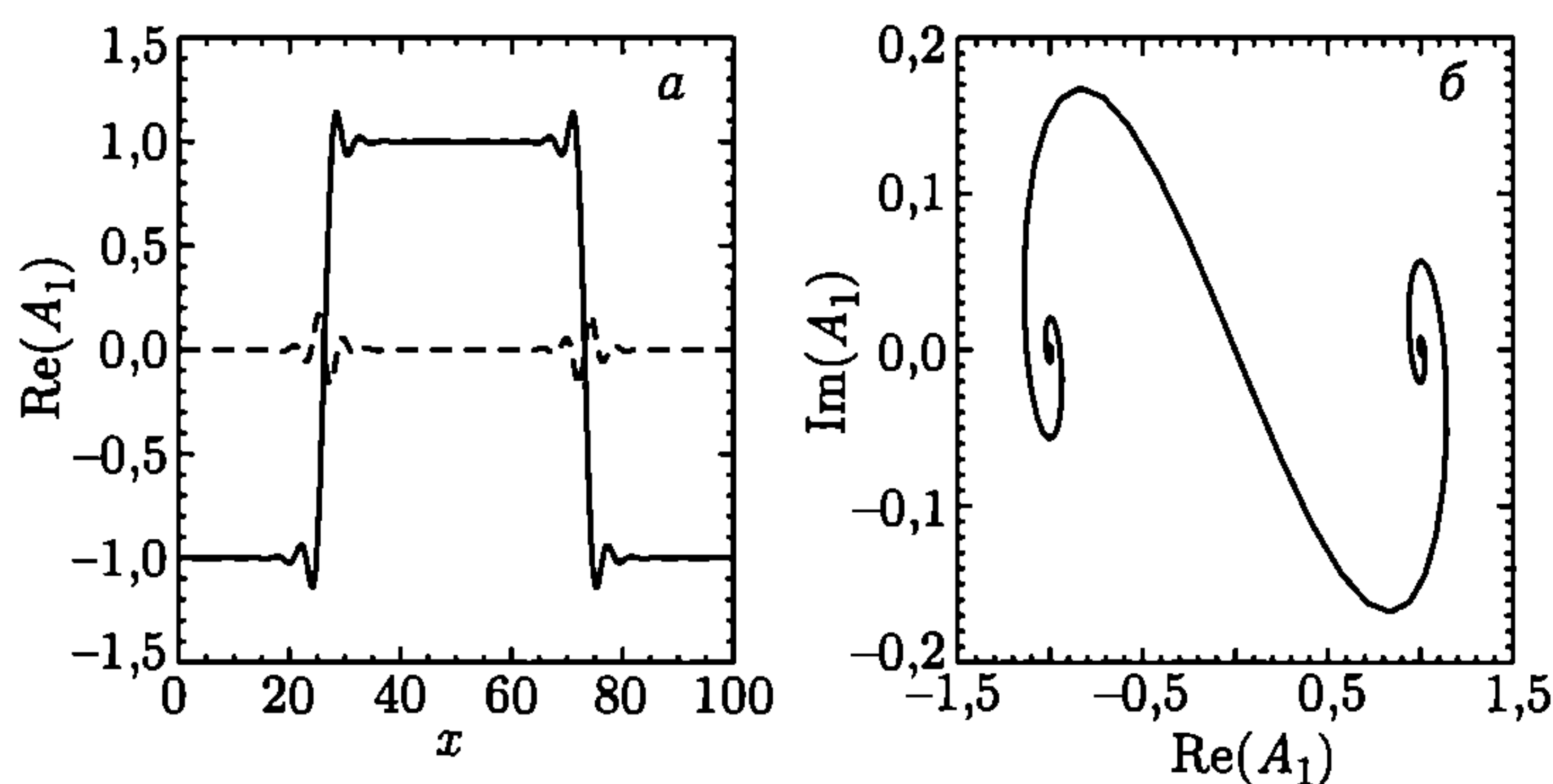


Рис. 10.2. Гетероклиническое решение, состоящее из пары доменных стенок для $\Delta_1 = 0,0$, $a = 0,5$, $E = 2,0$ и $\Gamma = 1,0$; а) вещественная (сплошная линия) и мнимая (штриховая пунктирная линия) части сигнального поля в зависимости от поперечной координаты x в ВПГС; б) пара ДС, отвечающая случаю (а), построенная на фазовой плоскости

каждая ДС существенно независима: расстояние между ними может быть без труда увеличено или уменьшено.

Рассмотрим якобиан уравнений (10.1) при стационарном решении, состоящем из пары хорошо разделенных ДС. Такой якобиан имеет два нулевых собственных значения: одно соответствует полной трансляционной инвариантности решения, а другое — относительному смещению двух ДС. Наличие двух нулевых собственных значений сохраняется до тех пор, пока ДС не сближаются настолько, что их осциллирующие хвосты начинают взаимодействовать. Если это происходит, то возникает эффект захвата, допускающий только дискретный набор стационарных разделенных ДС. На рис. 10.3, а–е приведены некоторые примеры результирующих структур вместе с наибольшими ненулевыми собственными значениями уравнений, линеаризованных около каждого из решений. При любых начальных условиях с данным расстоянием между ДС с осциллирующими хвостами, это расстояние убывает и стремится к наименьшему для этих равновесных значений. Процесс уничтожения смежных ДС не наблюдается.

Общее стационарное решение A_1^s состоит из орбитальной траектории, проходящей вокруг устойчивых однородных состояний, вещественная часть которой равна нулю при четных номерах точек $[x_1, \dots, x_{2n}]$, поскольку используются периодические граничные условия. Дефект ядер расположен в точках $x_n = x_{n-1} + s_j$, где n, j — целые числа, давая начало огромному количеству возможных устойчивых распределений дефектов. Заметим, что дефектные распределения, проявляя значительную степень периодичности (с возможными периодами, равными удвоенному расстоянию s_j), составляют очень малую часть от общего числа. Начиная с неустойчивых (нулевое сигнальное поле) однородных решений и добавляя случайное возмущение, можно получить различные конечные состояния с произвольным числом дефектов. Результирующие устойчивые одномерные структуры содержат в среднем широкий диапазон пространственных длин волн, что приводит к появлению непрерывного фона в фурье-пространстве из-за того, что интервалы s_j непропорциональны друг другу. Можно провести аналогию между этим поведением и времен-

ным хаосом, поскольку при $\partial_t = 0$ уравнения (10.2) можно рассматривать как описывающее динамическую систему, в которой изменяющееся значение x играет роль времени. По этой причине рассмотренные непериодичные (неупорядоченные) устойчивые структуры были названы предыдущими авторами «пространственным хаосом» [18, 19]. На рис. 10.4 показан характерный пример детерминистического устойчивого неупорядоченного решения и его пространственный спектр мощности. Решения этого вида являются характерными в пространстве параметров (E, Γ) . Изолированные ДС и захваченные локализованные структуры ДС, изображенные на рис. 10.3, являются интересными для ВПГС резонаторными солитонами. Они сохраняются и при обобщении задачи на двумерную в поперечном направлении, хотя порог их наблюдения может измениться из-за эффектов локального искривления [17].

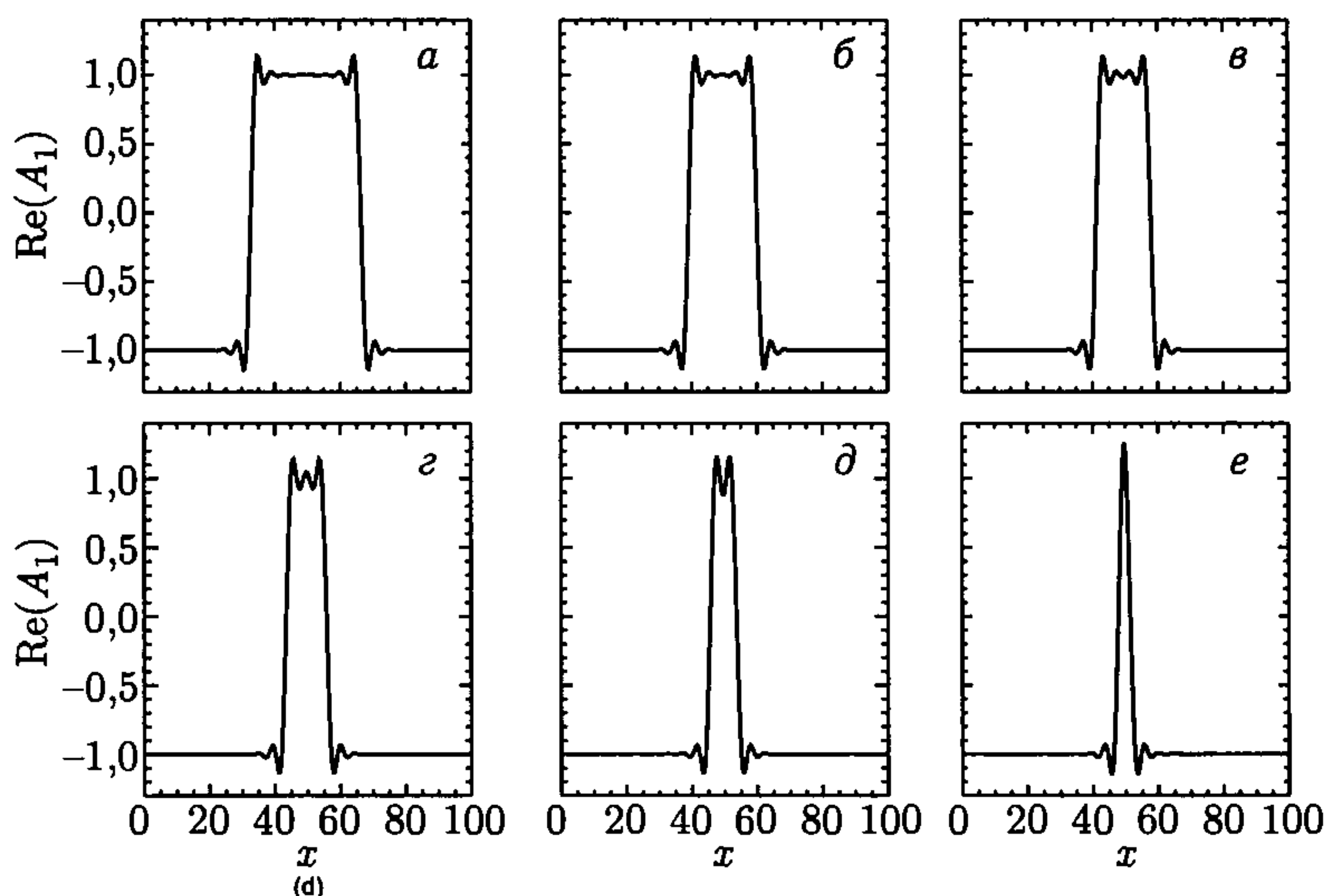


Рис. 10.3. Стационарные пары ДС, разделенные различными интервалами. Все показанные решения стационарны и устойчивы. Параметры соответствуют рис. 10.2. Наибольшие ненулевые собственные значения уравнений, линеаризованных в окрестности этих решений равны: а) $-0,0000003685$; б) $-0,0001319$; в) $-0,0009383$; г) $-0,006748$; д) $-0,0511$; е) $-0,4131$

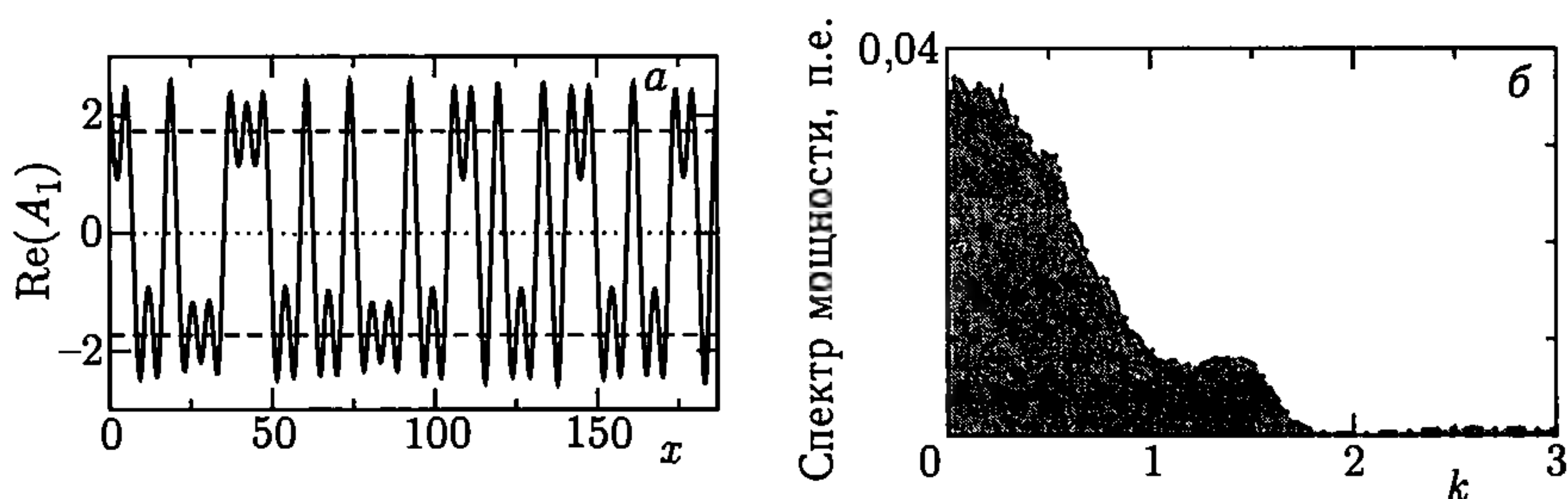


Рис. 10.4. а) Характерное асимптотическое распределение вещественной части сигнального поля в отсутствии флуктуаций при $E = 4$ и $\Gamma = 0,2$. б) Пространственный спектр мощности, усредненный по многим реализациям, начинающимся с неустойчивого нулевого состояния

10.3. Квантовые флуктуации в ВПГС

Открытые квантовые оптические системы часто моделируют, используя квантовые уравнения Ланжевена. Это дифференциальные уравнения для поля с производной первого порядка по времени, включающие стохастические члены, отвечающие шуму из-за взаимодействия системы со своим окружением. Принцип неопределенности Гейзенберга ограничивает минимальное значение шума. В этом разделе мы представим обзор методов построения уравнений Ланжевена, содержащих такие стохастические источники шума, и продемонстрируем два примера ВПГС с поперечными эффектами.

Уравнения Ланжевена выводятся из основного (управляющего) уравнения для оператора матрицы плотности открытой системы в предположении, что матричные элементы находятся в когерентном состоянии [20]. Это превращает основное уравнение в уравнение Фоккера–Планка (ФП) для квазивероятности с распределением, аналогичным распределению вероятности в классической физике. Затем уравнение ФП можно преобразовать в стохастическое уравнение Ланжевена с шумовыми членами, ограниченными квантовым пределом. Для одной системы можно записать несколько разных уравнений ФП для квазивероятностей, ассоциированных с различным упорядочиванием операторов. Двумя наиболее распространенными являются уравнение для функции Вигнера, связанное с симметричным упорядочиванием, и уравнение для Q-функции (функции Хусими), связанное с антинормальным порядком операторов [21]. Вывод уравнения Ланжевена может оказаться затруднительным, поскольку уравнение ФП может содержать нелинейные члены, производные третьего порядка или отрицательные коэффициенты диффузии. На практике производными высоких порядков часто пренебрегают, получая уравнение Ланжевена, связанное с описанием известным как «стохастическая электродинамика».

10.3.1. Представление Вигнера. В оптических резонаторах конечной поперечной протяженности подобную процедуру можно использовать, чтобы записать уравнения Ланжевена из уравнений Фоккера–Планка для квазивероятностных функционалов, в которых поле приписывается каждой точке в поперечной плоскости. Система уравнений для ВПГС в представлении Вигнера имеет вид [2, 22]:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_0(x) &= \Gamma[-\alpha_0 + E] - \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha_0 + \sqrt{\frac{2\Gamma}{n_{th}}} \zeta_0, \\ \dot{\alpha}_1(x) &= -\alpha_1 - i\Delta_1 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_1^* + i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha_1 + \sqrt{\frac{2}{n_{th}}} \zeta_1,\end{aligned}\tag{10.5}$$

где $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$ — медленная амплитуда поля накачки и сигнального поля соответственно. Теперь использование греческих индексов будет указывать на флуктуационную природу величин. n_{th} — число фотонов на пороге генерации, удобный параметр для описания нелинейности системы, ζ_0 и ζ_1 — ланжевенские источники шума для моды накачки и сигнальной моды, соответствен-

но, удовлетворяющие условию: $\langle \zeta_i(x, t) \zeta_j^*(x', t') \rangle = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta(x - x') \delta(t - t')$.

В этих уравнениях, как и раньше, отстройка для поля накачки равна нулю.

Вигнеровский функционал позволяет построить уравнения Ланжевена, которые можно использовать для вычисления симметрично упорядоченных ожидаемых значений. Это особенно полезно, когда обсуждается сжатие, поскольку четырехканальная схема гомодинного детектирования сжатого света относится к симметричным схемам приема. Однако существуют проблемы, связанные с использованием функции (функционала) Вигнера в нелинейной оптике. Для поля накачки в ПГС имеет место пороговое значение мощности, ниже которого сигнальное поле не генерируется, но свет сжат. Если приближаться к пороговому значению снизу, то члены высоких порядков в уравнении ФП становятся очень большими и пренебречь ими невозможно.

10.3.2. Q-представление. Чтобы обойти указанную трудность, используют уравнения Ланжевена для сигнального поля и поля накачки в Q-представлении. Опуская детали, отсылаем читателя к работе [14], где представлено подробное изложение. Для $\Gamma = 1$ уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_0(x) &= - \left[1 - i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \alpha_0(x) + E - \frac{1}{2} \alpha_1^2(x) + \sqrt{\frac{2}{n_{th}}} \xi_0, \\ \dot{\alpha}_1(x) &= - \left[1 - 2i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \alpha_1(x) + \alpha_0(x) \alpha_1^*(x) + \sqrt{\frac{2}{n_{th}}} \xi_1,\end{aligned}\tag{10.6}$$

где ξ_0 — ланжевенский источник шума, удовлетворяющий условию: $\langle \xi_0(x, t) \xi_0^*(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$. Источник шума для сигнального поля фазово-чувствителен и также зависит от значения поля накачки:

$$\xi_1(x, t) = \left[\frac{-\alpha_{0I}}{2\sqrt{2 + \alpha_{0R}}} + \frac{i}{2} \sqrt{2 + \alpha_{0R}} \right] \Phi(x, t) + \sqrt{\frac{1 - |\alpha_0|^2/4}{2 + \alpha_{0R}}} \Psi(x, t),\tag{10.7}$$

где $\alpha_0 = \alpha_{0R} + i\alpha_{0I}$; Φ и Ψ — источники шума с ожидаемыми значениями аналогичными значениям для флуктуаций накачки ξ_0 . Описание с помощью Q-функции справедливо при условии, что величина поля накачки остается вдвое меньше порогового значения для генерации сигнального поля, т.е. теория справедлива и для нелинейного режима. Этот подход успешно использовался для вычисления квантовых корреляций как ниже, так и выше порога генерации, где в сигнальном поле возникают картины [14].

10.4. Массивы резонаторных солитонов, индуцированные квантовыми флуктуациями

В этом разделе мы исследуем влияние квантовых флуктуаций на распределения ДС и дефектов в сигнальном поле. В частности, мы выделим изменение поведения пространственного спектра, связанное с уменьшением

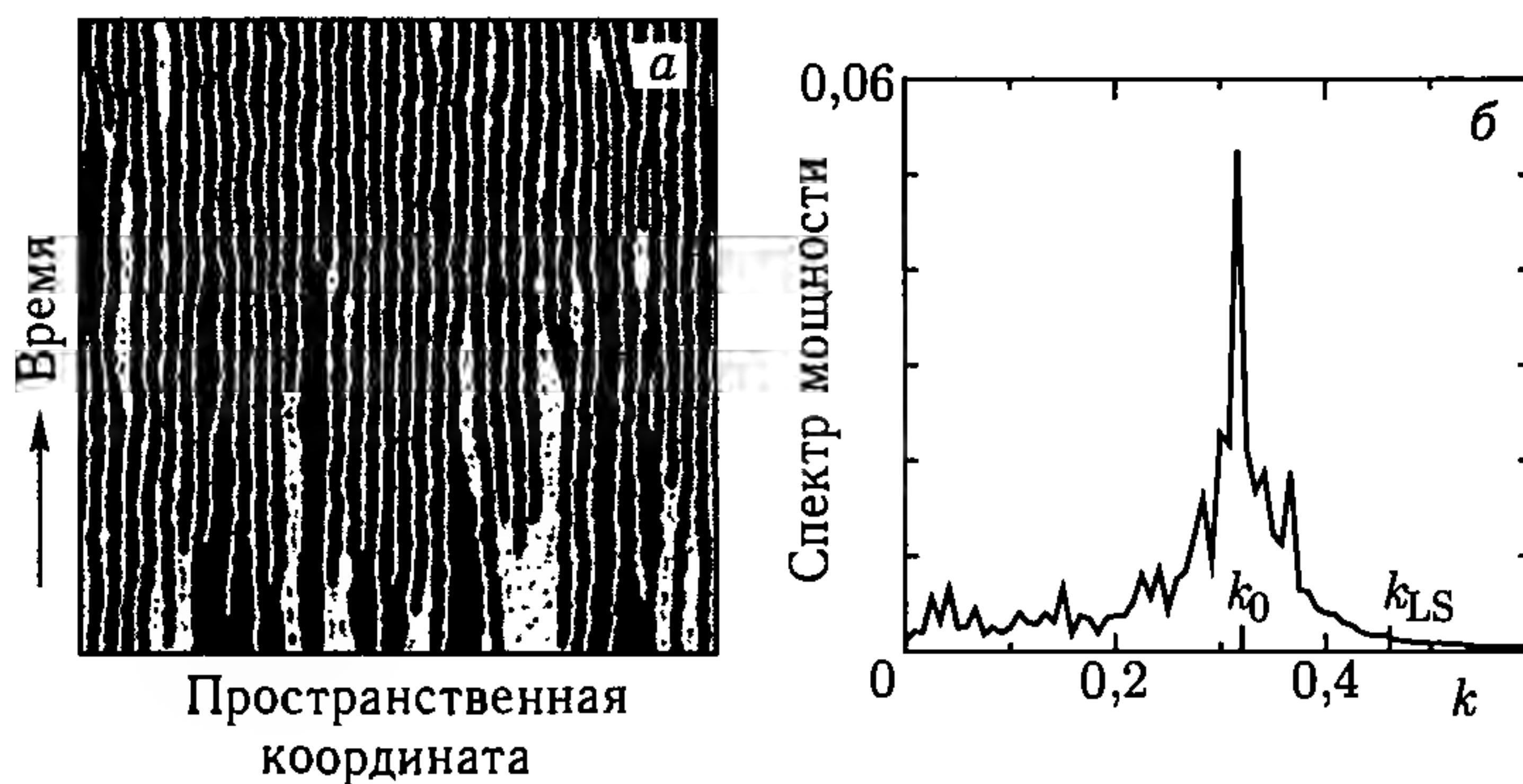


Рис. 10.5. а) Временное развитие квантовых флуктуаций действительной части выходного сигнального поля при $\Delta_1 = 0$, $E = 1,5$, $\Gamma = 0,02$ и $n_{th} = 1000$. Массивы резонаторных солитонов отчетливо видны после окончания переходных процессов. б) Фурье-спектр пространственной автокорреляционной функции $C[\text{Re}(\alpha_1)]$, усредненный по времени после того, как установилось равновесное состояние. k_0 — волновой вектор массивов РС; k_{LS} — наибольшее собственное значение при линейном анализе на устойчивость однородного решения вдали от $k = 0$

отношения Γ резкостей резонаторов для поля накачки и сигнального поля. Рассматривая (10.5) в случае малых Γ , видно, что флуктуации поля накачки становятся все менее значимыми. В этом случае квантовое поведение ВПГС описывается «классическим» уравнением для поля накачки, аналогичным первому уравнению системы (10.1), и уравнением ланжевеновского типа для α_1 , аналогичным второму уравнению в (10.5) [13, 23].

На рис. 10.5 показано одномерное развитие сигнального поля под действием квантовых флуктуаций при $\Gamma = 0,02$, $E = 1,5$ и $n_{th} = 1000$, полученное с помощью уравнений в представлении Вигнера. При построении графика локальные флуктуации отфильтрованы введением порога генерации при $\text{Re}(\alpha_1) = 0$, так что темные (светлые) области на рис. 10.5 отвечают положительным (отрицательным) значениям $\text{Re}(\alpha_1)$. Кроме того, мы исключили те дефектные пары, расстояние между которыми меньше определенного критического значения, поскольку они должны исчезнуть [12]. После переходного режима, длительность которого увеличивалась экспоненциально с ростом n_{th} , мы достигли режима стационарного равновесия, при котором среднее число дефектов сохраняется постоянным. Это соответствует балансу скоростей появления и исчезновения пар ДС. Подчеркнем, что все величины, рассмотренные ниже, получены в равновесном режиме.

При малых Γ в ближней зоне отчетливо видно большое число захваченных РС. Они формируют массивы, которые «дрожат» под действием флуктуаций. Длины массивов произвольны и пропорциональны размеру солитона z_0 . Средняя длина массивов увеличивается с ростом отношения резкостей резонаторов для поля накачки и сигнального поля. Например, на рис. 10.5, а эта средняя длина больше, чем поперечный размер области моделирования. Присутствие массивов РС отражается в дальней зоне, где появляется огромный пик при значении k_0 . Спектр мощности, изображенный на рис. 10.5, б, это ничто другое как фурье-преобразование пространственной автокорреляцион-

ной функции $C[g(x, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x + x', t) h^*(x', t) dx'$, усредненной по времени.

В нашем случае $h = \text{Re}(\alpha_1)$. Средний размер массивов РС равен обратной скорости распада усредненной пространственной корреляционной функции. Большой пик при значении k_0 в спектре мощности говорит о наличии значительных пространственных корреляций на расстояниях порядка s_0 .

Не следует путать эти массивы с картинками, возникающими выше порога модуляционной неустойчивости, поскольку они формируются не за счет неустойчивости данного волнового вектора, а вследствие последовательного захвата локализованных структур. Описанное здесь явление аналогично индуцированному шумом подавлению пространственного хаоса, представленному в [12], но целиком связано теперь с квантовыми флуктуациями. Массивы РС в сигнальной интенсивности в пределе малых Γ и соответствующий внеосевой пик в дальней зоне являются новыми «квантовыми структурами», индуцированными квантовым шумом после окончания переходных процессов. Заметим, что в отсутствие квантовых флуктуаций поле в дальней зоне является широкополосным (см. рис. 10.4) и не проявляет никаких корреляций при любых значениях волнового вектора. В разд. 10.5 будет показано, что фотонный пик при k_0 отражает важные крупномасштабные квантовые корреляции.

На практике квантовые флуктуации могут индуцировать массивы РС в одномерной конфигурации ВПГС. На рис. 10.6 показана протяженность переходных процессов до достижения равновесного режима в зависимости от $n_{\text{th}}\Gamma$, параметра, который равен обратной интенсивности флуктуаций и зависит от длины волны накачки, дифракции в резонаторе, нелинейности среды и резкостей обоих резонаторов. Важно отметить, что для сохранения приближения среднего поля значение Γ не может быть выбрано ниже, например, 10^{-3} [24], а большие значения n_{th} могут привести к нежелательно долгим переходным процессам. Оставаясь над порогом, но близко к нему, генерируемое сигнальное поле также помогает получить оптимальный баланс параметров, поэтому мы выбрали рабочий диапазон $1,5 \leq E \leq 3$. Важно заметить, что описанная здесь квантовая структура принципиально отличается от квантовых изображений, наблюдаемых около модуляционных неустойчивостей, рассмотренных для ВПГС [1, 2], для ПГС [6], для керровских резонаторов [7] и для внутрирезонаторной генерации второй гармоники [8]. В этих случаях квантовые изображения ассоциируются с шумовыми предшественниками картин, которые формируются выше модуляционной неустойчивости. Это значит, что если «выключить» шумы после формирования квантовых изображений, пик в дальней зоне при

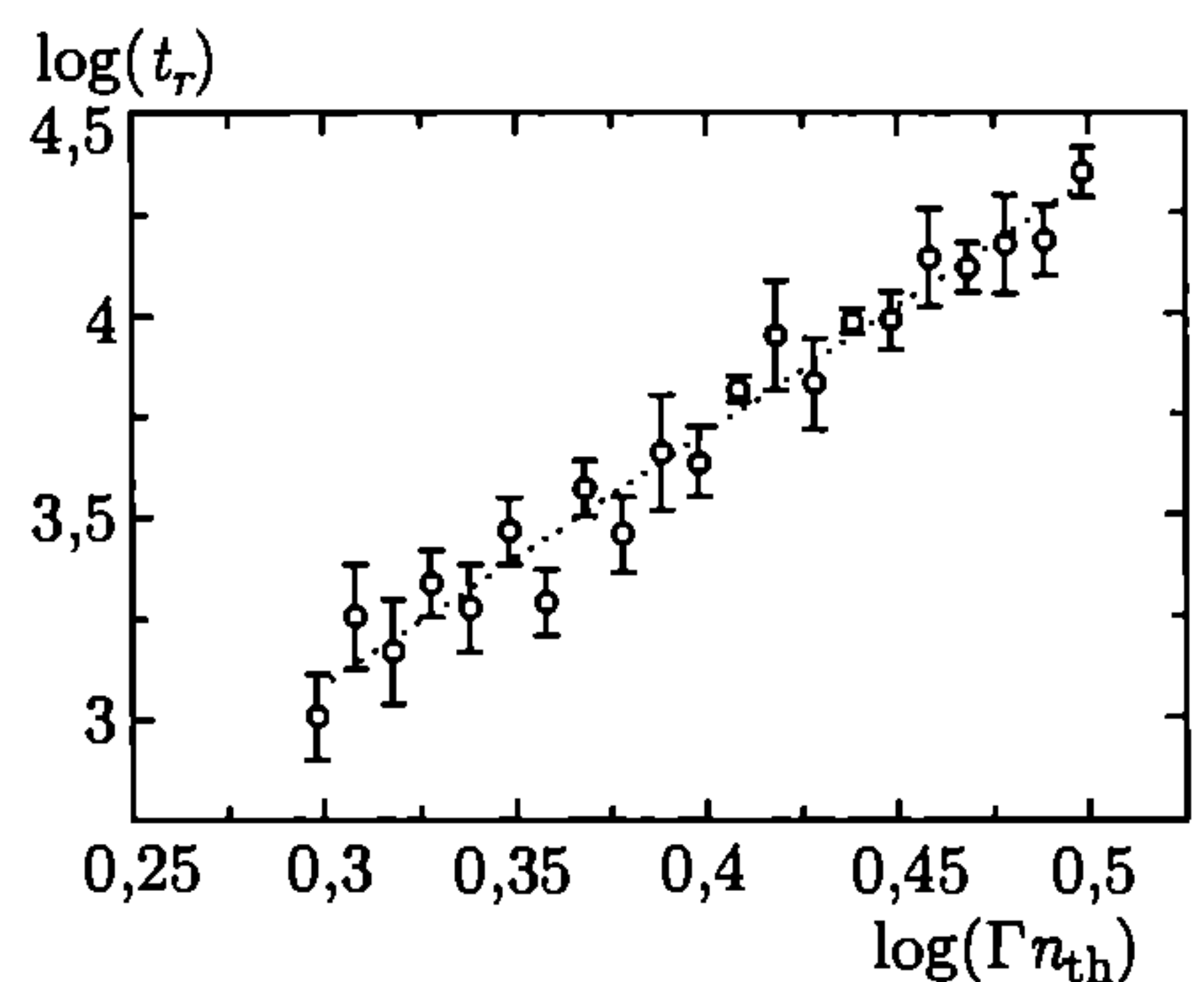


Рис. 10.6. Длительность переходных процессов t_r до достижения равновесного режима в зависимости от Γn_{th} в логарифмической шкале при $E = 2,6$

критическом значении волнового вектора k_c в картинах, образовавшихся над порогом генерации, исчезнет. В нашем случае массивов РС, если удалить шумы после того, как массивы сформировались под действием квантовых флуктуаций, массивы будут сохраняться бесконечно долго, поскольку они являются одним из возможных устойчивых стационарных решений для системы. В этой связи важно сказать, что рассматриваемые массивы РС индуцируются, но не поддерживаются квантовыми флуктуациями.

Чтобы объяснить, почему квантовые флуктуации выделяют массивы РС только при малых Γ , хотя устойчивые однородные решения существуют также и при больших Γ , представим простое рассуждение, предложенное в [12]. В пределе малых Γ локальные осцилляции ДС с захваченными хвостами имеют большую амплитуду [17]. Пусть РС с одним пиком вызван флуктуациями, тогда вероятность появления другого солитонного пика вблизи от первого пространственно неоднородна из-за наличия «хвостов» осцилляций. В частности, флуктуации много меньше, чем необходимые для возбуждения солитона с одним пиком из однородного фона, способны возбудить новый пик в окрестности больших амплитудных осцилляций солитонных «хвостов». Это было определено при поиске неустойчивого односолитонного решения, которое обеспечивает критическое значение для таких возбуждений. Как показано в [12], в пределе малых Γ критические амплитуды для уничтожения солитонных пиков больше, чем амплитуды для их возбуждения, поэтому равновесная плотность дефектов больше. Следовательно, среднее расстояние между дефектами мало, а поскольку оно не может быть меньше, чем s_0 (характерный размер солитона), формируются массивы солитонов.

Эвристическое рассуждение, приведенное выше объясняет ведущую роль параметра Γ в случайном выборе итоговых решений. В частности, условие малости Γ имеет двойное значение: оно увеличивает и роль шума сигнала и размер локальных осцилляций солитонных «хвостов». В соответствии с приведенным рассуждением, при увеличении Γ средний размер массивов РС уменьшается, и одновременно появляются более крупные участки однородных решений. Это значит, что пик в дальней зоне постепенно уменьшается и в конечном счете исчезает с ростом Γ . Заметим, однако, при увеличении Γ справедливость квантовой модели, основанной на классическом уравнении для накачки, становится спорной, поскольку более невозможно пренебрегать флуктуациями поля накачки [23]. Используя уравнения (10.5) и увеличивая Γ , мы наблюдаем пропорциональное уменьшение размера массивов РС и полное их исчезновение при значениях Γ заметно ниже 1, что приводит к динамике с доминирующими ДС, совершающими случайные блуждания [12].

10.5. Квантовые особенности резонаторных солитонов в ближней и дальней зонах

Теперь обратимся к поведению квантовых флуктуаций внутри ДС и РС в ВПГС. Мы разделим наше рассмотрение на случаи измерения в ближней и дальней зонах.

10.5.1. Квантовые корреляции резонаторных солитонов в ближней зоне. Рассмотрим выходное поле одномерного ВПГС выше порога генерации ($E = 1,2$) в широкой поперечной области и сравним квадратурные компоненты флуктуаций, приходящих из центра ДС с флуктуациями в однородной части поперечной плоскости. На рис. 10.7 показано усредненное распределение действительной части резонансного сигнала поля $A_1 = \langle \alpha_1 \rangle$ при $E = 1,2$, а также размер и положения двух детекторов в ближней зоне. Первое положение находится точно по центру ДС, а второе — в однородной области.

Вычислим нормально упорядоченную корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &= \langle : \Lambda_\phi \Lambda_\phi : \rangle, \\ \Lambda_\phi &= (\alpha_1 - \langle \alpha_1 \rangle) e^{-i\phi} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

где угловыми скобками $\langle . \rangle$ обозначено усреднение по времени после завершения всех переходных процессов, а α_1 получена путем моделирования уравнений Ланжевена (10.5). Численное моделирование уравнений (10.6) в Q-представлении изложено в [25]. Результаты расчета Γ_ϕ показаны на рис. 10.8.

Квадратурные корреляции шума в РС наглядно демонстрируют усиление амплитуды шума при некоторых значениях ϕ фазы квадратуры в сравнении с амплитудой однородного решения [26]. Это усиление очень велико (составляет почти три порядка в представленном на рис. 10.8 случае) и ведет к образованию эллипсов сжатия с огромной асимметрией. Значительная величина сжатия присутствует при детектировании в ближней зоне фотонов, приходя-

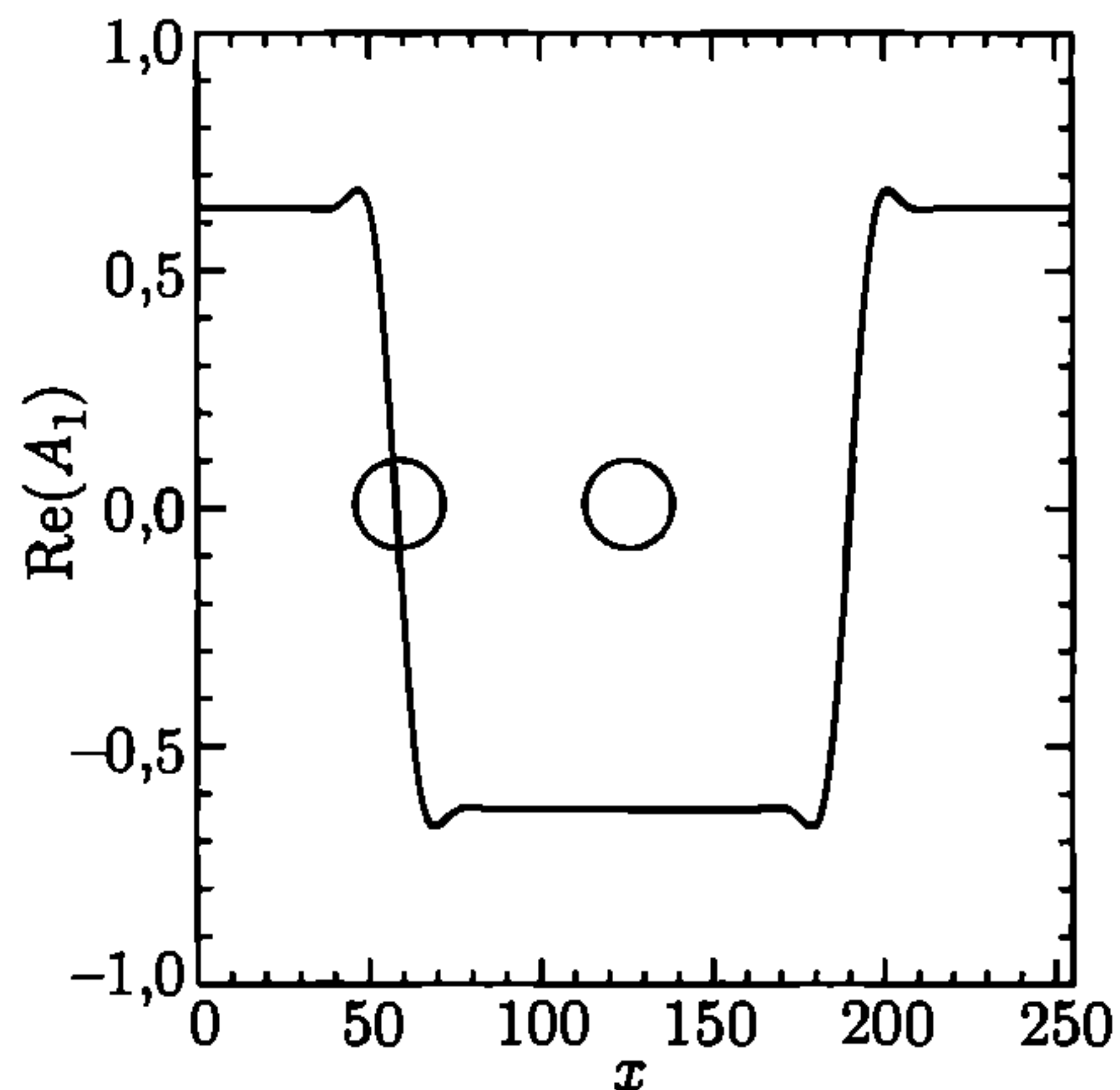


Рис. 10.7. Усредненное поперечное распределение $\text{Re}(A_1) = \langle \text{Re}(\alpha_1) \rangle$ при $E = 1,2$. Кружки соответствуют двум положениям детекторов квадратур в ближней зоне

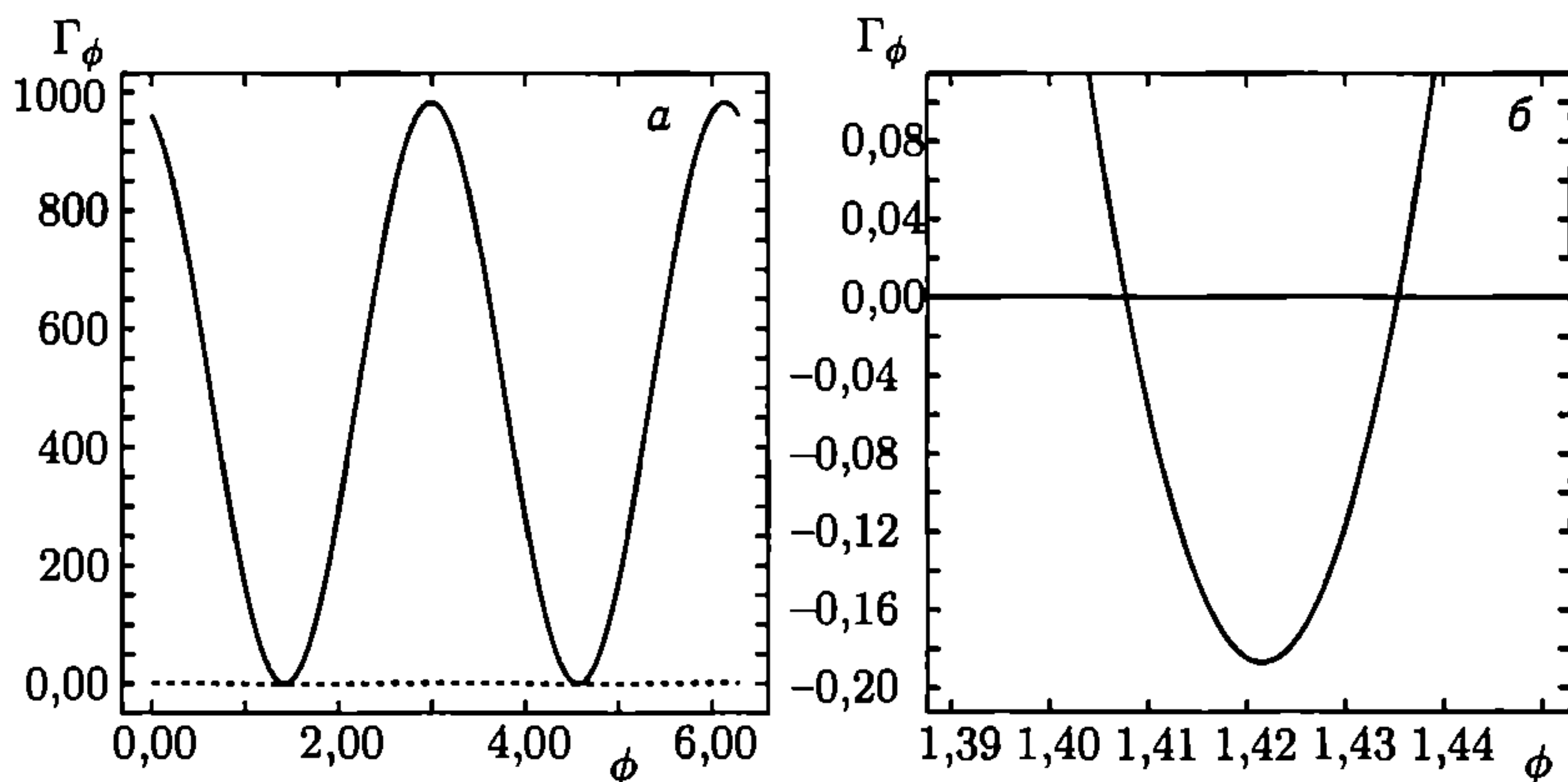


Рис. 10.8. а) Квадратурные корреляции Γ_ϕ в ближней зоне для детектора, расположенного на ДС (сплошная линия) и в области однородного решения (пунктирная линия) при $E = 1,2$. б) Усиление Γ_ϕ для ДС. Сплошная линия на нуле отвечает уровню дробового шума

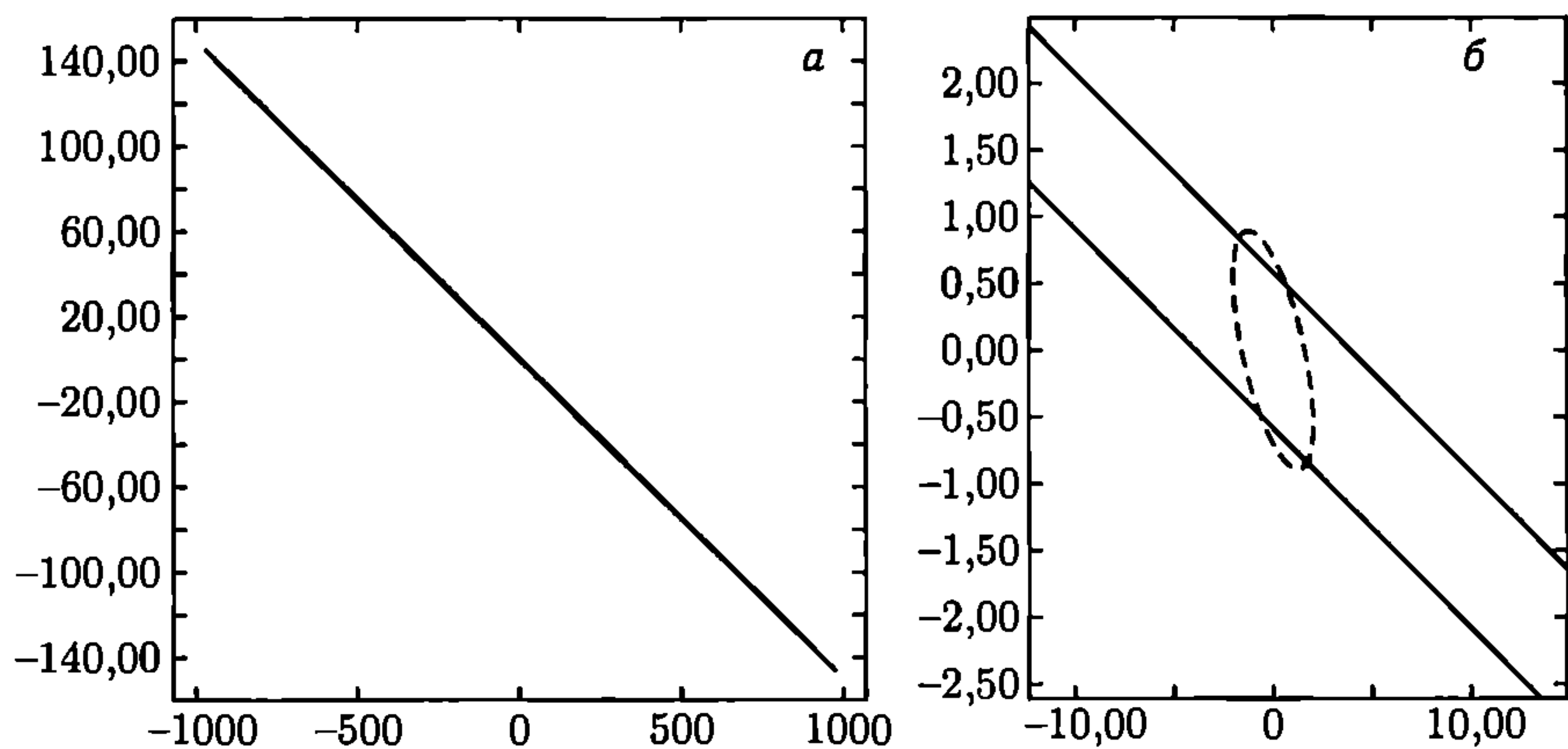


Рис. 10.9. а) Квадратурные корреляции Γ_ϕ в ближней зоне, построенные в полярных координатах, для детектора, расположенного на ДС. б) Увеличенное изображение центральной части эллипсов сжатия. Параметры расчета такие же, как для рис. 10.8

щих из областей ДС (см. рис. 10.8, б). Это сжатие существенно превосходит сжатие, полученное в [2] для ВПГС ниже порога генерации, убывающее при приближении к порогу.

Сравнение эллипсов сжатия для ДС и однородного решения представлено на рис. 10.9. Усиление амплитуды флуктуаций в направлении, в точности совпадающем с фазой ϕ квадратуры, столь велико, что эллипсы сжатия для однородного решения не видны на рис. 10.9, а. Такое усиление обусловлено разрушением поперечной симметрии в присутствии ДС. Хорошо известно, что голдстоуновская мода, ассоциированная с таким разрушением симметрии, имеет нулевое собственное значение и, как следствие, пограничную устойчивость. Несмотря на то, что однородное решение сохраняет поперечную симметрию и его флуктуации подавлены при всех значениях ϕ , ДС и РС разрушают трансляционную инвариантность, и их флуктуации оказываются усиленными в направлении пограничной устойчивости по сравнению с флуктуациями однородного решения.

Наконец, из графика укрупненной центральной части эллипсов сжатия, изображенного на рис. 10.9, б, видно, что уровни сжатия в области ДС и однородной части сигнала поля сравнимы по величине. Это подсказывает, что измерения в дальней зоне могут оказаться более подходящими для простого выявления неклассических особенностей в этих структурах.

10.5.2. Квантовые корреляции резонаторных солитонов в дальней зоне. Квантовые особенности фотонов, генерируемых в РС более легко наблюдаемы при измерениях в дальней зоне. Здесь фотоны, излучаемые из однородных областей поперечной плоскости, собираются в моду с $k = 0$ (осевое излучение), а фотоны, генерируемые такими пространственными структурами как РС и картины, рассеиваются вне оси с пространственными волновыми векторами $k \neq 0$. Здесь мы рассмотрим квантовые флуктуации РС в ВПГС в двух различных конфигурациях: две хорошо разделенные ДС (конфигурация, аналогичная показанной на рис. 10.7) и неупорядоченная последовательность захваченных ДС, аналогичная описанной в разделах 10.2 и 10.4.

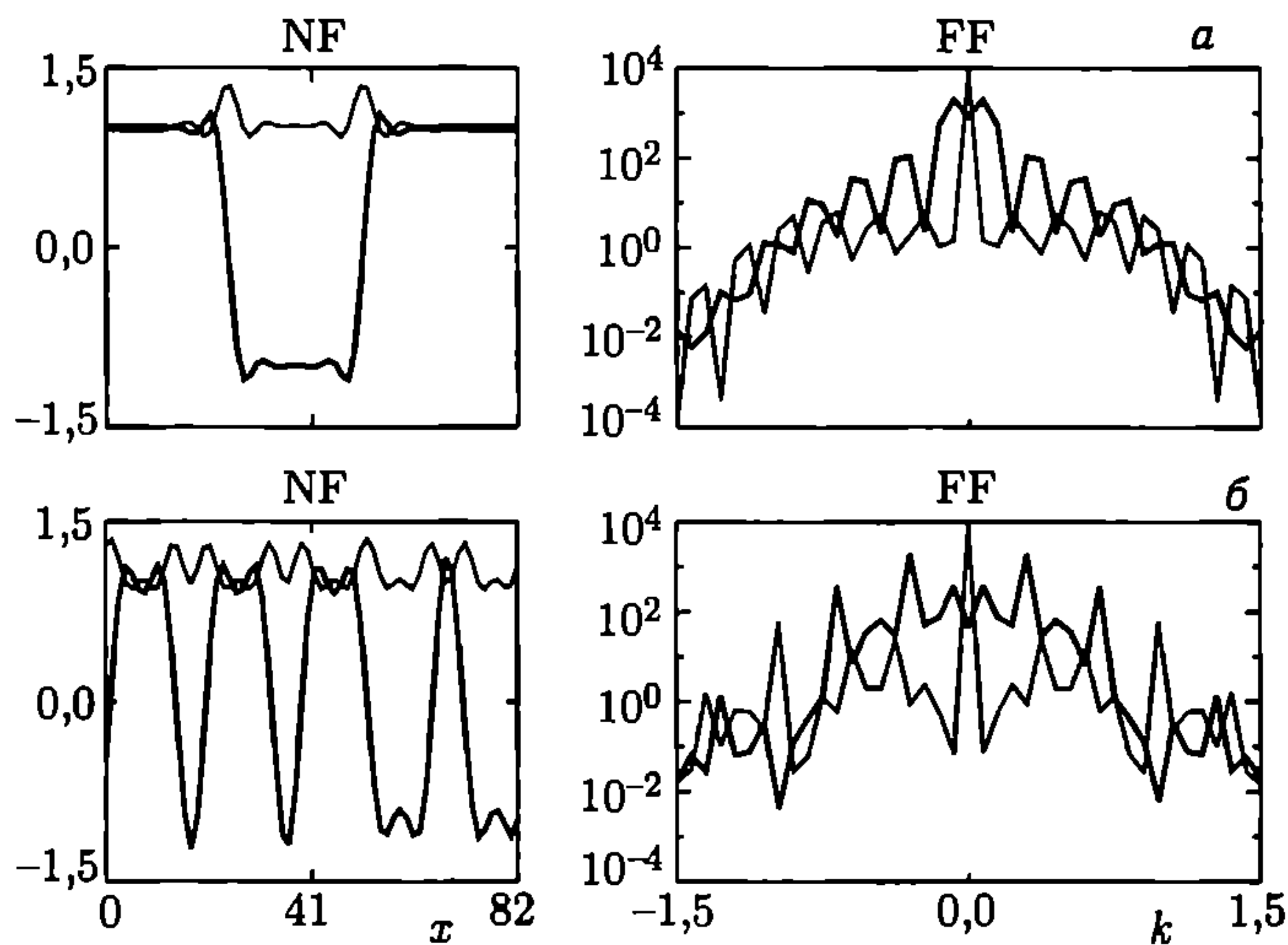


Рис. 10.10. Усредненные поперечные распределения действительной части поля в ближней зоне и интенсивности поля в дальней зоне (в логарифмической шкале) для накачки (тонкая линия) и сигнального поля (жирная линия) при $E = 1,5$, $n_{th} = 10000$ и $\Delta_1 = -0,18$; а) две ДС; б) пространственный хаос. Заимствовано из [14]

Без потери общности выберем такие же параметры ВПГС, как в [14], т.е. $E = 1,5$, $n_{th} = 10000$ и $\Delta_1 = -0,18$. На рис. 10.10 изображены распределения усредненного сигнального поля и поля накачки в ближней и дальней зонах для этих двух конфигураций. Отметим, что в [14] численное моделирование выполнено в Q-представлении с помощью уравнений (10.6).

Неклассические особенности можно наблюдать в интенсивностях пучков-близнецов в дальней зоне, рассчитывая нормально-упорядоченную дисперсию разности интенсивностей сигнального поля с противоположными волновыми векторами [14]:

$$\mathcal{V}(k) = \frac{\langle : [\delta I(k) - \delta I(-k)]^2 : \rangle}{\mathcal{N}(k)}, \quad \delta I(k) = I(k) - \langle I(k) \rangle, \quad (10.9)$$

где I — интенсивность сигнального поля, $\langle . \rangle$ означает усреднение по времени; $\mathcal{N}(k)$ — дробовый шум, пропорциональный сумме усредненных интенсивностей сигнального поля с $\pm k$. Отрицательные значения $\mathcal{V}(k)$ указывают на субпуассоновскую статистику разности интенсивностей двух сигнальных пучков с $\pm k$ [27]. Для обычных квантовых изображений ниже порога $\mathcal{V} = -0,5$ при любой интенсивности и любом направлении волнового вектора накачки в дальней зоне [2, 27]. Это очевидный артефакт, связанный с используемой нормировкой $\mathcal{N}(k)$, которая сильно зависит от интенсивности и направления волнового вектора накачки в дальней зоне. Чтобы прояснить этот вопрос Замбрини с соавторами [14] построили кривую $\mathcal{V}(k)$ для случая ниже порога генерации сигнального поля ($E = 0,99$), показанную на рис. 10.11, а. Малые отклонения численных расчетов от аналитического значения $-1/2$ связаны с малостью дробового шума, используемого при нормировке. Фактически дробовый шум пропорционален усредненной интенсивности сигнального поля

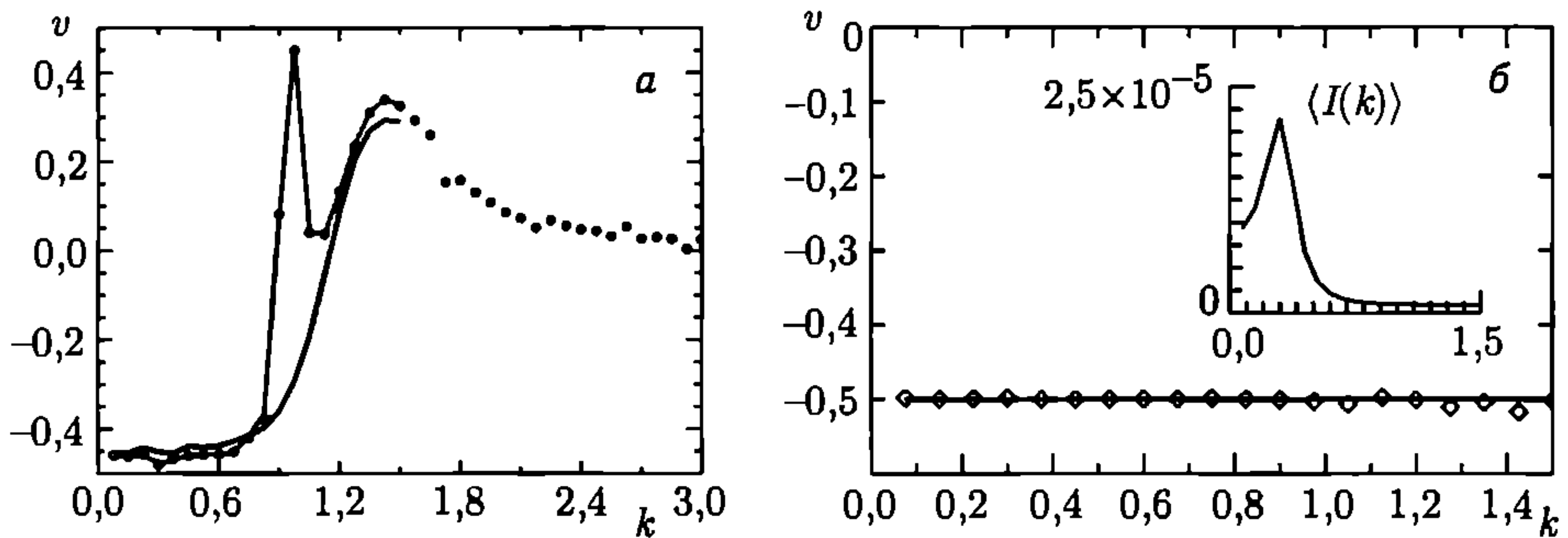


Рис. 10.11. а) Дисперсия $\mathcal{V}(k)$ пучков-близнецов для случая ниже порога генерации сигнального поля ($E = 0,99$, $n_{th} = 10000$ и $\Delta_1 = -0,18$). На вставке показана усредненная интенсивность сигнального поля. б) $\mathcal{V}(k)$ выше порога ($E = 1,5$). Черная кривая отвечает конфигурации РС, изображенной на рис. 10.10, а, серая — конфигурации, изображенной на рис. 10.10, б. Заимствовано из [14]

в дальней зоне, изображенной на вставке рис. 10.11, б. На рис. 10.11, б показан пространственный спектр дисперсии $\mathcal{V}(k)$ в дальней зоне для двух интересных нас конфигураций РС. Как и в случае ниже порога, здесь также имеют место квантовые корреляции пучков в присутствии РС. Заметим, что рассеянные фотоны (т. е. $k \neq 0$) появляются теперь только из-за присутствия локализованных структур РС. Отличие от случая ниже порога состоит в том, что область с отрицательными дисперсиями теперь обрывается при больших k ($k \sim 1$). Эта отсечка много выше, чем все основные пространственные компоненты в структурах РС, как видно из спектров дальней зоны, изображенных на рис. 10.10. При больших значениях волновых векторов, когда сигнальное поле истощается сильнее, чем поле накачки, и асимптотически стремится к уровню когерентного состояния (серая линия, изображенная точками на рис. 10.11), корреляции становятся классическими [14].

Интерпретация полосы квантово-коррелированных фотонов в дальней зоне сигнального поля РС в ВПГС проста. Любой фотон, рассеянный пространственной структурой РС, появляется в дальней зоне вместе со своим близнецом с противоположным значением волнового числа. Отрицательные дисперсии $\mathcal{V}(k)$ отражают квантовую природу пучков-близнецов, генерируемых кристаллом с $\chi^{(2)}$ нелинейностью, и поэтому не зависят от направлений излучения фотонов. Однако, очевидно, что не все k -моды заполнены одинаково при наличии РС. Например, в случае массива РС, создаваемого квантовыми флуктуациями, как описано в разд. 10.3 (см. рис. 10.5), наибольшее число фотонов в дальней зоне появляется в пике k_s . Все эти фотоны проявляют квантовые корреляции с отрицательной дисперсией $\mathcal{V}(k)$ в дальней зоне, и, следовательно, являются квантовыми структурами.

10.6. Выводы и благодарности

В этой главе мы рассмотрели связь между резонаторными солитонами и квантовыми флуктуациями в ВПГС. Это идеальная системы для изучения такой связи, поскольку она легко демонстрирует оба этих свойства.

Первый эффект квантовых флуктуаций, который был рассмотрен, это вызванная квантовым шумом стабилизация захваченных массивов РС. В окрестности ДС квантовый шум может быть достаточно велик, чтобы вызвать создание другой пары таких стенок, которая при определенном расстоянии захватывает первую пару ДС. Это явление ведет к формированию массивов ДС или, что тоже самое, массивов РС.

Также были рассмотрены корреляции квадратур ДС в ближней и дальней зонах. В ближней зоне необычная природа центров ДС, где накачка выше порога, а сигнальное поле исчезает, дала возможность предполагать присутствие ярко выраженных особенностей, связанных со сжатием вокруг каждой такой точки. В ДС имеет место большое усиление квантовых флуктуаций с определенной фазой по сравнению с флуктуациями однородного решения. Как следствие разрушения поперечной симметрии, вызванное ДС, результирующие флуктуации во много раз больше, чем флуктуации в точках, удаленных от ДС.

Квантовые корреляции также были найдены в разностях интенсивностей пучков-близнецов, излучаемых структурами РС в дальней зоне. Эти корреляции являются следствием парного процесса генерации фотонов в кристаллах с $\chi^{(2)}$ нелинейностью. Пространственные вектора, при которых возникают корреляции, определяются поперечной структурой сигнального поля.

Последнее заключение представленной здесь работы состоит в том, что РС в ВПГС при малых значениях отношения скоростей распада Γ являются типичными *квантовыми структурами РС*, поскольку они генерируются квантовыми флуктуациями и проявляют заметные квантовые особенности как в ближней, так и в дальней зонах.

Мы хотим поблагодарить следующих людей за полезные обсуждения и/или за разрешение использовать некоторые из их результатов в этой главе: Роберта Замбрини, Андре Скrogги, Ивана Раббиоси, Грэме Маккартни, Стива Барнетта и Пере Коле. Также мы хотим поблагодарить Европейскую комиссию (проекты Quantim и FunFACS), SGI, Королевское научное общество — Leverhulme Trust и университет Стресклайда (SRIF-II) за финансовую поддержку этого исследования.

Список литературы

1. Gatti A., Lugiato L. A. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 1675.
2. Gatti A., Wiedemann H., Lugiato L. A., Marzoli I., Oppo G.-L., Barnett S. M. // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 877.
3. Marzoli I., Gatti A., Lugiato L. A. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2092.
4. Lugiato L. A., Brambilla M., Gatti A. // Adv. At. Mol. and Opt. Phys. 1999. V. 40. P. 229.
5. Kolobov M. I. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539.
6. Szewaj C., Oppo G.-L., Gatti A., Lugiato L. A. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 433.
7. Zambrini R., Hoyuelos M., Gatti A., Colet P., Lugiato L. A., San Miguel M. // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 063801.

8. *Bache M., Scotto P., Zambrini R., San Miguel M., Saffman M.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 013809.
9. *Firth W.J., Scroggie A.J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1623.
10. *Firth W.J., Weiss C.O.* // Optics and Photonics News. 2002. V. 13. P. 54.
11. *Barland S. et al.* // Nature. 2002. V. 419. P. 699.
12. *Rabbiosi I., Scroggie A.J., Oppo G.-L.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 254102.
13. *Rabbiosi I., Scroggie A.J., Oppo G.-L.* // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 22. P. 453.
14. *Zambrini R. et al.* // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 22. P. 460.
15. *Oppo G.-L., Brambilla M., Lugiato L.A.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 2028;
Oppo G.-L., Brambilla M., Camesasca D., Gatti A., Lugiato L.A. // J. Mod. Opt. 1994. V. 41. P. 1151.
16. *Trillo S., Haelterman M., Sheppard A.* // Opt. Lett. 1997. V. 22. P. 970.
17. *Oppo G.-L., Scroggie A.J., Firth W.J.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 66209.
18. *Coullet P., Elphick C., Repaux D.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 431.
19. *Cross M.C., Hohenberg P.C.* // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65. P. 851.
20. *Carmichael H.* An Open Systems Approach to Quantum Optics. — Berlin: Springer, 1993.
21. Существуют и другие полезные функции, такие как положительная P -функция, которые мы здесь не рассматриваем.
22. *Gatti A. et al.* // Optics Express. 1997. V. 1. P. 21.
23. *Zambrini R., Barnett S.M., Colet P., San Miguel M.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 023813; см. также список опечаток тех же авторов и San Miguel M. там же: Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 049901.
24. Предел среднего поля получен как первый порядок в разложении удельного коэффициента пропускания зеркал резонатора. Уменьшая Γ ниже, скажем, 10^{-3} , необходимо учитывать старшие члены разложения. Заметим также, что предел $\Gamma \rightarrow 0$ сингулярен даже в отсутствии шумов и дифракции.
25. *Jeffers J., Zambrini R., Scroggie A.J., McCartney G., Oppo G.-L.* In preparation. 2005.
26. Мы используем термин «усиление», когда сравниваем амплитуду флуктуаций ДС и однородных участков в ближней зоне. Поскольку собственное значение голдстоуновской моды равно нулю, флуктуации ДС либо подавляются либо усиливаются, если рассматривать их отдельно.
27. *Zambrini R., San Miguel M.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 023807.

Литература, добавленная при переводе

28. *Розанов Н.Н.* Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. — М.: Физматлит, 1997.
29. *Rosanol N.N.* Spatial Hysteresis and Optical Patterns. — Berlin: Springer, 2002.
30. *Розанов Н.Н.* Оптические солитоны, их комплексы, симметрия и движение // Нелинейные волны-2008: Сб. ст. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2009. — С. 280.
31. *Нестеров Л.А., Киселев Ал.С., Киселев Ан.С., Розанов Н.Н.* Квантовые флуктуации диссипативных солитонов в нелинейном интерферометре // Опт. спектр. 2009. Т. 106. С. 639.

КВАНТОВАЯ ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ И ПЛОТНОЕ КОДИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Иван В. Соколов

11.1. Введение

Квантовая информация возникла как активно развивающееся направление в последние 10 лет [1,2]. Цель этой новой области теоретических и экспериментальных исследований состоит в приложении законов квантового мира к обработке и передаче информации. Здесь можно отметить такие направления как квантовая криптография, квантовые вычисления, квантовая телепортация, квантовое плотное кодирование и др. Вполне естественно распространить концепции и подходы, развитые в квантовых изображениях, на квантово-информационные явления, вводя таким образом параллелизм и полностью оптические методы в эту область исследований.

В этой главе мы обсудим обобщение двух квантово-информационных протоколов для непрерывных переменных — квантовой телепортации и квантового плотного кодирования — на случай оптических изображений. Подобно большинству явлений квантовой информации, основной используемый ресурс здесь обеспечивается квантовым перепутыванием. Ключевыми понятиями нашего рассмотрения являются пространственное многомодовое сжатие и перепутывание для непрерывных переменных, введенное в предыдущих главах и обсуждающееся ниже.

Хорошо известно, что следуя принципам квантовой физики можно передать произвольное квантовое состояние электромагнитного поля или другого объекта из одного места в другое с помощью классического обмена информацией в комбинации с квантовым каналом, использующим квантовые перепутанные состояния. Эта операция, названная квантовой телепортацией, первоначально была предложена для дискретных переменных [3], а позднее обобщена на случай схем с непрерывными переменными [4–6]. Экспериментальные демонстрации для дискретных переменных даны в [7] для однофотонных поляризационных состояний, а в [8,9] — для непрерывных переменных. Кроме присущего этим исследованиям фундаментального значения, интерес к квантовой телепортации связан также с ее потенциальными приложениями в области квантовой коррекции ошибок [10], квантового плотного кодирования [11] и квантовой криптографии [12].

В первых схемах телепортации рассматривались одномодовые поля или, в лучшем случае, широкополосная телепортация сигналов, зависящих от времени [13]. Однако пространственные степени свободы дают возможность значительно увеличить число каналов, по которым может быть осуществлена параллельная телепортация. Протокол, позволяющий телепортировать пространственно многомодовые состояния поля был предложен недавно [14, 15]. Телепортация, обладающая такой особенностью, была названа *квантовой голографической телепортацией*. Эта телепортационная схема обладает много большим потенциалом в сравнении с одномодовым случаем, поскольку позволяет одновременно телепортировать двумерные оптические изображения и массивы данных. Этот обобщенный протокол открывает новые возможности приложения телепортации в качестве квантового интерфейса в двумерных параллельных квантовых вычислениях, в параллельной квантовой передаче информации, квантовой памяти, коррекции ошибок и т. п.

Квантовая голографическая телепортация оптических изображений рассматривается в разд. 11.3 этой главы.

Квантовое плотное кодирование — это схема для коммуникационных каналов, основанная на квантовом перепутывании. Главной особенностью протокола квантового плотного кодирования является использование двух каналов в квантовом перепутанном состоянии. Сигнал создается отправителем (Алисой) в первом канале. Благодаря эффективному квантовому перепутыванию второй канал играет роль идеальной системы отсчета для первого канала. Получатель (Боб) осуществляет белловское измерение сигнала, проводимое совместно в обоих каналах. Квантовое перепутывание делает возможным измерение сигнала с чувствительностью выше стандартного квантового предела для одиночного канала.

Впервые квантовое плотное кодирование было предложено в [16] и экспериментально реализовано в [17] для дискретных переменных — кубитов, а позднее разработано [11] и продемонстрировано экспериментально [18] для непрерывных переменных. В разд. 11.4 обсуждается протокол квантового плотного кодирования в непрерывных переменных для оптических изображений [19]. Эта схема обобщает протокол [11] на случай существенно многомодовых в пространстве и времени оптических коммуникационных каналов. Обобщение пространственной многомодовости использует присущий оптической передаче информации параллелизм для одновременного параллельного плотного кодирования многоэлементного входного изображения. Пропускная способность схемы параллельного плотного кодирования значительно превосходит пропускную способность одномодовой схемы.

11.2. Сжатие и перепутывание в непрерывных переменных для пространственно многомодовых световых полей

11.2.1. Пространственные масштабы квантовых корреляций в сжатом свете. Световые поля в сжатом состоянии обычно получают в нелинейных параметрических взаимодействиях. Начиная с первых демонстрационных экспериментов [20], явление сжатия наблюдалось при трех- и четырехволно-

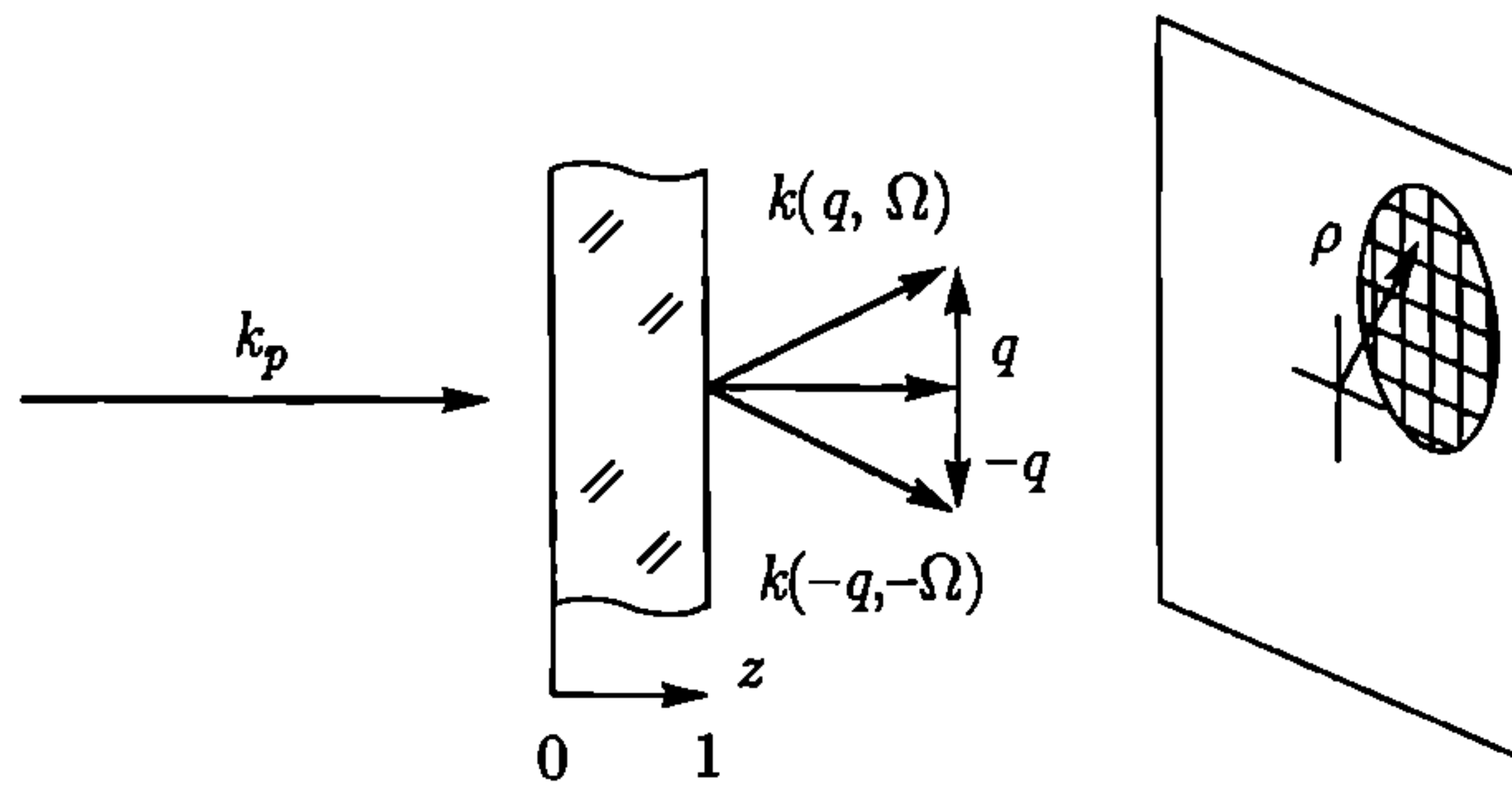


Рис. 11.1. Схематическое изображение однопроходного ОПУ

вом смещении в нелинейных кристаллах, резонансных средах и оптических волноводах как в непрерывном, так и в импульсном режимах [21].

Ключевой проблемой для квантовых изображений является генерация сжатия для многих степеней свободы. Теоретические предложения и экспериментальные усилия, направленные на эффективное многомодовое сжатие в конфигурации бегущей волны и в резонаторной конфигурации рассмотрены в других главах этой книги.

Говоря конкретнее, в этой главе рассматриваются источники сжатых и перепутанных полей, основанные на однопроходных оптических параметрических усилителях (ОПУ) первого типа. Интенсивное неистошающееся классическое поле накачки представляется в виде плоской монохроматической волны с частотой ω_p и волновым вектором $\mathbf{k}_p$, направленным вдоль оси z (см. рис. 11.1). Нелинейный кристалл толщиной l имеет форму плоского слоя, расположенного перпендикулярно оси z . При параметрическом рассеянии первого типа фотон накачки превращается в пару фотонов с одинаковыми поляризациями, частотами $\omega \pm \Omega$, где $\omega = \omega_p/2$, и поперечными компонентами волновых векторов $\pm \mathbf{q}$. Эти значения следуют из сохранения энергии и поперечного импульса. Волна с частотой $\omega + \Omega$ и поперечной компонентой $\mathbf{q}$ имеет волновой вектор $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \Omega)$. Как будет показано ниже, в случае коллинеарного вырожденного по частоте фазового синхронизма, для того чтобы получить два сжатых или перепутанных пучка света необходимо использовать два независимых ОПУ: ОПУ₁ и ОПУ₂. Для описания сжатых полей будем использовать операторы уничтожения и рождения фотонов $\hat{S}_n(\boldsymbol{\rho}, t)$ и $\hat{S}_n^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t)$ ($n = 1, 2$), зависящие от координаты и времени. Здесь $\boldsymbol{\rho}$ — вектор в поперечной плоскости. Эти операторы подчиняются коммутационным соотношениям для свободного пространства [22, 23]:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_n(\boldsymbol{\rho}, t), \hat{S}_{n'}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', t')] &= \delta_{n,n'} \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \delta(t - t'), \\ [\hat{S}_n(\boldsymbol{\rho}, t), \hat{S}_{n'}(\boldsymbol{\rho}', t')] &= 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

и нормированы так, что $\langle \hat{S}_n^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t) \hat{S}_n(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle$ дает среднее значение освещенности, выраженной в фотонах через см^2 за секунду.

Преобразование полей в вакуумном состоянии $\hat{A}_n(\boldsymbol{\rho}, t)$ на входе ОПУ в широкополосные многомодовые сжатые поля $\hat{S}_n(\boldsymbol{\rho}, t)$ на выходе описывается

в терминах фурье-компонент этих операторов в частотном и пространственно-частотном представлении:

$$\hat{s}_n(\mathbf{q}, \Omega) = \int d\boldsymbol{\rho} dt \exp [i(\Omega t - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho})] \hat{S}_n(\boldsymbol{\rho}, t). \quad (11.2)$$

В дальнейшем мы будем использовать такие же разложения для $\hat{a}_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и других полевых операторов. Преобразование сжатия, выполняемое ОПУ, можно записать в виде:

$$\hat{s}_n(\mathbf{q}, \Omega) = U_n(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_n(\mathbf{q}, \Omega) + V_n(\mathbf{q}, \Omega) \hat{a}_n^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega), \quad (11.3)$$

где коэффициенты $U_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и $V_n(\mathbf{q}, \Omega)$ зависят от амплитуды полей накачки ОПУ, их нелинейных восприимчивостей и условий фазового синхронизма. Для однопроходных ОПУ с синхронизмом первого типа коэффициенты $U_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и $V_n(\mathbf{q}, \Omega)$ приведены в Приложении А¹⁾.

В дальнейшем предполагается, что оба ОПУ вырождены по частотам, для них выполняются условия коллинеарного фазового синхронизма с одинаковыми коэффициентами связи $|g_1| = |g_2| = g$ и равными степенями сжатия (см. Приложение А):

$$r_1(\mathbf{q}, \Omega) = r_2(\mathbf{q}, \Omega) \equiv r(\mathbf{q}, \Omega), \quad (11.4)$$

где $r(0, 0) = g$. Простую физическую интерпретацию широкополосного сжатия можно привести в терминах эллипсов сжатия, введенных в фазовой плоскости (q_x, q_y) для любой пары сопряженных волн с фурье-амплитудами $\hat{s}_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и $\hat{s}_n(-\mathbf{q}, -\Omega)$. Эллипс $(\mathbf{q}, \Omega)$, представляющий область квантовой неопределенности для данной пары сопряженных волн, растянут и сжат в $\exp [\pm r_n(\mathbf{q}, \Omega)]$ раз. Главная ось эллипса направлена под углом $\psi(\mathbf{q}, \Omega)$ в плоскости комплексных амплитуд поля.

Пространственно-временные масштабы сжатия и перепутывания чувствительны к поворотам эллипсов сжатия в зависимости от величин $\mathbf{q}, \Omega$, т. е. обладают частотной дисперсией сжатия. В результате такого вращения подавление шума в данной квадратуре поля переходит в усиление шума на больших частотах, как показано на рис. 11.2, а. Вращение в зависимости от пространственной частоты обусловлено дифракцией. Как показано в [22, 23], это вращение эффективно устраняется с помощью нужным образом внесенной отображающей линзовой системы (см. рис. 11.2, б).

11.2.2. Пространственно многомодовое перепутывание. При интерференционном смешении на симметричном (50 : 50) светоделителе двух широкополосных многомодовых сжатых пучков $S_m(\boldsymbol{\rho}, t)$, создаваемых двумя вырожденными однопроходными ОПУ, получают пучки в ЭПР (Эйнштейна–Подольского–Розена) состоянии с амплитудами $\hat{E}_n(\boldsymbol{\rho}, t)$, $n = 1, 2$:

$$\hat{E}_n(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_{m=1,2} R_{nm} \hat{S}_m(\boldsymbol{\rho}, t). \quad (11.5)$$

¹⁾ См. также главу 2 этой книги.

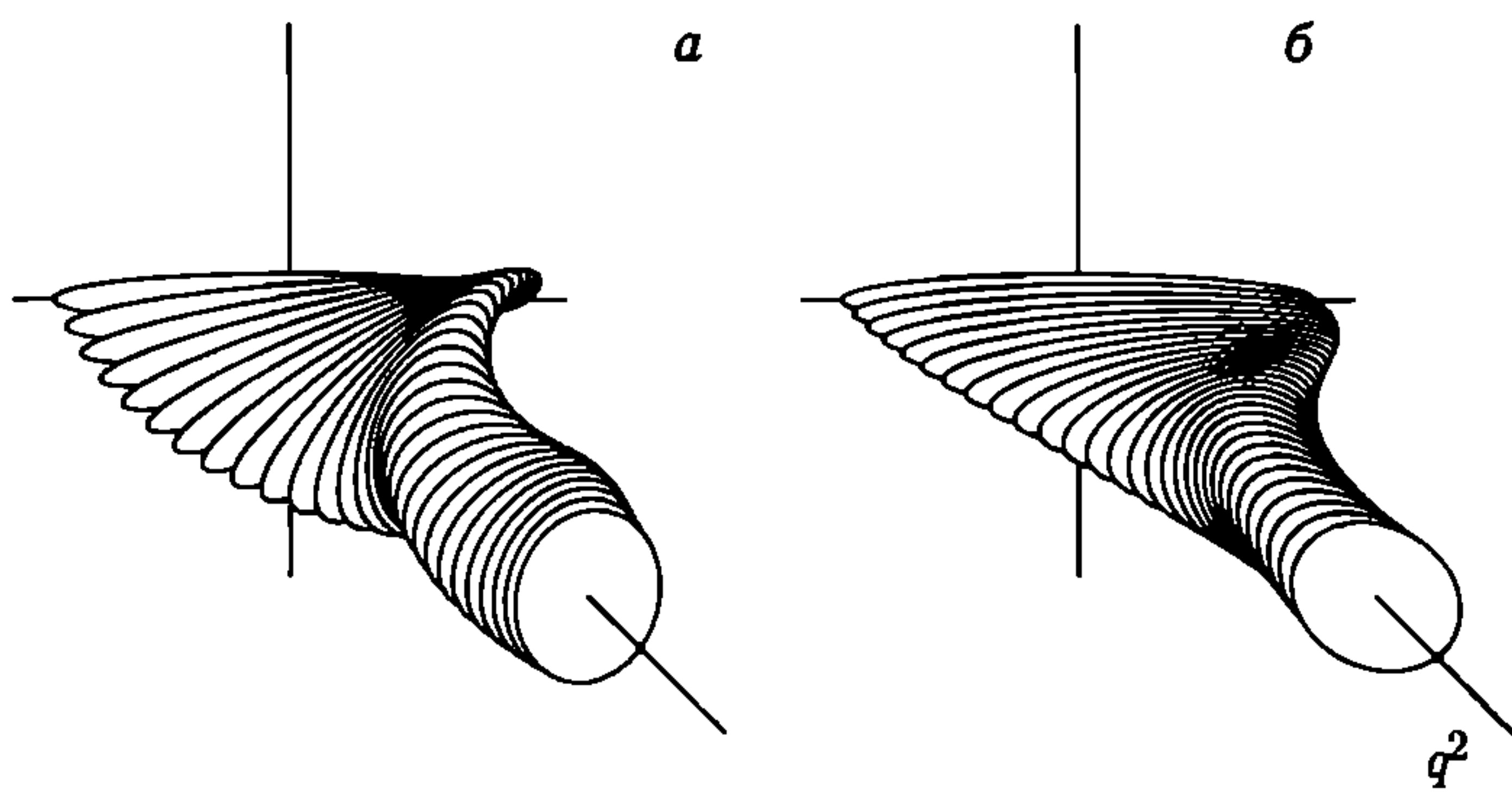


Рис. 11.2. Эллипсы сжатия (а) для широкополосного по пространственным и временным частотам поля $\hat{s}_1(\mathbf{q}, \Omega)$ в зависимости от расстройки $\delta(\mathbf{q}, \Omega)$ (в произвольных единицах) при вырожденном коллинеарном фазовом синхронизме первого типа, $\exp[\tau(0, 0)] = 3$. На рис. б показаны те же эллипсы сжатия для систем отображения с правильно подобранными линзами

Здесь

$$\{R_{nm}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11.6)$$

— матрица светоделителя. Такая схема формирования пространственно многомодового ЭПР перепутывания является обобщением схемы [8], использовавшейся для создания перепутывания, широкополосного во времени, но одномодового в пространстве.

С другой стороны, два многомодовых ЭПР-пучка можно получить с помощью одного однопроходного вырожденного по частоте ОПУ с фазовым синхронизмом второго типа [24, 25] (в этом случае пучки имеют ортогональные поляризации) или с помощью невырожденного по частоте или волновому числу ОПУ.

Аналогично одномодовым ЭПР-пучкам, для создания многомодовых ЭПР пучков необходимо, чтобы сжатие в обоих каналах было эффективно, а направления ориентации эллипсов сжатия — ортогональны. Для простоты будем предполагать, что ОПУ₁ и ОПУ₂ обладают такими свойствами, что

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{q}, \Omega) &= U_2(\mathbf{q}, \Omega) \equiv U(\mathbf{q}, \Omega), \\ V_1(\mathbf{q}, \Omega) &= -V_2(\mathbf{q}, \Omega) \equiv V(\mathbf{q}, \Omega). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Из этих допущений следует, что

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{q}, \Omega) &= \psi_2(\mathbf{q}, \Omega) \pm \frac{\pi}{2} \equiv \psi(\mathbf{q}, \Omega), \\ \phi_1(\mathbf{q}, \Omega) &= \phi_2(\mathbf{q}, \Omega) \pm \frac{\pi}{2} \equiv \phi(\mathbf{q}, \Omega). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Физические свойства создаваемого перепутывания иллюстрируются рис. 11.3. Рассмотрим соответствующие объемы когерентности $V_c = cT_c S_c$ в двух падающих сжатых пучках. Здесь $T_c = 2\pi/\Omega_c$ и $S_c = (2\pi/q_c)^2$ — время когерентности и площадь когерентности соответственно, связанные

с частотной и пространственно-частотной полосами Ω_c and q_c эффективного подавления шума в малозумящих квадратурах.

Левый и правый эллипсы внизу на рис. 11.3 с векторами внутри отвечают эффективным локальным значениям флуктуаций широкополосного

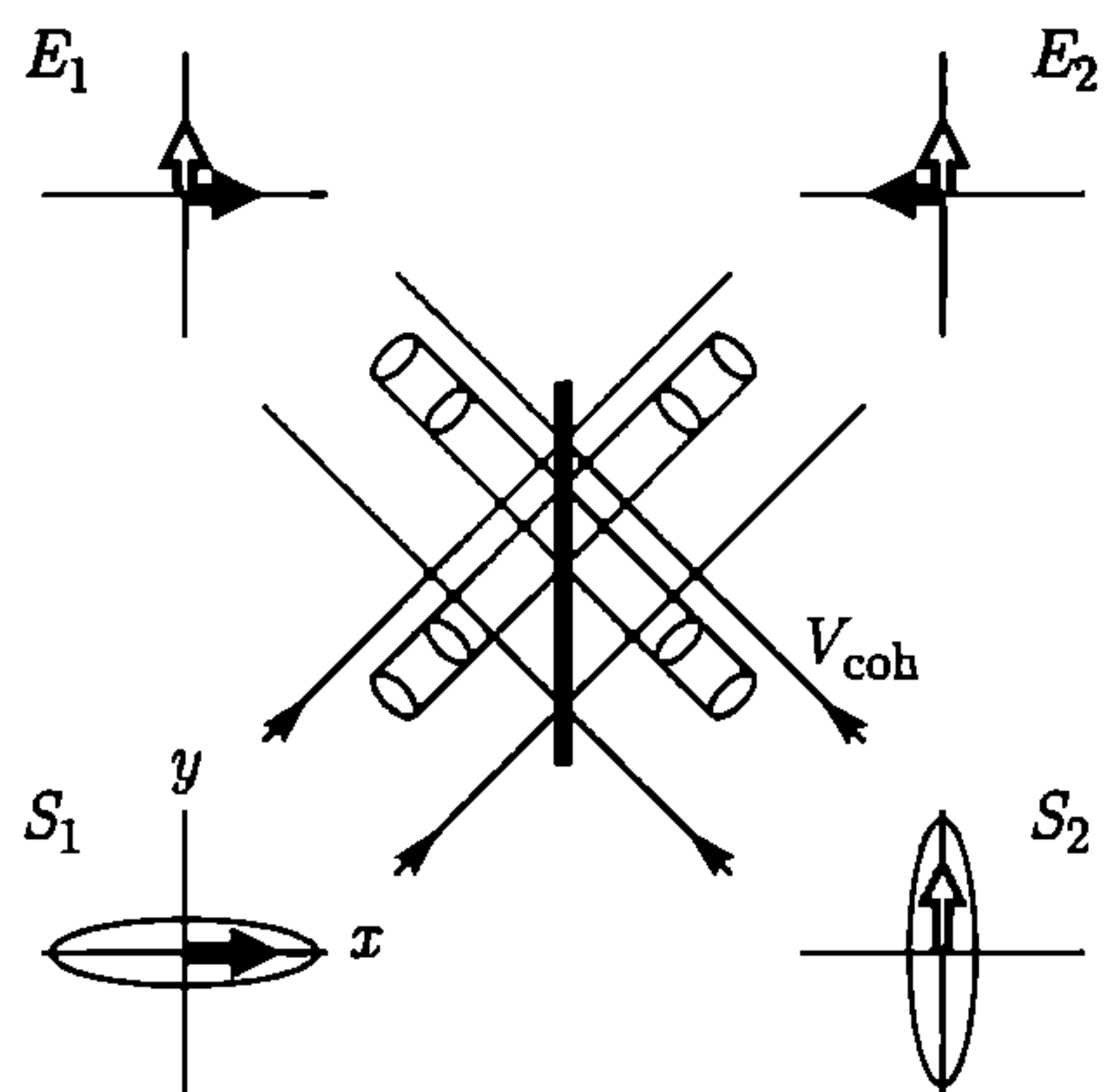


Рис. 11.3. Получение локально перепутанных в пространстве и во времени ЭПР-полей $\hat{E}_1(\rho, t)$ и $\hat{E}_2(\rho, t)$ посредством интерференции сжатых полей $\hat{S}_1(\rho, t)$ и $\hat{S}_2(\rho, t)$

поля в этих объемах когерентности. Векторы изображают только растянутые (усиленные) квадратурные амплитуды полей $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$. Сжатые квадратурные амплитуды пренебрежимо малы при $\exp[r(0,0)] \gg 1$ и не показаны. После рассеяния на светоделителе выходные поля $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ в соответствующих объемах когерентности состоят из тех же усиленных квадратурных амплитуд (см. левую и правую схемы вверху рис. 11.3). Это означает, что в пределе эффективного сжатия имеет место эффективная корреляция и перепутывание между рассеянными полями: квадратурные амплитуды полей $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ совпадают с точностью до знака, введенного унитарным преобразованием (11.6). В пространственно-временном представлении перепутывание между широкополосными полями является локальным, «объем с объемом».

В фурье-представлении ЭПР-поля перепутаны по частотам Ω и пространственным частотам q в пределах фазового согласования в ОПУ.

11.3. Квантовая голографическая телепортация оптических изображений

В этом разделе мы рассмотрим оптическую схему квантовой голографической телепортации и сформулируем критерии достижения высокой верности при телепортации квантового состояния.

Квантовая голографическая телепортация обладает физическими особенностями, отсутствующими в одномодовой схеме телепортации. Одной из таких особенностей является возможность управления выполнением голографической телепортации с помощью оптических элементов, помещаемых соответствующим образом в схему на пути распространения пучка. Эта возможность оптического управления связана с явлением дифракции, которое менее важно для одномодовых световых полей.

Другое важное отличие пространственно многомодовой схемы от ее одномодового аналога следует из того факта, что при квантовой голографической телепортации входной сигнал обладает большим числом степеней свободы. Верность телепортации квантового состояния всей системы, обычно рас-

смаатриваемая как мера качества телепортации, не применима в этом случае, поскольку она стремится к нулю. Следовательно, необходимо определить редуцированную верность телепортации, связанную с соответствующими степенями свободы, которые требуется телепортировать (см. подразд. 11.3.4). Такую редуцированную верность можно сделать близкой к единице путем соответствующего выбора пространственной полосы ЭПР-пучков, используемых в протоколе, а также оптимизацией схемы с помощью подходящих оптических устройств (линз), помещенных на пути световых пучков.

Специфическая особенность схем многомодовой телепортации, основанная на многопиксельном детектировании света, заключается в необходимости использовать грубый масштаб (представление с разбиением на пикселы) при описании входного и выходного сигналов, чтобы характеризовать качество многомодовой телепортации.

Для важного случая поля входного изображения, описываемого гауссовой квантовой весовой функцией (т. е., когда входное поле находится в пространственно многомодовом сжатом или когерентном состоянии) мы получили явное выражение для верности телепортации в явном виде. Оказалось, что верность зависит не только от особенностей квантового шума в каждой моде входного состояния и от степени перепутанности в квантовых каналах (что верно и для случая одномодовой телепортации), но она зависит также от числа и выбора элементов изображения — *пикселов*, которые требуется телепортировать параллельно.

Квантовую голографическую телепортацию можно рассматривать как обобщение на квантовую область традиционной нестационарной голографии (см. подразд. 11.3.5). Действительно, в протоколе квантовой голографической телепортации можно выделить все основные элементы, присутствующие в голографии. Новой особенностью, которая превращает голографию в квантовую голографическую телепортацию и позволяет подавить квантовые флуктуации в телепортированном (восстановленном) изображении ниже стандартного квантового предела, является пространственно многомодовое квантовое перепутывание.

11.3.1. Основы квантовой телепортации. Основными составляющими для квантовой телепортации служат: 1) так называемый квантовый канал (пара квантовых объектов в ЭПР-состоянии) и 2) ЭПР-измерение. В некоторых физически важных ситуациях ЭПР-состояние можно интерпретировать как состояние с точно определенными значениями физических переменных, связанных с относительным движением объектов в ЭПР-паре. Напротив, знание об индивидуальных переменных объектов, составляющих ЭПР-пару, минимально.

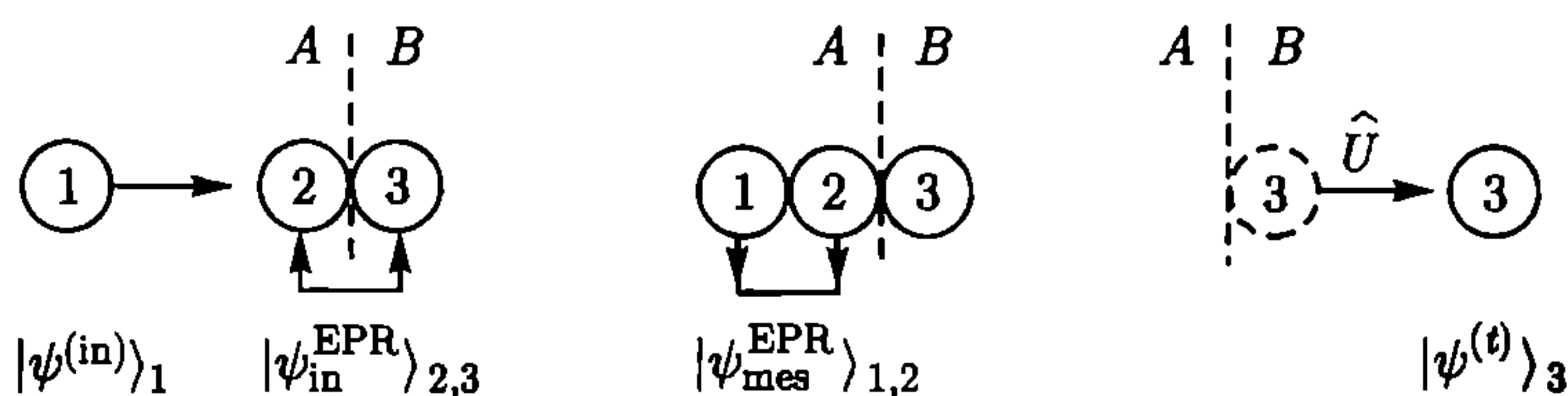


Рис. 11.4. Общая схема квантовой телепортации

ЭПР-пара световых пучков приготавливается путем оптического смешения на светоделителе $СД_1$ двух полей в пространственно многомодовом сжатом состоянии, излучаемых двумя ОПУ как описано в подразд. 11.2.2. Входное световое поле, телепортируемое от Алисы к Бобу, описывается полевым оператором $\hat{A}_{in}(\rho, t)$, где ρ — двумерная координата в поперечном сечении пучка.

Для того чтобы измерить обе квадратурные компоненты входного поля $\hat{A}_{in}(\rho, t)$, это поле разделяется на светоделителе $СД_2$. Второй входной порт светоделителя освещается ЭПР-пучком $\hat{E}_1(\rho, t)$. В отсутствие ЭПР-пучка, являющегося существенной частью схемы телепортации, этот входной порт освещался бы широкополосным в пространстве и времени потоком вакуумных флуктуаций.

Две квадратурные компоненты, рассеянные светоделителем $СД_2$ световых полей $\hat{B}_x(\rho, t)$ и $\hat{B}_y(\rho, t)$, измеряются поточно двумя гомодинными детекторами D_x и D_y , представляющими собой высоко эффективные многопиксельные матрицы фотодетекторов (ССD-камера). Пространственно-временные квантовые флуктуации квадратурных компонент $\hat{B}_x(\rho, t) + \hat{B}_x^\dagger(\rho, t)$ и $\hat{B}_y(\rho, t) - \hat{B}_y^\dagger(\rho, t)$ локально записываются в фототоки на выходе каждого из пикселей ССD-камеры. Фототоки пересылаются от Алисы к Бобу по двум многоканальным параллельным классическим линиям связи. Изложенная часть протокола соответствует ЭПР-измерению Алисы (см. подразд. 11.3.1).

Боб использует фототоки $\hat{I}_x(\rho, t)$ и $\hat{I}_y(\rho, t)$ для восстановления поля $\hat{A}_{out}(\rho, t)$ с помощью двух многоканальных модуляторов M_x и M_y , которые модулируют в пространстве и времени соответствующие квадратурные компоненты падающей плоской когерентной световой волны. Благодаря многомодовой природе перепутывания, наша схема позволяет телепортировать параллельно N элементов входного волнового фронта, сохраняя их пространственно-временные корреляции. Это число оценивается [14,15] как отношение поперечного сечения пучка к площади когерентности света, создаваемого ОПУ. В предыдущих схемах телепортации [5,8,9] $N = 1$.

11.3.3. Квантовая статистика телепортированных полей. Поля на входе балансных гомодинных детекторов D_x и D_y , используемых для измерения x и y квадратур поля, имеют вид:

$$\hat{B}_{x,y}(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \hat{A}_{in}(\rho, t) + \hat{E}_1(\rho, t)), \quad (11.9)$$

где знак $+$ ($-$) соответствует x (y) квадратуре. Предполагается, что матрица светоделителя $СД_2$ определяется выражением (11.6). В свою очередь, эти поля смешиваются с опорными волнами Γ_{D_x} и Γ_{D_y} , имеющими комплексные амплитуды $B_x^{(H)} = B_0$ и $B_y^{(H)} = iB_0$, где B_0 — действительная величина. Для параллельной телепортации локальных пространственно-временных корреляций входного поля следует сначала измерить эти корреляции с пространственно-временным разрешением. Разрешения во времени можно достичь

выбирая правильным образом частотную полосу фотодетектора. Напротив, чтобы получить пространственное разрешение квантовых флуктуаций следует использовать многопиксельные массивы фотодетекторов (CCD-камеры) с размером пиксела меньше характерного пространственного масштаба квантовых корреляций. Операторы разностного фототока, зависящие от времени, рассмотрены в [26] для случая гомодинного измерения пространственно одномодовых квантовых полей, а в [27, 28] — для более общего случая. В приложении В (см. (11.90)) показано, что операторы разностной плотности фототока при балансном гомодинном измерении с пространственным разрешением, выполняемом детекторами D_x и D_y , выражаются через операторы полей на поверхностях детекторов, аналогично наблюдаемым, исследовавшимся ранее для детектирования без пространственного разрешения:

$$\begin{aligned}\hat{I}_x(\boldsymbol{\rho}, t) &= B_0 [\hat{B}_x(\boldsymbol{\rho}, t) + \hat{B}_x^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t)], \\ \hat{I}_y(\boldsymbol{\rho}, t) &= B_0 \frac{1}{i} [\hat{B}_y(\boldsymbol{\rho}, t) - \hat{B}_y^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t)].\end{aligned}\quad (11.10)$$

В частности, эти соотношения обеспечивают правильную пространственно-временную зависимость дробового шума при балансном гомодинном детектировании.

Плотности фототоков $\hat{I}_x(\boldsymbol{\rho}, t)$ и $\hat{I}_y(\boldsymbol{\rho}, t)$ пересылаются Алисой Бобу по двум классическим многоканальным линиям связи. Эти сигналы используются Бобом для независимой локальной модуляции двух квадратурных компонент внешней когерентной волны, согласованных по фазе с соответствующими квадратурами ЭПР полей. В промодулированном пучке создается компонента поля $\propto \hat{I}_x(\boldsymbol{\rho}, t) - i\hat{I}_y(\boldsymbol{\rho}, t)$. Телепортированное поле $\hat{A}_{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}, t)$ получается путем интерференционного смещения промодулированного поля со вторым ЭПР-пучком $\hat{E}_2$ на зеркале M с высоким коэффициентом отражения (см. рис. 11.5):

$$\hat{A}_{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}, t) = \hat{E}_2(\boldsymbol{\rho}, t) + g_c(\hat{I}_x(\boldsymbol{\rho}, t) - i\hat{I}_y(\boldsymbol{\rho}, t)). \quad (11.11)$$

Здесь g_c — коэффициент связи, учитывающий эффективность модуляции и пропускание зеркала M . Для телепортации необходимо, чтобы $g_c B_0 \sqrt{2} = 1$. Как показано в [5], при идеальном балансе коэффициента отражения зеркала и коэффициента усиления модулятора, телепортированное поле $\hat{A}_{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}, t)$ имеет вид:

$$\hat{A}_{\text{out}}(\boldsymbol{\rho}, t) = \hat{A}_{\text{in}}(\boldsymbol{\rho}, t) + \hat{F}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (11.12)$$

где

$$\hat{F}(\boldsymbol{\rho}, t) = \hat{E}_2(\boldsymbol{\rho}, t) + \hat{E}_1^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t) \quad (11.13)$$

соответствует шумовому полю, добавляемому в процессе телепортации. В случае идеального перепутывания двух ЭПР пучков на всех частотах Ω и пространственных частотах $\mathbf{q}$, слагаемые $\hat{E}_2(\boldsymbol{\rho}, t)$ и $\hat{E}_1^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t)$, составляющие шумовое поле, полностью антикоррелированы и их квантовые флуктуации взаимно подавляются.

Нетрудно проиллюстрировать подавление этого шума, представив суперпозицию (11.13) с помощью комплексных амплитуд поля, изображенных на рис. 11.3 наверху слева и справа. В (11.13) фигурирует комплексно сопряженный оператор к $\hat{E}_1(\rho, t)$, что следует из инверсии знака перед членом $\propto i\hat{I}_y(\rho, t)$ в реконструируемом поле (11.11). Полное подавление шума соответствовало бы идеальной поточечной (точка-в-точку) в пространстве и мгновенной во времени телепортации квантового состояния входного поля с произвольным в пространстве и времени распределением: $\hat{A}_{\text{out}}(\rho, t) = \hat{A}_{\text{in}}(\rho, t)$. Однако такая телепортация потребовала бы бесконечно большого расхода энергии для создания ЭПР-пучков. Действительно, сначала, как и в одномодовом случае, требовалось бы достичь бесконечного сжатия в одиночном объеме когерентности ЭПР-пучка. Кроме того, поскольку теперь рассматривается многомодовое перепутывание, необходимо было бы выделить бесконечное число элементарных объемов когерентности в ЭПР-пучках. На практике телепортация никогда не является поточечной в пространстве и мгновенной во времени, но всегда происходит «в среднем» в пределах некоторой пространственной области и некоторого конечного временного интервала.

Используя выражения (11.5) и (11.3), для фурье-образа амплитуды шума $\hat{f}(\mathbf{q}, \Omega)$, фигурирующей в выражении (11.13), получим:

$$\hat{f}(\mathbf{q}, \Omega) = \xi^*(-\mathbf{q}, -\Omega) \hat{c}_1^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega) + \xi(\mathbf{q}, \Omega) \hat{c}_2(\mathbf{q}, \Omega), \quad (11.14)$$

где

$$\xi(\mathbf{q}, \Omega) = U(\mathbf{q}, \Omega) - V^*(-\mathbf{q}, -\Omega), \quad (11.15)$$

и операторы полей имеют вид:

$$\hat{c}_{1,2}(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \hat{a}_1(\mathbf{q}, \Omega) + \hat{a}_2(\mathbf{q}, \Omega)). \quad (11.16)$$

Здесь знак $+$ ($-$) соответствует индексу 1(2). Операторы $\hat{c}_{1,2}(\mathbf{q}, \Omega)$ отвечают унитарной суперпозиции двух независимых вакуумных полей на входах ОПУ; эти поля также находятся в вакуумном состоянии. Из (11.82) и (11.14) непосредственно следует, что операторы шума подчиняются коммутационным соотношениям классических полей:

$$\begin{aligned} [\hat{f}(\mathbf{q}, \Omega), \hat{f}^\dagger(\mathbf{q}', \Omega')] &= (2\pi)^3 \delta^2(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta(\Omega - \Omega') (|\xi(\mathbf{q}, \Omega)|^2 - |\xi(-\mathbf{q}, -\Omega)|^2) = 0, \\ [\hat{f}(\mathbf{q}, \Omega), \hat{f}(\mathbf{q}', \Omega')] &= 0, \end{aligned} \quad (11.17)$$

и, следовательно, могут рассматриваться как классические источники шума. В самом деле, как видно из (11.86), $|V(\mathbf{q}, \Omega)| = |V(-\mathbf{q}, -\Omega)|$, и функция $\xi(\mathbf{q}, \Omega)$ приобретает вид:

$$\xi(\mathbf{q}, \Omega) = e^{-i\phi(\mathbf{q}, \Omega)} \{ e^{-\tau(\mathbf{q}, \Omega)} \cos \psi(\mathbf{q}, \Omega) + i e^{\tau(\mathbf{q}, \Omega)} \sin \psi(\mathbf{q}, \Omega) \}. \quad (11.18)$$

В пространственно-временном представлении шумовое поле $\hat{F}(\boldsymbol{\rho}, t)$ можно записать как:

$$\hat{F}(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{\rho}_0 dt_0 \left\{ \xi^*(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, t - t_0) \hat{C}_1^\dagger(\boldsymbol{\rho}_0, t_0) + \right. \\ \left. + \xi(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, t - t_0) \hat{C}_2(\boldsymbol{\rho}_0, t_0) \right\}, \quad (11.19)$$

и корреляционные функции второго порядка для шумового поля представляются следующим образом:

$$\langle \hat{F}(\boldsymbol{\rho}, t) \hat{F}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', t') \rangle = G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', t - t'), \quad (11.20)$$

$$\langle \hat{F}(\boldsymbol{\rho}, t) \hat{F}(\boldsymbol{\rho}', t') \rangle = 0. \quad (11.21)$$

Фурье-образ функции Грина $G(\boldsymbol{\rho}, t)$ записывается в виде:

$$G(\mathbf{q}, \Omega) = |\xi(\mathbf{q}, \Omega)|^2 = e^{-2\tau(\mathbf{q}, \Omega)} \cos^2 \psi(\mathbf{q}, \Omega) + e^{2\tau(\mathbf{q}, \Omega)} \sin^2 \psi(\mathbf{q}, \Omega). \quad (11.22)$$

Статистика светового поля в наиболее общей форме определяется характеристическим функционалом, имеющим гауссовское распределение [14, 15] для поля шума (11.19). Между прочим, похожая функция Грина описывает корреляции фототока в пространстве и времени при гомодинном детектировании многомодового сжатого света [29].

В отсутствии сжатия и перепутывания $\tau(\mathbf{q}, \Omega) = 0$, и функция Грина имеет вид произведения δ -функций в пространстве и времени:

$$G(\boldsymbol{\rho}, t) = \delta(\boldsymbol{\rho}) \delta(t). \quad (11.23)$$

При наличии эффективного перепутывания с масштабами S_c , T_c и при оптимальной синхронизации фаз в схеме телепортации, $\psi(0, 0) = 0$, наряду с положительным δ -коррелированным слагаемым присутствует отрицательное слагаемое, являющееся следствием пространственно-временной антикорреляции на масштабах S_c , T_c . Как будет показано далее, эти пространственно-временные антикорреляции шумового поля приводят к подавлению шума в среднем.

Пространственные масштабы подавления шума чувствительны к поворотам эллипсов сжатия в зависимости от пространственной частоты, показанным на рис. 11.2, а. В представлении пространственных частот это очевидно объясняется поведением функций Грина (11.22), в которых усиленные квадратурные амплитуды шума присутствуют с весом $\propto \sin^2 \psi(\mathbf{q}, \Omega) \neq \sin^2 \psi(0, 0) = 0$. Разворот эллипсов сжатия нарастает при распространении вдоль кристалла и в свободном пространстве и приводит к дифракционному уширению области когерентности. Помещенная правильным образом отображающая линзовая система компенсирует этот разворот [22, 23], как показано на рис. 11.2, б, что приводит к оптимизации размера области когерентности S_c .

Для компенсации влияния дифракции линзы помещают непосредственно в ЭПР-пучки $\hat{E}_n$, $n = 1, 2$. В общем случае их действие описывается квадратичными по q фазовыми сдвигами $\theta_n(q) = \gamma_n q^2$:

$$\hat{E}_n(\mathbf{q}, \Omega) \rightarrow \tilde{\hat{E}}_n(\mathbf{q}, \Omega) = \hat{E}_n(\mathbf{q}, \Omega) e^{i\theta_n(q)}. \quad (11.24)$$

Учитывая эту фазовую коррекцию в выражениях (11.12) и (11.13), находим скорректированный угол ориентации $\psi(\mathbf{q}, \Omega) \rightarrow \tilde{\psi}(\mathbf{q}, \Omega) = \psi(\mathbf{q}, \Omega) + \theta(q)$, где $\theta(q) = (\theta_1(q) + \theta_2(q))/2$. Этот угол следует подставить в функцию Грина (11.22), $G(\mathbf{q}, \Omega) \rightarrow \tilde{G}(\mathbf{q}, \Omega)$. Наилучший результат, который можно получить с помощью линз (см. рис. 11.2, б), обеспечивается равенством:

$$\theta(q) = - \left[\frac{d^2 \psi}{dq^2} \right]_{q=0} q^2. \quad (11.25)$$

При таком выборе $\tilde{\psi}(\mathbf{q}, 0) \approx 0$ и $\tilde{G}(q, 0) \approx e^{-2r(q, 0)}$ в широком диапазоне значений q . С точки зрения физики, линзы компенсируют влияние дифракции на пространственном масштабе перепутывания.

Многомодовая телепортация всегда происходит «в среднем», т. е. в некоторой конечной пространственной области и в некотором конечном временном интервале. Следовательно, для того чтобы характеризовать выполнение телепортации количественно, необходимо ввести грубую шкалу описания входных и выходных переменных. Рассмотрим усреднение полевых переменных по пикселу S_j с площадью $S = \Delta^2$ и по временному окну T_i протяженности T :

$$\hat{A}_{\text{out}}(j, i) = \frac{1}{\sqrt{ST}} \int_{S_j} d\rho \int_{T_i} dt \hat{A}_{\text{out}}(\rho, t), \quad (11.26)$$

с аналогичным определением для входного поля. Усредненные полевые операторы подчиняются стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{A}_{\text{out}}(j, i), \hat{A}_{\text{out}}^\dagger(j', i')] = \delta_{j, j'} \delta_{i, i'}, \quad (11.27)$$

и, следовательно, соответствуют дискретной подсистеме полевых осцилляторов.

Теперь рассмотрим операторы квадратурных компонент поля на входе и на выходе системы:

$$\hat{X}_{\text{out/in}}^\varphi(j, i) = \hat{A}_{\text{out/in}}(j, i) e^{-i\varphi} + \hat{A}_{\text{out/in}}^\dagger(j, i) e^{i\varphi}, \quad (11.28)$$

$$\hat{Y}_{\text{out/in}}^\varphi(j, i) = -i\hat{A}_{\text{out/in}}(j, i) e^{-i\varphi} + i\hat{A}_{\text{out/in}}^\dagger(j, i) e^{i\varphi}. \quad (11.29)$$

Они соответствуют наблюдаемым, которые можно измерить высокоэффективной ССД-камерой методом гомодинного детектирования. Используя (11.12), получим:

$$\hat{X}_{\text{out}}^\varphi(j, i) = \hat{X}_{\text{in}}^\varphi(j, i) + \hat{\mathcal{X}}_\varphi(j, i), \quad (11.30)$$

$$\hat{Y}_{\text{out}}^\varphi(j, i) = \hat{Y}_{\text{in}}^\varphi(j, i) + \hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j, i), \quad (11.31)$$

где избыточный шум, добавленный в процессе телепортации к измеряемым квадратурам поля, имеет вид:

$$\hat{\mathcal{X}}_\varphi(j, i) = \frac{1}{\sqrt{ST}} \int_{S_j} d\rho \int_{T_i} dt \left[\hat{F}(\rho, t) e^{-i\varphi} + \hat{F}^\dagger(\rho, t) e^{i\varphi} \right], \quad (11.32)$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j, i) = \frac{1}{\sqrt{ST}} \int_{S_j} d\rho \int_{T_i} dt \left\{ -i \left[\hat{F}(\rho, t) e^{-i\varphi} - \hat{F}^\dagger(\rho, t) e^{i\varphi} \right] \right\}. \quad (11.33)$$

Эти операторы являются линейной комбинацией гауссовских случайных переменных, не зависящих от полей на входе. Следовательно, набор

$$\{ \hat{\mathcal{X}}_\varphi(j, i), \hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j, i) \}_{j, i}, \quad (11.34)$$

является набором классических гауссовских случайных переменных. Здесь $j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, K$ — это конечный набор индексов, нумерующий рассматриваемые пиксели и временные интервалы. Эти переменные не зависят от входных полей и имеют нулевые средние значения. Их статистические свойства полностью описываются в терминах матрицы парных корреляционных функций (корреляционной матрицы):

$$C(j, j'; i, i') = \langle \hat{\mathcal{X}}_\varphi(j, i) \hat{\mathcal{X}}_\varphi(j', i') \rangle = \langle \hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j, i) \hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j', i') \rangle. \quad (11.35)$$

Элементы корреляционной матрицы можно выразить через функцию Грина (11.22):

$$C(j, j'; i, i') = 2 \int d\mathbf{q} B_\Delta(\mathbf{q}) B_T(\Omega) \cos [\mathbf{q} \cdot (\rho_j - \rho_{j'}) - \Omega(t_i - t_{i'})] \tilde{G}(\mathbf{q}, \Omega), \quad (11.36)$$

где ρ_j задает положение центра j -го пикселя, а t_i — положение центра i -го временного интервала. Здесь $\tilde{G}(\mathbf{q}, \Omega)$ — функция Грина (11.22) с откорректированным значением угла ориентации $\tilde{\psi}(\mathbf{q}, \Omega) = \psi(\mathbf{q}, \Omega) + \theta(\mathbf{q})$ (см. (11.25)). В выражении (11.36) функции $B_\Delta(\mathbf{q})$ и $B_T(\Omega)$ возникают вследствие процедуры огрубления шкалы. Например, для квадратного пикселя размера $\Delta = \sqrt{S}$ они имеют вид:

$$B_\Delta(\mathbf{q}) = \frac{\Delta^2}{4\pi^2} \text{sinc}^2 \left(\frac{q_x \Delta}{2} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{q_y \Delta}{2} \right) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \infty} \delta(\mathbf{q}), \quad (11.37)$$

$$B_T(\Omega) = \frac{T}{2\pi} \text{sinc}^2 \left(\frac{\Omega T}{2} \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \delta(\Omega). \quad (11.38)$$

Корреляционная матрица (11.36) не зависит от фазы φ гомодина, используемого при детектировании, так что в любую квадратурную компоненту добавляется одинаковый шум.

Когда гауссовское распределение шума обладает очень малой шириной во всех направлениях фазового пространства, так что его можно представить в виде многомерной δ -функции Дирака, реализуется идеальная телепортация. Это происходит, когда временное окно T и размер пиксела Δ достаточно велики, так что функции (11.37) и (11.38) в интеграле (11.36) выделяют полосу временных и пространственных частот, лежащих заведомо внутри полосы сжатия, для которых $G(\tilde{q}, \Omega) \ll 1$. Когда размер пиксела Δ и временное окно T много больше, чем соответственно длина и время когерентности ОПУ l_c и T_c , получим:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty} C(j, j'; i, i') = 2\delta_{j,j'} \delta_{i,i'} \exp(-2r(0, 0)). \quad (11.39)$$

Кроме того, как и в одномодовом случае, чтобы достичь хорошего качества телепортации необходима большая степень ЭПР-корреляции (большое значение параметра сжатия r).

Для широкополосного ОПУ, длина кристалла которого порядка единиц миллиметров, время когерентности составляет от фемтосекунд до пикосекунд, так что обычно время детектирования на несколько порядков превосходит по величине время когерентности. Следовательно, в (11.36) разумно предположить, что $T \gg T_c$. В этом пределе шум, добавляемый в схеме телепортации не коррелирован во времени:

$$C(j, j'; i, i') = \langle \hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j, i) \hat{\mathcal{Y}}_\varphi(j', i') \rangle = \delta_{i,i'} C(j, j'). \quad (11.40)$$

Однако, для рассмотрения в пространстве это не так. Например, для ОПУ с кристаллом длиной 3 мм, при $\lambda = 0,712$ мкм, и при выборе поперечной длины дифракционного расплывания l_d на выходе кристалла в качестве грубой оценки для длины когерентности l_c , получаем:

$$l_c \sim l_d = \sqrt{l/2k} = 13 \text{ мкм}. \quad (11.41)$$

Учитывая, что пространственная протяженность в поперечной плоскости, где существуют ЭПР-корреляции, ограничена размером пятна накачки, выбор $\Delta \gg l_c$ был бы равносильен интегрированию по всему поперечному сечению пучка и потере всей пространственной информации.

На рис. 11.6 иллюстрируется влияние размера пиксела на шум, добавляемый в процессе телепортации. Говоря точнее, некоторые элементы корреляционной матрицы, рассчитанные численно в пределе $T \gg T_c$, построены в зависимости от отношения размера пиксела к дифракционной длине $D = \Delta/l_d$, где l_d определено выражением (11.41). Так как наша система обладает полной трансляционной симметрией, элементы корреляционной матрицы $C(j, j')$ зависят только от относительного расстояния и от ориентации пикселов, связанных с разностью радиус-векторов $(\rho_j - \rho_{j'})$. В частности, все диагональные элементы $C(j, j)$ имеют одно и то же значение. На рис. 11.6, а показан диагональный элемент $C(j, j)$ корреляционной матрицы. Сплошные широкая и узкая кривые соответствуют наблюдению без компенсации дифрак-

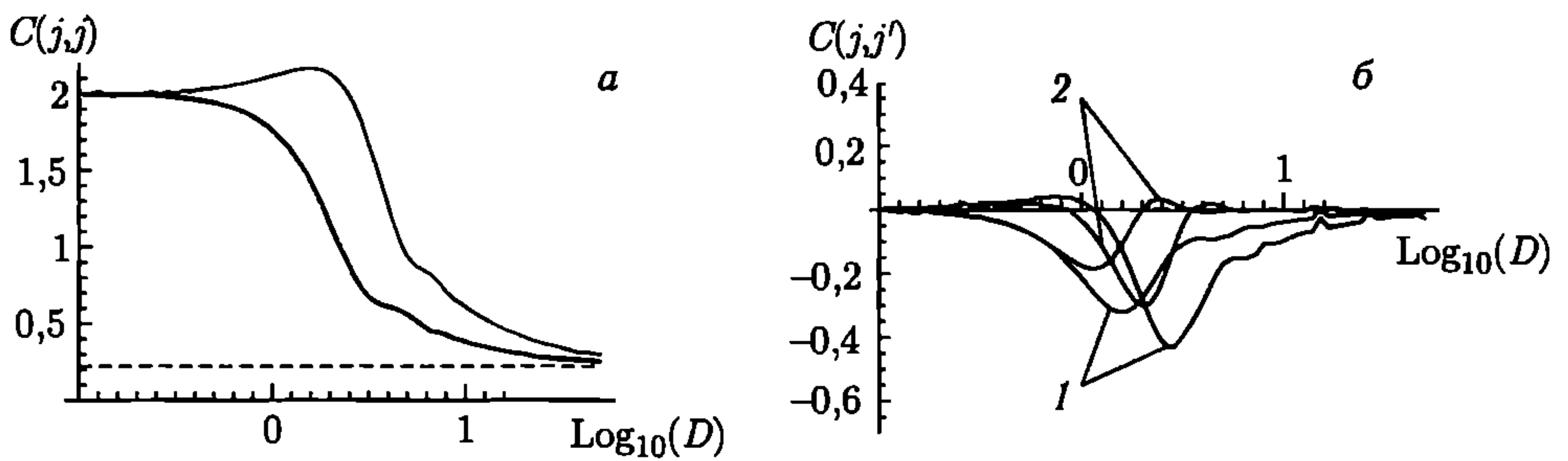


Рис. 11.6. Элементы корреляционной матрицы шума, добавляющегося в схеме телепортации, в зависимости от $D = \Delta/l_d$. Параметр сжатия $\exp[r(0,0)] = 3$. На рис. 11.6, а показан диагональный элемент $C(j, j)$ корреляционной матрицы при наблюдении без корректирующей линзы (тонкая линия) и с линзой (жирная линия). На рис. 11.6, б приведены недиагональные элементы $C(j, j')$ при $|\rho_j - \rho_{j'}| = \Delta$ (кривая 1) и при $|\rho_j - \rho_{j'}| = \sqrt{2}\Delta$ (кривая 2). Тонкие и жирные линии имеют тот же смысл, что и на рис. 11.6, а

ционного фазового сдвига (тонкая линия) и с компенсацией (жирная линия), выполненной с помощью линзы. В обоих случаях при малом размере пиксела $C(j, j) \rightarrow 2$, когда доминирует вклад высокочастотных фурье-компонент шумового поля с $q \gg q_c$, остающихся в вакуумном состоянии, наблюдается стремление графиков диагональных элементов к классическому пределу $C(j, j) \rightarrow 2$. С другой стороны, когда размер пиксела становится того же порядка по величине, что и длина когерентности, как широкая, так и узкая кривые быстро достигают предела $C(j, j) \rightarrow 2 \exp[-2r(0,0)]$ (пунктирная линия), означающего $\Delta \rightarrow \infty$ в (11.39) и соответствующего пределу одномодовой квантовой телепортации. Такое поведение можно сравнить с корреляционной матрицей шума в схеме классической телепортации, т.е. в отсутствии ЭПР-корреляций. Тогда $r(q, \Omega) = 0$, $C_{cl}(j, j') = 2\delta_{j, j'}$, и $C_{cl}(j, j) = 2$. В этом пределе, также как в случае одномодовой телепортации, на каждом пикселе добавляются две единицы квантового шума [8].

На рис. 11.6, б показаны некоторые недиагональные элементы корреляционной матрицы в зависимости от Δ/l_d . Здесь продемонстрированы корреляции между соседними пикселями матрицы детектора, принадлежащими одной колонке или одному столбцу, так что $|\rho_j - \rho_{j'}| = \Delta$ (кривая 1), и между пикселями, расположенными по диагонали $|\rho_j - \rho_{j'}| = \sqrt{2}\Delta$ (кривая 2). Как видно из этих рисунков, когда размер пиксела мал по сравнению с длиной когерентности, схема телепортации не только добавляет шум на каждом из пикселей (как и в одномодовой схеме), но и вносит корреляции между пикселями. Для многомодового сжатого света характерно существование пространственных корреляций на расстояниях порядка длины когерентности, что было подробно изучено, например, в [29, 30].

11.3.4. Полная и редуцированная верность голографической телепортации. Используя (11.30) можно получить в явном виде связь между пространственно-временными корреляционными функциями квадратур поля

на выходе и на входе:

$$\langle \delta \hat{X}_{\text{out}}^{\varphi}(j, i) \delta \hat{X}_{\text{out}}^{\varphi}(j', i') \rangle = \langle \delta \hat{X}_{\text{in}}^{\varphi}(j, i) \delta \hat{X}_{\text{in}}^{\varphi}(j', i') \rangle + C(j, j'; i, i'). \quad (11.42)$$

Поскольку все элементы $C(j, j')$ малы при условии $\Delta \geq l_c$, телепортация сохраняет пространственно-временные корреляции между пикселями. То же верно и для корреляционных функций более высокого порядка, так как добавляемый шум — гауссовый и не зависит от поля на входе.

Этот вывод основывается на анализе мощности добавленного шума. В литературе рассматриваются и другие критерии квантовой телепортации (см., например, [6]).

Качество реконструкции квантового состояния входного поля $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ в процессе телепортации обычно характеризуют параметром верности F . Для простоты мы рассмотрим здесь верность¹⁾ телепортации чистого квантового состояния, которая определяется выражением:

$$F = |\langle \Psi_{\text{in}} | \Psi_{\text{out}} \rangle|^2. \quad (11.43)$$

Это определение хорошо работает для телепортации одной степени свободы квантованного поля. Но в нашем случае квантовой телепортации многомодового светового поля, распределенного в пространстве и времени, применение определения (11.43) сталкивается с некоторыми очевидными трудностями, являющимися следствием многомодовой природы поля. Предположим, например, что входное телепортируемое состояние не обладает корреляциями в пространстве и времени (как, например, когерентное изображение), и что протокол телепортации не добавляет никаких корреляций между пространственными и/или временными модами (это происходит при достаточно больших временном окне и размере пикселя детектирования). В этом случае полная верность телепортации факторизуется, превращаясь в произведение одномодовых верностей. Даже если каждая мода телепортируется с почти идеальной верностью, близкой, но слегка меньшей единицы, полная верность в пределе большого числа мод будет близка к нулю, а для бесконечно большого числа мод всегда будет стремиться к нулю. Поэтому в случае квантовой телепортации многомодового поля важно определить соответствующий набор степеней свободы и ввести понятия редуцированной верности для этого набора степеней свободы и средней верности на каждую моду.

Можно сформулировать альтернативное определение верности в терминах суперпозиции функций Вигнера, описывающих состояние на входе и на выходе (см., например, [5]). Обсуждение вопроса о верности телепортации для многомерного квантового объекта (такого как квантовое изображение) приведено в [15]. Можно в явном виде рассчитать верность для гауссовых входных состояний (т.е. сжатых состояний, когерентных состояний, ЭПР-пучков); для них без потери общности предполагаем, что

$$\langle \hat{X}_{\text{in}}(j, i) \rangle = \langle \hat{Y}_{\text{in}}(j, i) \rangle = 0, \quad (11.44)$$

¹⁾ См. примечание в разд. 11.3.

и

$$\begin{aligned}\langle \hat{X}_{\text{in}}(j, i) \hat{X}_{\text{in}}(j', i') \rangle &= V^X(j, j'; i, i'), \\ \langle \hat{Y}_{\text{in}}(j, i) \hat{Y}_{\text{in}}(j', i') \rangle &= V^Y(j, j'; i, i')\end{aligned}\quad (11.45)$$

— корреляционная матрица входного поля. Тогда верность можно найти в виде:

$$F = \frac{1}{\det \left[V^X(j, j'; i, i') + \frac{1}{2} C(j, j'; i, i') \right]^{\frac{1}{2}}}} \times \frac{1}{\det \left[V^Y(j, j'; i, i') + \frac{1}{2} C(j, j'; i, i') \right]^{\frac{1}{2}}}}. \quad (11.46)$$

В частности, для многомодового когерентного состояния на входе

$$V^X(j, j'; i, i') = V^Y(j, j'; i, i') = \delta_{j, j'} \delta_{i, i'},$$

и

$$F = \frac{1}{\det \left[\delta_{j, j'} \delta_{i, i'} + \frac{1}{2} C(j, j'; i, i') \right]}}. \quad (11.47)$$

Этот результат следует сравнивать с результатом классической телепортации, т. е. телепортации в отсутствии ЭПР-корреляций, когда $C_{cl}(j, j'; i, i') = 2\delta_{j, j'} \delta_{i, i'}$. Для когерентного состояния на входе в классическом случае получим:

$$F_{cl} = \frac{1}{2^{N \times K}}. \quad (11.48)$$

Эти формулы проясняют утверждение, сделанное в начале этого раздела: полная верность может быстро убывать до нуля при большом числе степеней свободы и, следовательно, теряет роль количественной оценки. Разумная стратегия заключается в выделении существенных степеней свободы системы. Например, если телепортируемое состояние представляет собой квантовое состояние когерентного изображения, ограниченного массивом N_d пикселей, вероятно, никого не интересует качество телепортации вакуумного состояния в области пространства вне изображения.

Поскольку предполагается, что накачка осуществляется плоской волной, модель трансляционно инвариантна в пространстве и времени, и число возможных пикселей и временных интервалов в принципе бесконечно. Такой вид модели хорошо описывает реальную систему при условии, что поперечный размер пучка накачки много больше, чем область когерентности усилителя, и что длительность импульса накачки много больше, чем время когерентности усилителя [25]. Очевидно, необходимо также потребовать, чтобы пучок, состояние которого телепортируется, заведомо попадал в область (в пространстве и во времени), где возможно существенное параметрическое усиление.

Предположим, что наша система разделяется на две подсистемы, назовем их A и B , где подсистема A отвечает набору $\{j, i\}_A$ пикселей и временных интервалов, связанных с данным измерением, а подсистема B состоит из оставшихся $\{j, i\}_B$ пикселей и временных интервалов. Беря след по степеням свободы подсистемы B , можно показать [15], что выражения (11.46) и (11.47) остаются справедливыми для верности F_A редуцированного набора степеней свободы, при условии, что корреляционная матрица в этих формулах состоит из парных корреляторов операторов, определенных на пикселях и временных интервалах подсистемы A .

На рис. 11.7 показана редуцированная верность в зависимости от размера пикселя и от числа пикселей для некоторых простейших структур пикселей в случае когерентного изображения на входе. Предполагается, что при наблюдении используется одно и то же временное окно, так что размерность корреляционной матрицы в нашем случае определяется числом пикселей в структуре. Такое предположение адекватно для однократного ОПУ, поскольку на практике, чтобы обеспечить высокий коэффициент усиления, используют импульсный режим. Следовательно, временное окно измерения оказывается того же порядка по величине, что и продолжительность импульса накачки или больше. Отметим, что в случае резонаторной конфигурации такое предположение может оказаться неверным, поскольку непрерывный режим генерации позволяет разрешать временные степени свободы.

Вид картин в случаях 1, 2 и 4 пикселей показан на рис. 11.7 сверху. Результаты численного расчета F_A с помощью выражения (11.46) при степени сжатия $\exp[r(0,0)] = 3$ построены в зависимости от отношения размера пикселя к дифракционной длине $D = \Delta/l_d$. Для этих структур важны только диагональные элементы корреляционной матрицы $C(j, j)$, а также элементы, описывающие корреляции между ближайшими соседними пикселями в столбце, строке и по диагонали. Жирная и тонкая сплошные кривые соответствуют наблюдению с компенсацией дифракционного фазового сдвига с помощью линз (жирная кривая) и без нее (тонкая кривая). При малом размере пикселей $D \ll 1$ все кривые достигают классического предела $F_N \rightarrow 0,5^N$. При большом размере пикселей $D \gg 1$ кривые стремятся к пределу, определяемому степенью сжатия: $F_N \rightarrow (1 + \exp[-2r(0,0)])^{-N} = 0,9^N$ (в нашем примере). Как видно из рис. 11.7, верность телепортации убывает с увеличением числа пикселей. Качественно это значит, что наблюдаемые при многопиксельном измерении, зависящие от корреляций между пикселями, более чувствительны к отсут-

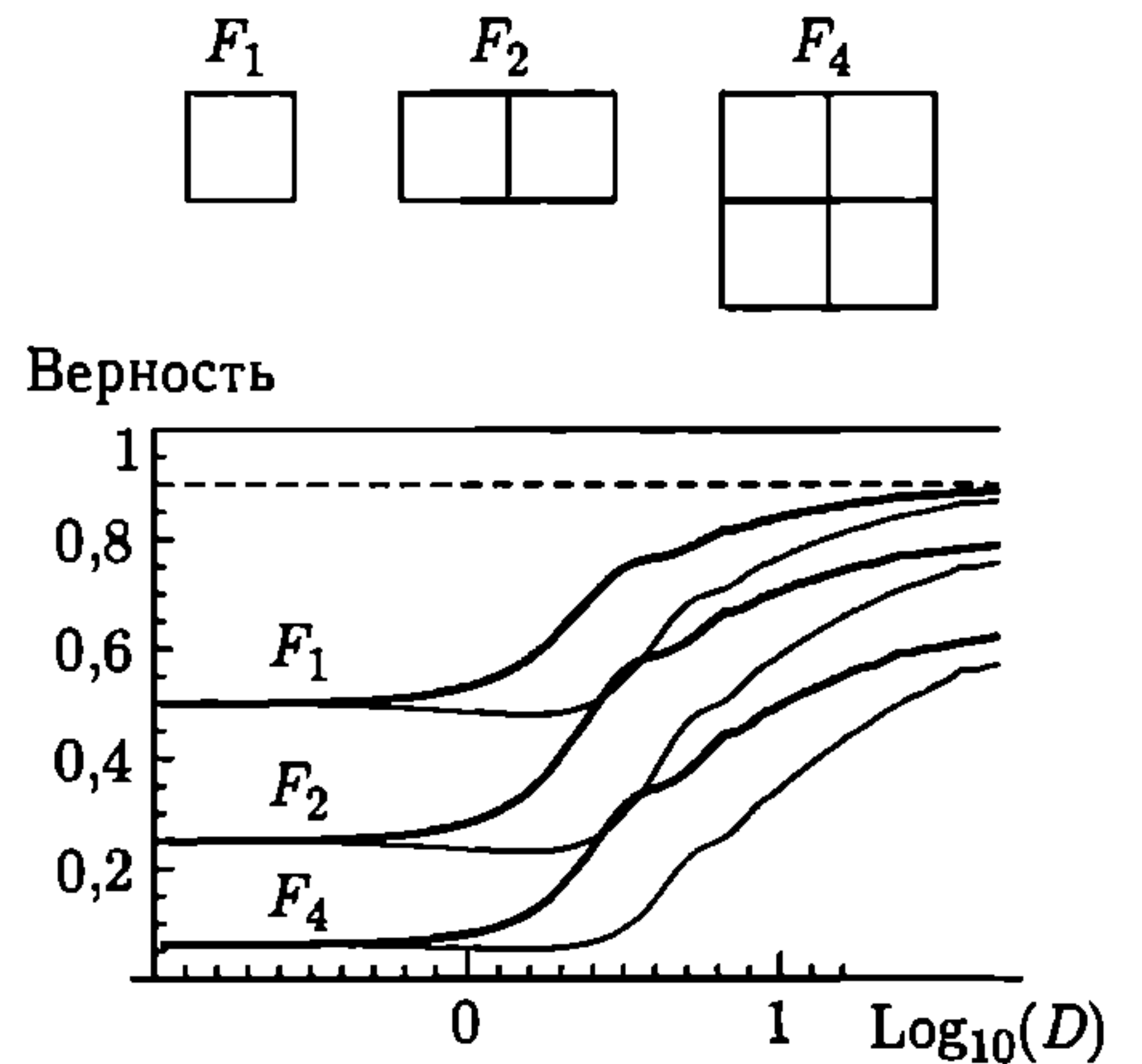


Рис. 11.7. Редуцированная верность квантовой голографической телепортации для картин из 1, 2 и 4 пикселей, показанных наверху рисунка (F_1 , F_2 и F_4 соответственно), в зависимости от $D = \Delta/l_d$. Параметр сжатия $\exp[r(0,0)] = 3$

ствию перепутывания в квантовом канале, чем наблюдаемые для одного пиксела.

Эффект оптимизации пространственной шкалы с помощью линз в рассматриваемом протоколе телепортации существенен для пикселей с размерами $\Delta \approx l_c$. Как показано на рис. 11.7, оптимизация позволяет достичь того же значения верности при размерах пиксела в 2–3 раза меньше, чем в отсутствие оптимизации.

Из вида кривых на рис. 11.7 ясно, что верность для N степеней свободы определена в масштабе степенной функции с показателем N . Таким образом, удобной величиной для оценки редуцированной верности F_N для большого массива пикселей $N \gg 1$ является средняя верность на пиксел, определенная как

$$F_{av} = (F_N)^{\frac{1}{N}}. \quad (11.49)$$

Здесь рассматривается одна временная степень свободы $K = 1$. Для большого $N = M \times M$ массива квадратных пикселей корреляционная матрица становится трансляционно инвариантной и может быть диагонализирована [15] с помощью дискретного преобразования Фурье. На рис. 11.8 показано поведение средней верности на пиксел при квантовой телепортации большого массива пикселей в когерентном состоянии. Редуцированная верность F_1 для одного пиксела (рис. 11.7) и средняя верность на каждом пикселе F_{av} стремятся к одинаковым предельным значениям при больших и малых размерах пиксела и слегка отличаются при средних размерах $\Delta \propto l_d$, что отражает влияние на величину F_{av} кросс-корреляций шумового поля на близко расположенных пикселах.

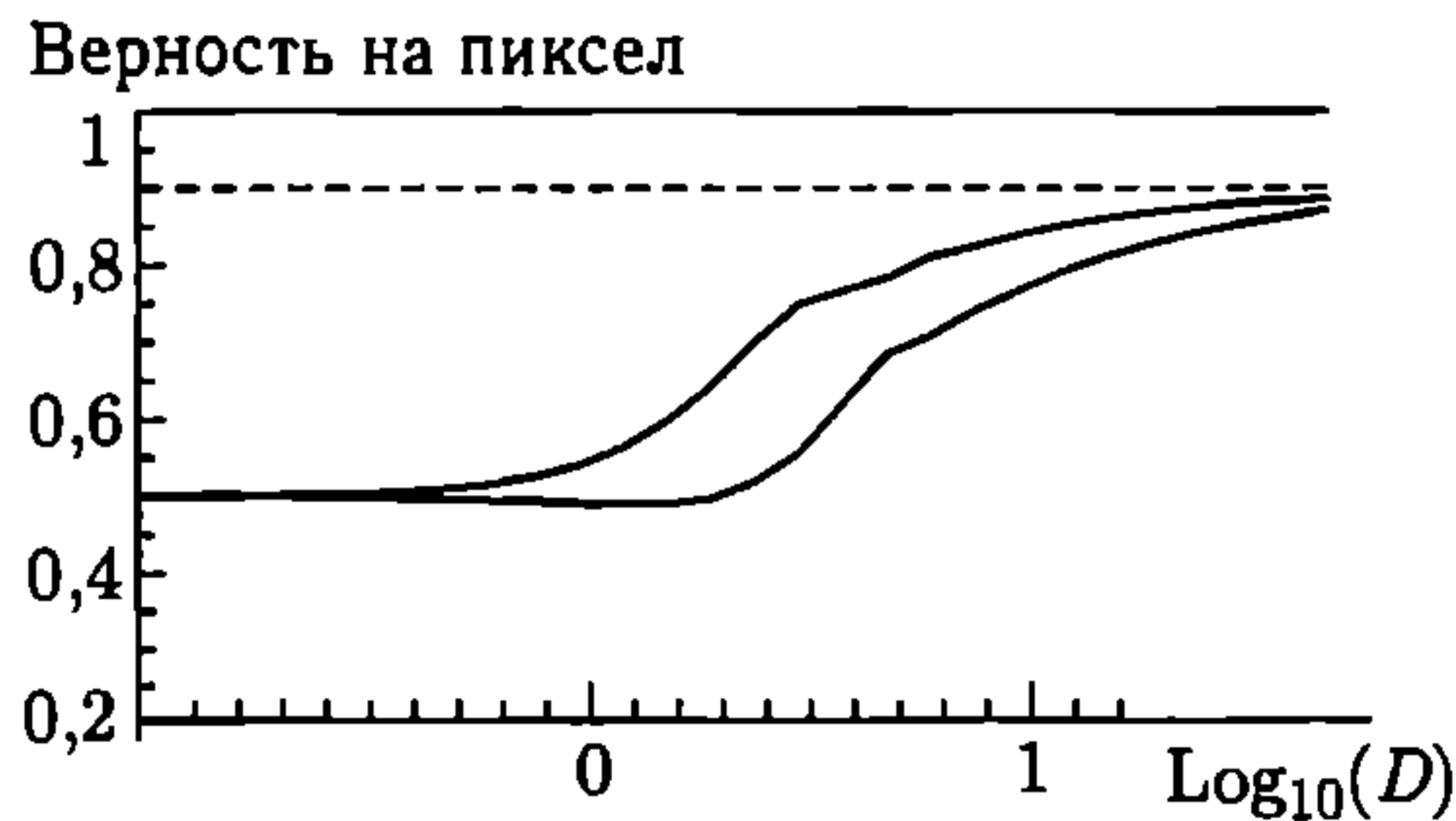


Рис. 11.8. Средняя верность на пиксел при квантовой голографической телепортации большого числа пикселей в когерентном состоянии, в зависимости от $D = \Delta/l_d$. Параметр сжатия равен $\exp[r(0,0)] = 3$

11.3.5. Квантовая голографическая телепортация и голография.

Квантовую телепортацию оптических изображений, описанную в этой главе, можно назвать *квантовой голографической телепортацией*. На это трехмерное обобщение протокола телепортации для непрерывных переменных [4, 8] можно смотреть как на распространение в область квантовой физики обычной нестационарной голографии.

Как и в голографии, распределенное в пространстве и времени входное поле смешивается с опорными волнами. Классические плотности фототоков $I_x(\rho, t)$ и $I_y(\rho, t)$ эквивалентны нестационарным голограммам.

В элементарных голографических схемах обычно выполняют оптическое смешение сигнальной волны только с одной опорной волной. Создается и используется одна голограмма для восстановления поля. В общем случае это ведет к потере информации, переносимой квадратурой поля, ортогональной опорной волне и к восстановлению сигнальной волны в виде суперпозиции с ее сопряженной копией. Чтобы улучшить эту простейшую схему можно разделить входную волну с помощью симметричного светоделителя и записать обе квадратурные компоненты сигнального поля. Обе квадратурные компоненты восстановленной волны могут быть получены как суперпозиция выходных полей двух голограмм, освещенных двумя плоскими лазерными волнами сдвинутыми одна относительно другой на $\lambda/4$. Эта улучшенная конфигурация есть не что иное как схема, изображенная на рис. 11.5, но без освещения двумя ЭПР-полями.

Хотя в классическом подходе правый входной порт светоделителя $СД_2$ и нижний входной порт зеркала $М$ не задействованы (не освещаются), в квантовом описании необходимо принимать во внимание вакуумный шум полей, падающих на светоделители.

Новая особенность, превращающая голографию в квантовую голографическую телепортацию заключается в использовании пары многомодовых ЭПР-пучков, распределенных между Алисой и Бобом. Как показывает обсуждение, проведенное в этой главе, только полная поточечная корреляция и полная корреляция между моментами времени на квантовом уровне в этих полях позволяет эффективно подавлять квантовый шум при телепортации поля. В практической реализации, необходимо обеспечить точный синхронизм ЭПР-полей в пространстве и во времени.

Обсуждавшиеся выше пределы для квантового шума и верности квантовой голографической телепортации оптических изображений можно рассматривать как улучшение квантовых пределов голографического восстановления пространственно распределенной световой волны, достигаемое в присутствии *квантового канала*: пары перепутанных (коррелированных на квантовом уровне) пространственно многомодовых световых пучков.

Аналогия между телепортацией и голографией, отмеченная в контексте одномодовых полей [31], в приложении к изображениям становится полной и точной.

11.4. Квантовое плотное кодирование оптических изображений

В подразделах 11.4.1 и 11.4.2 этой главы мы дадим обзор основ квантового плотного кодирования и представим модель квантового плотного кодирования оптических изображений, где будем предполагать произвольно большой поперечный размер распространяющихся пучков света и неограниченное пространственное разрешение схемы фоторегистрации.

Будет введено понятие взаимной информации Шеннона для потока классических входных изображений в когерентном состоянии (см. подразд. 11.4.3). Важной характеристикой является пространственно-временная плотность потока информации, измеряемая в битах на $см^2 \cdot с$. Эта плотность зависит от степени сжатия и перепутывания неклассического облучающе-

го поля. В этом протоколе важную роль играют два набора пространственно-временных параметров: 1) поперечная длина когерентности и время когерентности пространственно многомодового сжатия и перепутывания; 2) пространственно-временные характеристики потока входных изображений. В изложенном рассмотрении предполагается, что отправитель (Алиса) изготавливает однородный ансамбль изображений с гауссовой статистикой, характеризуемый определенным разрешением в пространстве и во времени (зерно Алисы).

В подразд. 11.4.4 обсуждается пропускная способность информационного канала в схеме плотного кодирования оптических изображений. При рассмотрении оптических изображений одно из ограничений на плотность информационного потока связано дифракцией. Мы покажем, как влияние дифракции можно частично скомпенсировать линзами, помещенными в схему правильным образом. Покажем, что информационная пропускная способность, приходящаяся на каждую из введенных должным образом степеней свободы, согласуется с общими оценками квантового плотного кодирования.

Важное отличие идеального классического коммуникационного канала (т. е. канала, в котором на входе схемы вместо пространственно многомодового перепутанного света присутствуют вакуумные флуктуации) от его квантового аналога состоит в том, что в квантовом случае существует оптимальная пространственная плотность элементов сигнального изображения, которая должна быть согласована с пространственной полосой частот перепутанного света.

11.4.1. Основы квантового плотного кодирования. На рис. 11.9 показаны две возможные схемы линии связи между Алисой (отправителем) и Бобом (получателем). Обе схемы основаны на использовании двух параллельных каналов, но в схеме обычного кодирования (рис. а) каналы независимы, а в схеме плотного кодирования (рис. б) принципиально важно, что объекты 1 и 2, распространяющиеся в каналах, находятся в перепутанном состоянии.

В случае обычного кодирования входное квантовое состояние двух каналов является произведением по каналам, $|\psi^{(in)}\rangle_{1,2} = |\psi^{(in)}\rangle_1 |\psi^{(in)}\rangle_2$. Алиса независимо готовится каждый из объектов 1 и 2 в любых N ортогональных квантовых состояниях. Боб детектирует результирующее состояние $|\psi_n\rangle_1 |\psi_m\rangle_2$, $n, m = 1, \dots, N$, путем независимых измерений в обоих каналах. Очевидно, это позволяет передать за один цикл любую из букв алфавита, составленного из N^2 букв.

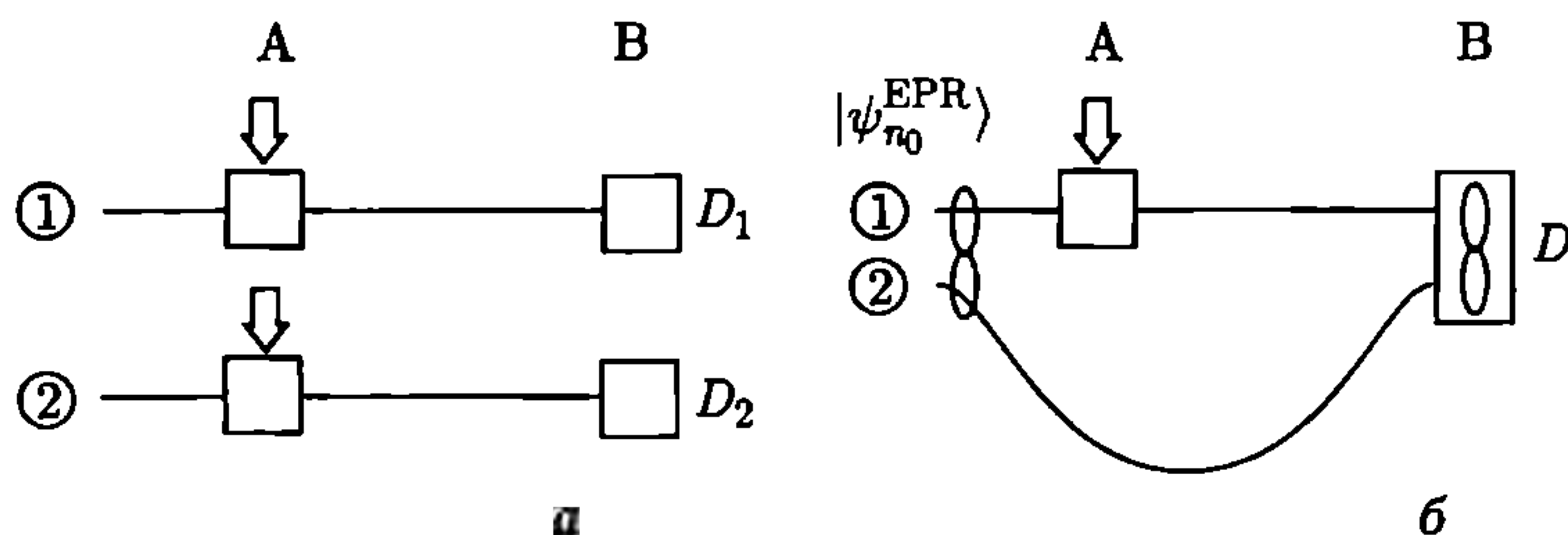


Рис. 11.9. Схема обычного (а) и плотного (б) кодирования

В схеме плотного кодирования входное состояние двух каналов — это одно из квантовых перепутанных состояний $|\psi^{(\text{in})}\rangle_{1,2} = |\psi_{n_0}^{\text{EPR}}\rangle_{1,2}$. Полный набор ортогональных ЭПР-состояний для двух каналов содержит N^2 состояний $|\psi_n^{\text{EPR}}\rangle_{1,2}$, $n = 1, \dots, N^2$. Важная особенность ЭПР-базиса состоит в том, что Алиса может приготовить любое из N^2 состояний физически оперируя только с одним из двух каналов и оставляя второй незатронутым. В схеме плотного кодирования Боб измеряет квантовые ЭПР-состояния полученного сигнала с помощью ЭПР-детектора. Это обеспечивает равные пропускные способности двух схем — N^2 букв за один цикл, без какого-либо физического воздействия во втором вспомогательном канале в случае плотного кодирования.

С точки зрения физики, при наличии перепутывания вспомогательный канал служит оптимальной системой отсчета для детектирования слабых физических воздействий, производимых Алисой в канале 1.

11.4.2. Оптическая схема для квантового плотного кодирования изображений. Оптическая схема, осуществляющая протокол плотного кодирования оптических изображений в непрерывных переменных, изображена на рис. 11.10. По сравнению с исходной схемой плотного кодирования в непрерывных переменных [11], здесь предполагается, что световые поля — пространственно многомодовые. На входе пространственно многомодовые сжатые световые пучки с медленными амплитудами $\hat{S}_1(\rho, t)$ и $\hat{S}_2(\rho, t)$ (мы используем представление Гейзенберга) смешиваются на симметричном светоделителе СД_1 . При правильно выбранной ориентации эллипсов сжатия входных полей, рассеянные светоделителем поля $\hat{E}_1(\rho, t)$ и $\hat{E}_2(\rho, t)$ находятся в перепутанном состоянии, и их квадратурные компоненты коррелированы, как показано на рис. 11.3 и 11.10.

Классическое поле сигнального изображения $\hat{A}(\rho, t)$ создается Алисой в первом пучке, например, посредством контролируемого смесителя Mod (с заданным разрешением в пространстве-времени), который почти полностью пропускает неклассическое поле $\hat{E}_1(\rho, t)$. Получатель (Боб) измеряет перепутанное состояние двух пучков путем оптического смешения на симметричном выходном светоделителе СД_2 и гомодинного детектирования квадратурных

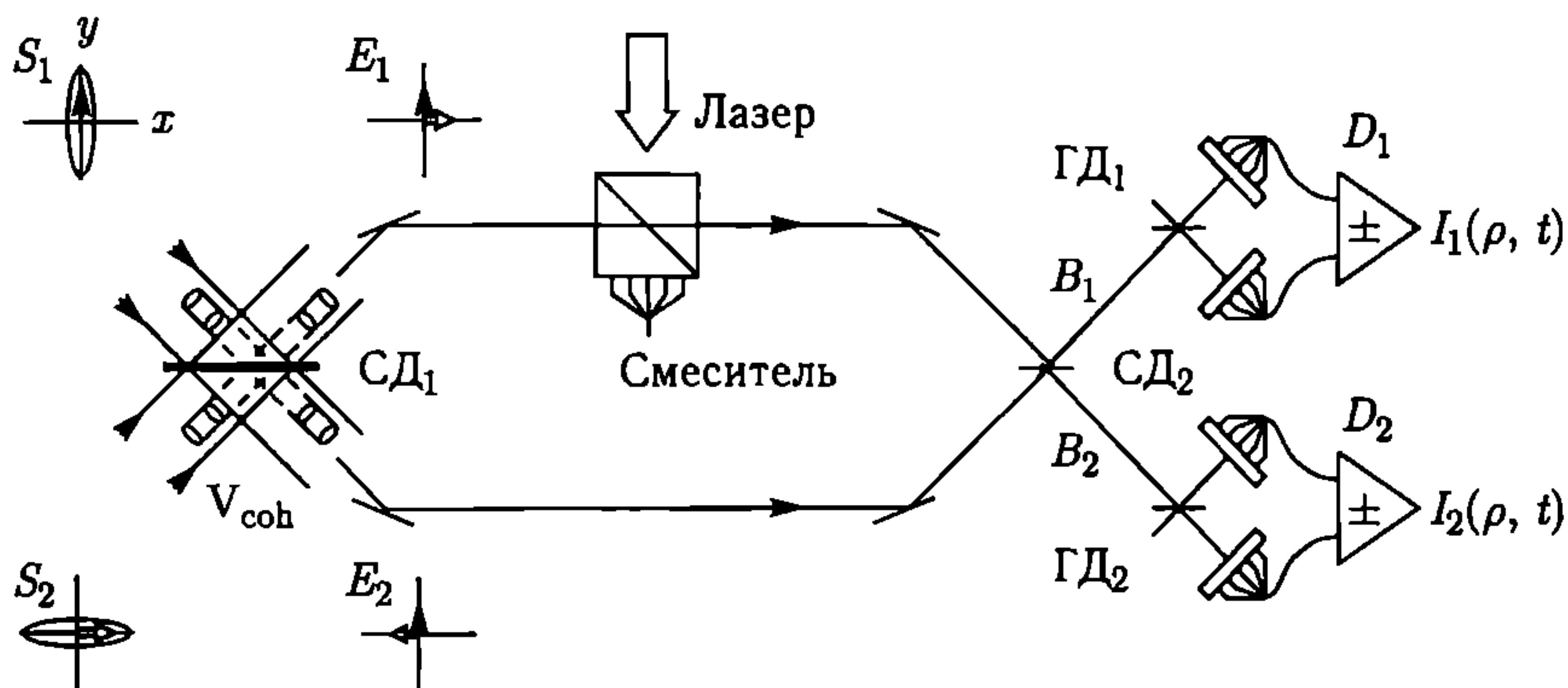


Рис. 11.10. Оптическая схема для пространственно многомодового плотного кодирования

компонент выходных полей $\hat{B}_1(\rho, t)$ и $\hat{B}_2(\rho, t)$. Это позволяет измерить обе квадратурные компоненты поля изображения на фоне эффективно подавленного квантового шума.

Можно привести более наглядное объяснение того, что сигнал в схеме, изображенной на рис. 11.10, детектируется на уровне шумов подавленных ниже дробового. Для симметричной матрицы светоделиителя

$$\{R_{nm}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (11.50)$$

и равных оптических путей обоих пучков, интерферометр Маха–Цендера направляет входное сжатое поле $\hat{S}_1(\rho, t)$ на детектор D_1 , и, аналогично, для $\hat{S}_2(\rho, t)$, позволяя таким образом измерять сжатые квадратурные компоненты с шумом ниже дробового уровня в обоих пучках.

Поля на входе гомодинных детекторов имеют вид:

$$\hat{B}_n(\rho, t) = \hat{S}_n(\rho, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{A}(\rho, t), \quad (11.51)$$

где $n = 1, 2$. В параксиальном приближении медленные амплитуды световых полей $\hat{B}_n(\rho, t)$ связаны с операторами рождения и уничтожения фотонов $\hat{b}_n^\dagger(\mathbf{q}, \Omega)$ и $\hat{b}_n(\mathbf{q}, \Omega)$ для плоских волн с поперечной компонентой волнового вектора $\mathbf{q}$ и частотой Ω следующим образом:

$$\hat{B}_n(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{L^2 T}} \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \hat{b}_n(\mathbf{q}, \Omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \rho - \Omega t)}. \quad (11.52)$$

В этом разделе информационная пропускная способность данной схемы будет характеризоваться с помощью плотности информационного потока, измеряемой в битах на $\text{см}^2 \cdot \text{с}$. Для того чтобы ввести эту относительную величину, удобно рассмотреть большой объем квантования с поперечным и продольным размерами L и cT . Суммирование выполняется по следующим значениям $\mathbf{q}$ и Ω : $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$, $q_x = \frac{2\pi}{L} n_x$, $q_y = \frac{2\pi}{L} n_y$ и $\Omega = \frac{2\pi}{T} n$, где n_x, n_y и n принимают целочисленные значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Коммутационные соотношения в свободном пространстве записываются в виде:

$$\begin{aligned} [\hat{B}_n(\rho, t), \hat{B}_{n'}^\dagger(\rho', t')] &= \delta_{n, n'} \delta(\rho - \rho') \delta(t - t'), \\ [\hat{b}_n(\mathbf{q}, \Omega), \hat{b}_{n'}^\dagger(\mathbf{q}', \Omega')] &= \delta_{n, n'} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \delta_{\Omega, \Omega'}. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Величина освещенности (в фотонах на $\text{см}^2 \cdot \text{с}$) равна $\hat{B}_n^\dagger(\rho, t) \hat{B}_n(\rho, t)$, а число фотонов в полевой моде $(\mathbf{q}, \Omega)$, локализованной в объеме квантования $L^2 cT$, равно $\hat{b}_n^\dagger(\mathbf{q}, \Omega) \hat{b}_n(\mathbf{q}, \Omega)$. Наблюдаемые плотности фототока рассматриваются в этом разделе как непрерывные в пространстве и во времени переменные,

т. е. предполагается, что детекторы обладают произвольно высокой степенью разрешения и влияние конечного размера пиксела матрицы ССD-камеры на информационную пропускную способность не рассматривается. Плотности фототоков

$$\begin{aligned}\hat{I}_1(\rho, t) &= B_0 [\hat{B}_1(\rho, t) + \hat{B}_1^\dagger(\rho, t)], \\ \hat{I}_2(\rho, t) &= B_0 \frac{1}{i} [\hat{B}_2(\rho, t) - \hat{B}_2^\dagger(\rho, t)],\end{aligned}\tag{11.54}$$

имеют следующие фурье-амплитуды:

$$\begin{aligned}\hat{i}_1(\mathbf{q}, \Omega) &= B_0 [\hat{b}_1(\mathbf{q}, \Omega) + \hat{b}_1^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega)], \\ \hat{i}_2(\mathbf{q}, \Omega) &= B_0 \frac{1}{i} [\hat{b}_2(\mathbf{q}, \Omega) - \hat{b}_2^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega)],\end{aligned}\tag{11.55}$$

где величина B_0 (выбранная вещественной) и iB_0 — амплитуды гомодинов, используемых в схеме детектирования (см. обсуждение в Приложении В). Здесь и далее фурье-амплитуды полей и плотностей фототока будут обозначаться строчными буквами.

Преобразование сжатия, выполняемое оптическими параметрическими усилителями, освещающими входы схемы, можно записать в виде (см. разд. 11.2 и Приложение А):

$$\hat{s}_n(\mathbf{q}, \Omega) = U_n(\mathbf{q}, \Omega) \hat{c}_n(\mathbf{q}, \Omega) + V_n(\mathbf{q}, \Omega) \hat{c}_n^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega),\tag{11.56}$$

где коэффициенты $U_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и $V_n(\mathbf{q}, \Omega)$ зависят от амплитуд поля накачки ОПУ, их нелинейных восприимчивостей и выполненных в ОПУ условий фазового согласования. Предполагается, что входные поля ОПУ $\hat{c}_n(\mathbf{q}, \Omega)$ находятся в вакуумном состоянии.

Проведя некоторые вычисления, получим для фурье-амплитуд плотностей фототоков:

$$\hat{i}_n(\mathbf{q}, \Omega) = B_0 \{ \hat{f}_n(\mathbf{q}, \Omega) + a_n(\mathbf{q}, \Omega) \},\tag{11.57}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\mathbf{q}, \Omega) &= [e^{r_1(\mathbf{q}, \Omega)} \cos \psi_1(\mathbf{q}, \Omega) + i e^{-r_1(\mathbf{q}, \Omega)} \sin \psi_1(\mathbf{q}, \Omega)] e^{-i\phi_1(\mathbf{q}, \Omega)} \hat{c}_1(\mathbf{q}, \Omega) + \\ &+ [\text{э. с.}, (\mathbf{q}, \Omega) \rightarrow (-\mathbf{q}, -\Omega)],\end{aligned}\tag{11.58}$$

и

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(\mathbf{q}, \Omega) &= [e^{-r_2(\mathbf{q}, \Omega)} \cos \psi_2(\mathbf{q}, \Omega) + i e^{r_2(\mathbf{q}, \Omega)} \sin \psi_2(\mathbf{q}, \Omega)] e^{-i\phi_2(\mathbf{q}, \Omega)} \hat{c}_2(\mathbf{q}, \Omega) + \\ &+ [\text{э. с.}, (\mathbf{q}, \Omega) \rightarrow (-\mathbf{q}, -\Omega)],\end{aligned}\tag{11.59}$$

— представляют квантовые флуктуации полей на обоих фотодетекторах, а

$$\begin{aligned}a_1(\mathbf{q}, \Omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a(\mathbf{q}, \Omega) + a^*(-\mathbf{q}, -\Omega)], \\ a_2(\mathbf{q}, \Omega) &= \frac{1}{i\sqrt{2}} [a(\mathbf{q}, \Omega) - a^*(-\mathbf{q}, -\Omega)],\end{aligned}\tag{11.60}$$

— это компоненты сигнального изображения Алисы, измеряемые Бобом. Здесь $a(\mathbf{q}, \Omega)$ — фурье-амплитуда классического поля $A(\boldsymbol{\rho}, t)$, определенная аналогично (11.52).

11.4.3. Взаимная информация Шеннона для изображений. Чтобы оценить пропускную способность канала надо определить степени свободы шума и сигнала в нашей пространственно многомодовой схеме.

Будем предполагать, что все элементы в схеме — нелинейные кристаллы ОПУ, светоделители, модулятор, ССД-матрицы детекторов — имеют большие поперечные размеры. Медленные амплитуды сжатых световых полей являются стационарными во времени и однородными в поперечном сечении пучков случайными функциями, т.е. все их корреляционные функции обладают трансляционной инвариантностью в пространстве $(\boldsymbol{\rho}, t)$. Для наблюдаемых плотностей фототока это значит, что любая пара фурье-амплитуд шума (11.58) и (11.59) для данных $(\mathbf{q}, \Omega)$ и $(-\mathbf{q}, -\Omega)$ является результатом сжатия входных полей $c(\mathbf{q}, \Omega)$ и $c(-\mathbf{q}, -\Omega)$ и, следовательно, не зависит от других пар.

С другой стороны, поскольку наблюдаемые плотности фототоков вещественны, фурье-амплитуды $\hat{i}_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и $\hat{i}_n^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega)$ не являются независимыми, и

$$\hat{i}_n(\mathbf{q}, \Omega) = \hat{i}_n^\dagger(-\mathbf{q}, -\Omega). \quad (11.61)$$

По этой причине мы рассматриваем как независимые случайные переменные только шумовые члены в фурье-амплитудах $i_n(\mathbf{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$. Действительная и мнимая части комплексных амплитуд $i_n(\mathbf{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$ связаны с амплитудами действительных гармоник шума фототока $\sim \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \Omega t)$ и $\sim \sin(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \Omega t)$ непосредственно восстанавливаемых Бобом из его измерений.

Фурье-амплитуды плотностей фототока (11.57) удовлетворяют соотношению (11.61) и, следовательно, достаточно учитывать при рассмотрении только $\Omega > 0$. Полагаем, что случайный сигнал, посылаемый Алисой, стационарен и однороден в поперечном сечении пучка. Амплитуды $a_n(\mathbf{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$, $n = 1, 2$, рассматриваются как независимые комплексные гауссовские переменные с дисперсией $\sigma^A(\mathbf{q}, \Omega)$, зависящей от $(\mathbf{q}, \Omega)$. Так как преобразование (11.60) — унитарное, следовательно классические фурье-амплитуды $a(\mathbf{q}, \Omega)$ для любых $(\mathbf{q}, \Omega)$ также являются статистически независимыми, и величина

$$\sigma^A(\mathbf{q}, \Omega) = \langle |a(\mathbf{q}, \Omega)|^2 \rangle, \quad (11.62)$$

имеет смысл среднего числа фотонов в сигнальной волне Алисы $(\mathbf{q}, \Omega)$ в объеме квантования, где $\sigma^A(\mathbf{q}, \Omega) = \sigma^A(-\mathbf{q}, -\Omega)$. Здесь статистическое усреднение по гауссовскому ансамблю сигналов Алисы выполнено с комплексной весовой функцией

$$\mathcal{P}_{\mathbf{q}, \Omega}^A(a(\mathbf{q}, \Omega)) = \frac{1}{\pi \sigma^A(\mathbf{q}, \Omega)} \exp \left\{ -\frac{|a(\mathbf{q}, \Omega)|^2}{\sigma^A(\mathbf{q}, \Omega)} \right\}. \quad (11.63)$$

В дальнейшем мы полагаем, что ансамбль входных изображений в области пространственных частот обладает гауссовским спектральным профилем с шириной q_A :

$$\sigma^A(\mathbf{q}, \Omega) = (2\pi)^3 \frac{P}{\pi(q_A/2)^2} \exp\left(-\frac{q_x^2 + q_y^2}{(q_A/2)^2}\right) \Pi(\Omega), \quad (11.64)$$

$$\Pi(\Omega) = \begin{cases} 1/\Omega_A, & |\Omega| \leq \Omega_A/2, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_A/2, \end{cases}$$

и, для упрощения, в области временных частот характеризуется узким прямоугольным спектральным профилем $\Pi(\Omega)$ с шириной Ω_A и высотой $1/\Omega_A$. Поскольку

$$\sum_{\mathbf{q}, \Omega} \sigma_A(\mathbf{q}, \Omega) = L^2 T P, \quad (11.65)$$

то полная средняя плотность потока фотонов в поле изображения через см^2 за секунду равна P . В результате, дисперсии наблюдаемых $i_n(\mathbf{q}, \Omega)$ принимают вид:

$$\left\langle \frac{1}{2} \left\{ \hat{i}_n(\mathbf{q}, \Omega), \hat{i}_n^\dagger(\mathbf{q}, \Omega) \right\}_+ \right\rangle = B_0^2 [\sigma_n^{BA}(\mathbf{q}, \Omega) + \sigma^A(\mathbf{q}, \Omega)], \quad (11.66)$$

где $\{ , \}_+$ означает антикоммутатор. Дисперсии квантового шума в обоих каналах детектирования записываются как:

$$\sigma_n^{BA}(\mathbf{q}, \Omega) = \left\langle \frac{1}{2} \left\{ \hat{f}_n(\mathbf{q}, \Omega), \hat{f}_n^\dagger(\mathbf{q}, \Omega) \right\}_+ \right\rangle, \quad (11.67)$$

$$\sigma_1^{BA}(\mathbf{q}, \Omega) = e^{2r_1(\mathbf{q}, \Omega)} \cos^2 \psi_1(\mathbf{q}, \Omega) + e^{-2r_1(\mathbf{q}, \Omega)} \sin^2 \psi_1(\mathbf{q}, \Omega), \quad (11.68)$$

$$\sigma_2^{BA}(\mathbf{q}, \Omega) = e^{-2r_2(\mathbf{q}, \Omega)} \cos^2 \psi_2(\mathbf{q}, \Omega) + e^{2r_2(\mathbf{q}, \Omega)} \sin^2 \psi_2(\mathbf{q}, \Omega). \quad (11.69)$$

Используя полученные результаты, можно оценить взаимную информацию Шеннона для рассматриваемой схемы плотного кодирования.

Хорошо известно, что в одномодовом сжатом световом поле статистика квадратурных амплитуд — гауссовская, и, например, в представлении Вигнера ее можно охарактеризовать гауссовской весовой функцией. При гомодинном детектировании сжатого света статистика фотоотсчетов также является гауссовской, благодаря линейности преобразования между амплитудой поля в плотностью фототока. В [28] можно найти обсуждение гомодинного приема в терминах характеристических функций. В приложении В рассмотрены некоторые особенности гомодинного приема пространственно многомодовых полей [15].

В рассматриваемой схеме квантового плотного кодирования статистически независимые степени свободы шума и сигнала нумеруются частотами $(\mathbf{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$. Можно рассматривать наш квантовый канал как совокупность статистически независимых параллельных гауссовых каналов связи в фурье-

представлении. Взаимная информация между Алисой и Бобом для данного детектора и частот $(\mathbf{q}, \Omega)$ определяется выражением:

$$I_n^S(\mathbf{q}, \Omega) = H_n^B(\mathbf{q}, \Omega) - \overline{H_n^{(B|A)}(\mathbf{q}, \Omega)}^A \quad (11.70)$$

Здесь $H^B(\mathbf{q}, \Omega)$ — энтропия наблюдаемых Боба, и

$$\overline{H_n^{(B|A)}(\mathbf{q}, \Omega)}^A$$

— усредненная по ансамблю сигналов Алисы энтропия шума, поступающего в канал [32]. Для гауссовых каналов взаимная информация имеет вид:

$$I_n^S(\mathbf{q}, \Omega) = \ln \left(1 + \frac{\sigma^A(\mathbf{q}, \Omega)}{\sigma_n^{BA}(\mathbf{q}, \Omega)} \right). \quad (11.71)$$

Подавление квантового шума в полосе частот эффективного сжатия и перепутывания увеличивает отношение сигнала к шуму в правой части (11.71). Полная взаимная информация I^S , относящаяся к большой области наблюдения L^2 и большому времени наблюдения T , определяется как сумма по всем степеням свободы и связана с плотностью потока информации J (измеряемой в битах, а точнее, в нитах на $\text{см}^2 \cdot \text{с}$) следующим образом:

$$I^S = \sum_{n, \mathbf{q}, \Omega > 0} I_n^S(\mathbf{q}, \Omega) = L^2 T J, \quad (11.72)$$

где

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \int_{\Omega > 0} d\Omega \sum_{n=1,2} I_n^S(\mathbf{q}, \Omega). \quad (11.73)$$

11.4.4. Пропускная способность канала. Для количественного и численного анализа естественно связать такие величины, как плотность информационного потока и плотность потока фотонов с физическими параметрами, фигурирующими в схеме квантового плотного кодирования. Сжатие и перепутывание, производимые оптическим параметрическим усилителем первого типа, характеризуются эффективной шириной спектров q_c и Ω_c в пространственном и временном частотном представлении. Площадь когерентности в поперечном сечении пучков и время когерентности вводятся как $S_c = (2\pi/q_c)^2$ и $T_c = 2\pi/\Omega_c$. Для упрощения предполагаем, что оба ОПУ имеют одинаковые площади и времена когерентности. Площадь корреляций S_A и время корреляций T_A нестационарного изображения, посылаемого Алисой, связаны со спектральными ширинами сигнала q_A и Ω_A как $S_A = (2\pi/q_A)^2$ и $T_A = 2\pi/\Omega_A$. Мы рассматриваем широкополосный вырожденный коллинеарный фазовый синхронизм в однопроходных ОПУ. Время когерентности спонтанного параметрического рассеяния T_C обычно короче временной протяженности «кадра» T_A из нестационарного потока изображений Алисы.

Безразмерный поток информации $\mathcal{J}$ и безразмерный поток входных фотонов $\mathcal{P}$ определяются как $\mathcal{J} = S_c T_A J$, $\mathcal{P} = S_c T_A P$, т. е. мы относим обе эти

величины к длительности «кадра» Алисы и к площади когерентности сжатия и перепутывания.

Условия оптимального перепутывания в ОПУ достигаются при выполнении соотношений:

$$\begin{aligned} r_1(\mathbf{q}, \Omega) &= r_2(\mathbf{q}, \Omega) \equiv r(\mathbf{q}, \Omega), \\ \psi_1(\mathbf{q}, \Omega) &= \psi_2(\mathbf{q}, \Omega) \pm \pi/2 \equiv \psi(\mathbf{q}, \Omega), \\ \psi(0, 0) &= \pi/2. \end{aligned} \quad (11.74)$$

Используя введенные выше определения, находим безразмерный поток информации $\mathcal{J}$ в виде:

$$\mathcal{J} = \int d\kappa \ln \left\{ 1 + \mathcal{P} \frac{1}{\sigma^{BA}(\kappa, 0)} \frac{1}{\pi(d_A/2)^2} \exp \left(- \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{(d_A/2)^2} \right) \right\}, \quad (11.75)$$

где

$$\sigma^{BA}(\kappa, 0) = \exp[2r(\kappa, 0)] \cos^2 \psi(\kappa, 0) + \exp[-2r(\kappa, 0)] \sin^2 \psi(\kappa, 0), \quad (11.76)$$

и введены безразмерные пространственные частоты $\kappa = \mathbf{q}/q_c$. Относительную спектральную ширину сигнала Алисы $d_A = q_A/q_c = (S_c/S_A)^{1/2}$ можно интерпретировать как число элементов изображения на длине когерентности, т. е. как относительную линейную плотность элементов изображения. Далее используется простая оценка $q_c/2 = \sqrt{2k/l}$, связанная с дифракционным уширением света параметрического рассеяния, распространяющегося внутри кристалла ОПУ, где k — волновое число, а l — длина кристалла.

При оптимальном согласовании фаз сжатых пучков квантовый шум в схеме плотного кодирования эффективно подавлен. Как обсуждалось в разд. 11.2, важным фактором является пространственно-частотная дисперсия сжатия, т. е. зависимость фазы квадратурных компонент от $\mathbf{q}$. Эта дисперсия обусловлена дифракцией внутри ОПУ. С помощью тонкой линзы, подходящим образом помещенной в световой пучок, можно эффективно скорректировать зависимость ориентации эллипсов сжатия от пространственной частоты $\mathbf{q}$, как показано на рис. 11.2, б.

Улучшение отношения сигнала к шуму для различных пространственных частот можно охарактеризовать с помощью обратной дисперсии шума $\sigma^{BA}(\kappa, 0)$, изображенной на рис. 11.11. Как видно из рисунка, коррекция фазы с помощью линз делает возможной передачу сигнала с низкими шумами в полосе пространственных частот эффективного сжатия.

При построении графиков для плотности взаимной информации $\mathcal{J}$ брались неизменными площадь когерентности S_c , степень сжатия $r(0, 0)$ и плотность потока сигнальных фотонов $\mathcal{P}$.

Зависимость плотности взаимной информации от относительной линейной плотности элементов изображения d_A приведена на рис. 11.12. При $d_A \ll 1$ (большие элементы изображения, $S_A \gg S_c$) плотность взаимной информации растет линейно с увеличением d_A , поскольку это означает увеличение пространственного разрешения входного сигнала. В классическом пределе (ва-

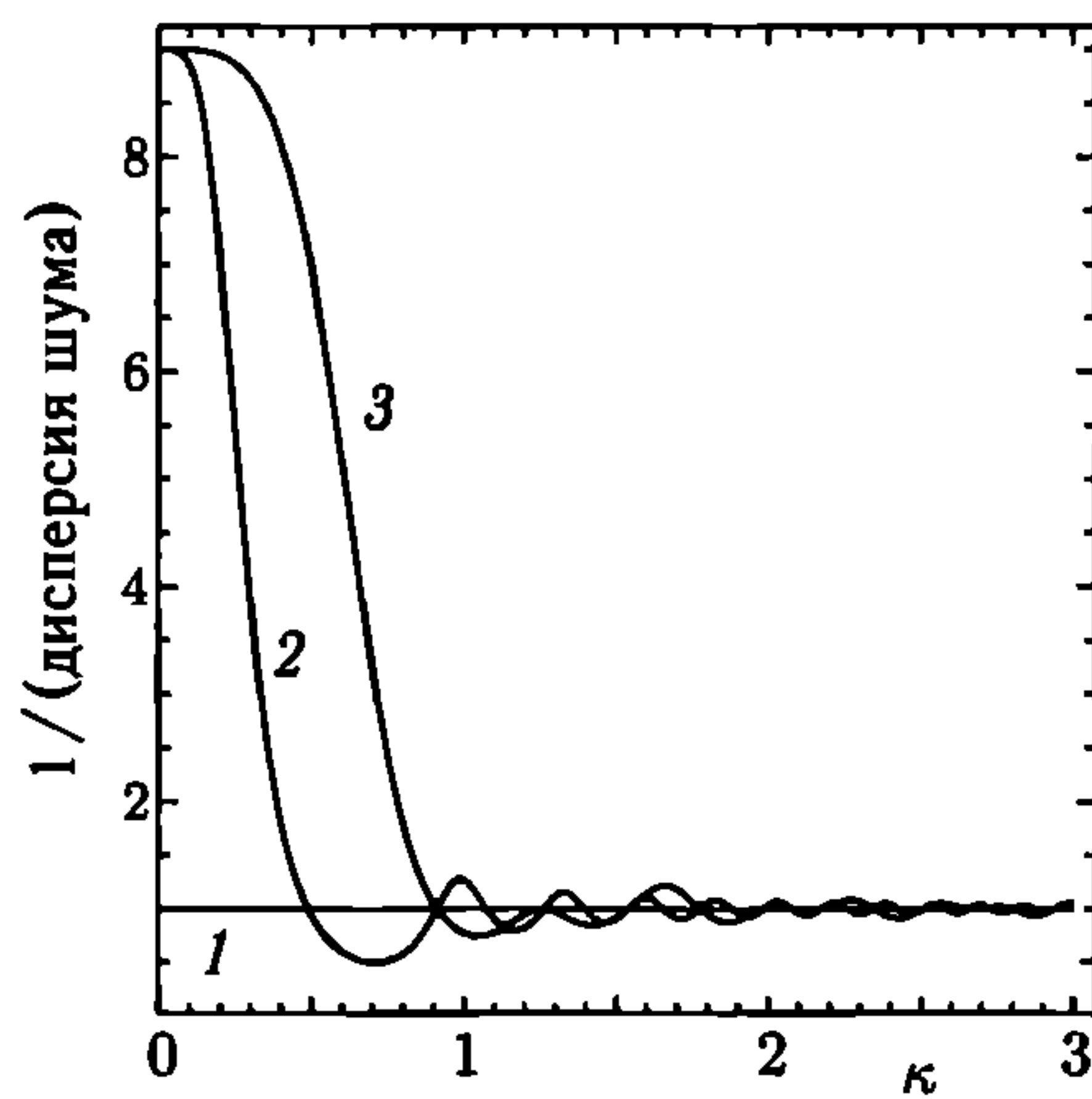


Рис. 11.11. Величина, обратная дисперсии шума, в зависимости от пространственной частоты κ для вакуумного шума на входе (1) и для сжатого света с $\exp[r(0,0)] = 3$ без коррекции фазы (2) и с коррекцией (3)

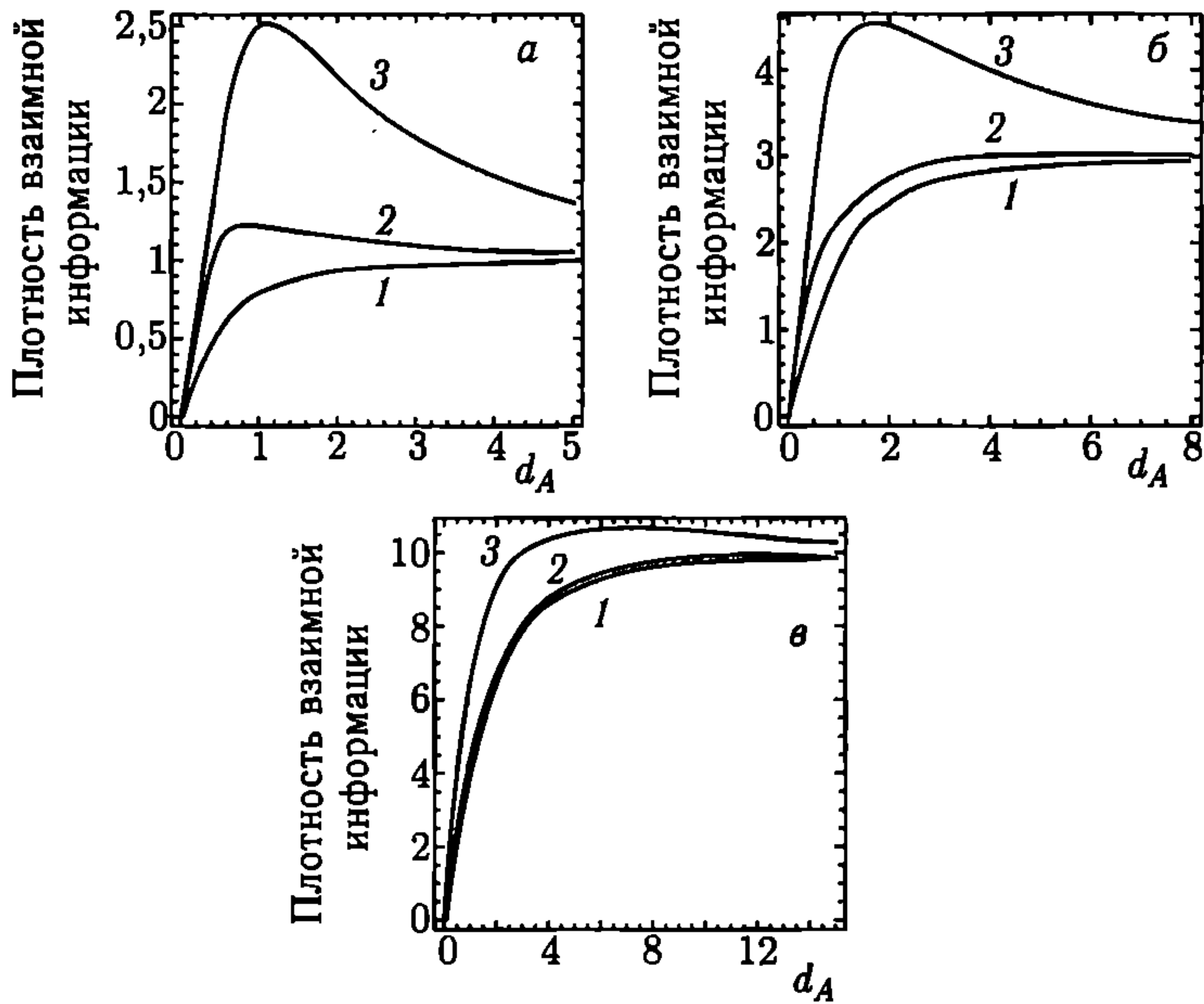


Рис. 11.12. Плотность взаимной информации для вакуумного шума на входе схемы (1) и сжатого света с $\exp(r(0,0)) = 3$ без коррекции фазы (2) и с коррекцией (3). Плотность сигнальных фотонов равна $\mathcal{P} = 1$ (а), $\mathcal{P} = 3$ (б), $\mathcal{P} = 10$ (в)

куумный шум на входе схемы) увеличение плотности взаимной информации с ростом плотности элементов изображения имеет место до тех пор, пока информация, приходящаяся на один элемент сигнала Алисы не оказывается порядка одного бита или меньше:

$$\ln \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \frac{\mathcal{P}}{d_A^2} \right\} \sim \frac{\mathcal{P}}{d_A^2} \leq 1. \quad (11.77)$$

Дальнейшее увеличение d_A не приводит ни к какому эффекту, так как оно полностью компенсируется уменьшением информации, приходящейся на каждый элемент изображения. На наших рисунках это соответствует значениям $d_A \sim \sqrt{P} \sim 1$ при $P = 1$, $d_A \sim 1,7$ при $P = 3$, и $d_A \sim 3$ при $P = 10$ (см. соответственно рис. 11.12, *а, б, в*).

Интересно оценить влияние сжатия и перепутывания на информационную пропускную способность канала плотного кодирования. Стандартным предположением для такой оценки является приближенное равенство:

$$\langle n_{\text{squeezed}} \rangle \sim \langle n_{\text{signal}} \rangle, \quad (11.78)$$

означающее, что энергия, затрачиваемая на сжатие и перепутывание (число фотонов сжатого света в каждой моде на данном детекторе) имеет тот же порядок по величине, что и число сигнальных фотонов на моду. Здесь

$$\langle n_{\text{squeezed}} \rangle = \sinh^2 r \sim \frac{e^{2r}}{4}. \quad (11.79)$$

Выберем для простоты $d_A \sim 1$, т.е. размер элемента изображения S_A приблизительно равен размеру площади когерентности сжатого света S_c . При выполнении такого условия объем когерентности $cS_A T_A$ можно рассматривать как степень свободы как для сигнального, так и для сжатого света. Тогда

$$\langle n_{\text{signal}} \rangle \sim P, \quad (11.80)$$

и предположение (11.78) означает, что

$$P \sim \frac{e^{2r}}{4}. \quad (11.81)$$

На наших рисунках $e^{2r} = 9$, и $P = 1 > e^{2r}/4$, $P = 3 \sim e^{2r}/4$, $P = 10 > e^{2r}/4$ на рис. 11.12, *а, б, в* соответственно. Из вида кривых при $d_A \leq 1$ следует, что при $\langle n_{\text{squeezed}} \rangle \sim \langle n_{\text{signal}} \rangle$ (кривые 3 и 1 на рис. 11.12, *б*) информационная пропускная способность канала плотного кодирования превышает информационную пропускную способность классического канала примерно в 2 раза.

Этот результат согласуется с общими свойствами квантового плотного кодирования и с оценкой [11] для одномодовой схемы плотного кодирования в непрерывных переменных.

При $P < e^{2r}/4$ (кривые 3 и 1 на рис. 11.12, *а*) преимущество квантового канала еще более существенно, но энергия затрачиваемая на сжатие в этом случае превышает мощность самого сигнала. Кривые 3 и 1 на рис. 11.12, *в* иллюстрируют обратный предел относительно низкой энергии, затрачиваемой в квантовом канале и малого увеличения информационной пропускной способности.

Когда $d_A \gg 1$ (элементы изображения много меньше длины когерентности), влияние перепутывания на пропускную способность канала пропадает и значение $\mathcal{J}$ падает до величины классического предела. Это объясняется

тем, что в пределе $S_A \ll S_c$ почти все пространственные частоты сигнала лежал вне полосы пространственных частот, где присутствует эффективное подавление шума, и пропускная способность канала ограничивается вакуумным шумом.

Коррекция фазы сжатого света существенно увеличивает пропускную способность канала, поскольку расширяет полосу пространственных частот эффективного подавления шума до оптимального значения. Это устраняет деструктивное влияние усиленной (растянутой) квадратуры шумового поля на больших пространственных частотах, как видно из рис. 11.12 (кривые 3 и 2).

11.5. Выводы и перспективы

В этой главе рассмотрена модель квантовой голографической телепортации оптических изображений, предложенная в [14, 15], и продемонстрирована пригодность этой схемы для передачи квантового состояния входного изображения из одного места в другое с высокой верностью. Протокол плотного кодирования в непрерывных переменных обобщен на случай оптических изображений [19]. Показано, что такое многомодовое обобщение квантового коммуникационного канала обеспечивает более высокую пропускную способность канала благодаря присущему этой схеме параллелизму.

Обсуждавшиеся здесь модели квантовой голографической телепортации и квантового плотного кодирования оптических изображений можно рассматривать как примеры взаимосвязи квантовой информации и квантовых изображений. Очевидный интерес представляет поиск приложений более общих видов существенно многомерного квантового перепутывания к явлениям квантовой информации.

Здесь можно отметить, например, квантовое перепутывание между волнами света разных частот, связанное с не вырожденным по частоте сжатием. Частотно невырожденные сжатые состояния света наблюдались в нескольких экспериментах, например, в [33]. Квантовая телепортация, основанная на этом виде перепутывания, позволила бы переносить квантовое состояние света на желаемую настраиваемую частоту.

Важной проблемой квантовой информатики является проблема обмена квантовыми состояниями между светом и долгоживущими степенями свободы среды (квантовая память). Экспериментальная демонстрация квантовой памяти для света, основанная на нерезонансном взаимодействии света со спин-ориентированным атомным ансамблем, дана в [34]. Можно ожидать, что обобщение схемы квантовой памяти, включающее существенно многомерное перепутывание света и среды, могло бы увеличить ее информационную емкость.

Определенный интерес могут представить также схемы квантовой информации, основанные на других видах перепутывания в пространстве многих степеней свободы, как, например, перепутывание в пространстве орбитального углового момента света (см. гл. 12).

Как отмечалось в разд. 11.4, преимущество схемы плотного кодирования над одиночным коммуникационным каналом связано с тем фактом, что

в присутствии квантового перепутывания вспомогательный канал является оптимальной системой отсчета для измерения слабых физических возмущений в сигнальном канале. Такое повышение чувствительности, основанное на перепутывании, является общим для квантового плотного кодирования и некоторых недавно обсуждавшихся схем квантовых измерений. По аналогии с плотным кодированием оптических изображений, использование существенно многомодового перепутывания в квантовых измерениях могло бы дать возможность проводить параллельные измерения распределенных в пространстве световых полей или многомерных квантовых объектов с улучшением квантовых пределов. Например, в схеме, подобной схеме плотного кодирования, можно провести измерение фазовых возмущений распределенного в пространстве слабо выраженного фазового объекта [35] в гейзенберговском пределе $\delta\varphi \sim 1/n$.

Благодарности. Автор признателен своим коллегам, внесшим вклад в работы, представленные в этой главе, в частности А. Гатти, Ю. М. Голубеву, Т. Ю. Голубевой, М. И. Колобову, Л. А. Луджиато и Д. Васильеву.

А. Свойства пространственного многомодового сжатия

Основные результаты для пространственно многомодового сжатия суммированы в [23]. Коэффициенты преобразования сжатия (11.3), (11.56) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} |U_n(\mathbf{q}, \Omega)|^2 - |V_n(\mathbf{q}, \Omega)|^2 &= 1, \\ U_n(\mathbf{q}, \Omega)V_n(-\mathbf{q}, -\Omega) &= U_n(-\mathbf{q}, -\Omega)V_n(\mathbf{q}, \Omega), \end{aligned} \quad (11.82)$$

которые являются необходимыми и достаточными для выполнения коммутационных соотношений (11.1), (11.53) в свободном пространстве. Пространственные и временные параметры сжатия и перепутывания световых полей существенно зависят от углов ориентации главных осей эллипсов сжатия $\psi_n(\mathbf{q}, \Omega)$:

$$\psi_n(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{1}{2} \arg \{U_n(\mathbf{q}, \Omega) V_n(-\mathbf{q}, -\Omega)\}, \quad (11.83)$$

и от степеней сжатия $r_n(\mathbf{q}, \Omega)$:

$$e^{\pm r_n(\mathbf{q}, \Omega)} = |U_n(\mathbf{q}, \Omega)| \pm |V_n(\mathbf{q}, \Omega)|. \quad (11.84)$$

Фазы усиленных квадратурных компонент определяются выражением [36]:

$$\phi_n(\mathbf{q}, \Omega) = -\frac{1}{2} \arg \{U_n(\mathbf{q}, \Omega) V_n^*(\mathbf{q}, \Omega)\}. \quad (11.85)$$

Для однопроходных ОПУ с фазовым синхронизмом первого типа коэффициенты $U_n(\mathbf{q}, \Omega)$ и $V_n(\mathbf{q}, \Omega)$ имеют вид:

$$U_n(\mathbf{q}, \Omega) = \exp \left\{ i \left[(k_z(\mathbf{q}, \Omega) - k)l - \frac{\delta(\mathbf{q}, \Omega)}{2} \right] \right\} \times \\ \times \left[\cosh \Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega) + \frac{i\delta(\mathbf{q}, \Omega)}{2\Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega)} \sinh \Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega) \right], \quad (11.86)$$

$$V_n(\mathbf{q}, \Omega) = \exp \left\{ i \left[(k_z(\mathbf{q}, \Omega) - k)l - \frac{\delta(\mathbf{q}, \Omega)}{2} \right] \right\} \frac{g_n}{\Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega)} \sinh \Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega),$$

где l — длина нелинейного кристалла; $k_z(\mathbf{q}, \Omega)$ — продольная компонента волнового вектора $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \Omega)$ волны с частотой $\omega + \Omega$ и поперечной компонентой $\mathbf{q}$. Безразмерная функция фазовой расстройки $\delta(\mathbf{q}, \Omega)$ определяется выражением:

$$\delta(\mathbf{q}, \Omega) = \left(k_z(\mathbf{q}, \Omega) + k_z(-\mathbf{q}, -\Omega) - k_p \right) l \approx (2k - k_p)l + k''_{\Omega} l \Omega^2 - \frac{q^2 l}{k}, \quad (11.87)$$

где k_p — волновое число волны накачки; в вырожденном случае $k_p - 2k = 0$. Здесь принято параксиальное приближение. Параметр $\Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega)$ определен как

$$\Gamma_n(\mathbf{q}, \Omega) = \sqrt{g_n^2 - \frac{\delta^2(\mathbf{q}, \Omega)}{4}}, \quad (11.88)$$

где g_n — безразмерная константа связи нелинейного взаимодействия, выбираемая для простоты вещественной. Она пропорциональна нелинейной восприимчивости, длине кристалла и амплитуде поля накачки.

В. Гомодинное детектирование с пространственным разрешением

В этом приложении мы обсудим справедливость выражений (11.10), (11.54) для операторов плотности фототока в схеме балансного гомодинного измерения с пространственным разрешением. Для определенности мы рассмотрим гомодинное детектирование X квадратурной компоненты. Результаты для сопряженной компоненты получаются аналогичным образом.

На рис. 11.13 представлена схема поточечного балансного гомодинного измерения с помощью фотодетектора D_x . Чтобы достичь пространственного разрешения, предполагаем, что пиксели CCD-матрицы много меньше, чем площадь когерентности S_c ЭПР-пучков. Мы будем обсуждать свойства квантовых операторов поверхностной плотности фототока и покажем, что определения (11.10) и (11.54) для этих наблюдаемых согласуются со стандартным описанием фотодетектирования с разрешением в пространстве и во времени, основанным на глауберовских функциях корреляции поля [37]. Выходной сигнал балансного гомодинного приемника имеет вид:

$$\hat{I}_x(\boldsymbol{\rho}, t) = \hat{I}_x^{(l)}(\boldsymbol{\rho}, t) - \hat{I}_x^{(r)}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (11.89)$$

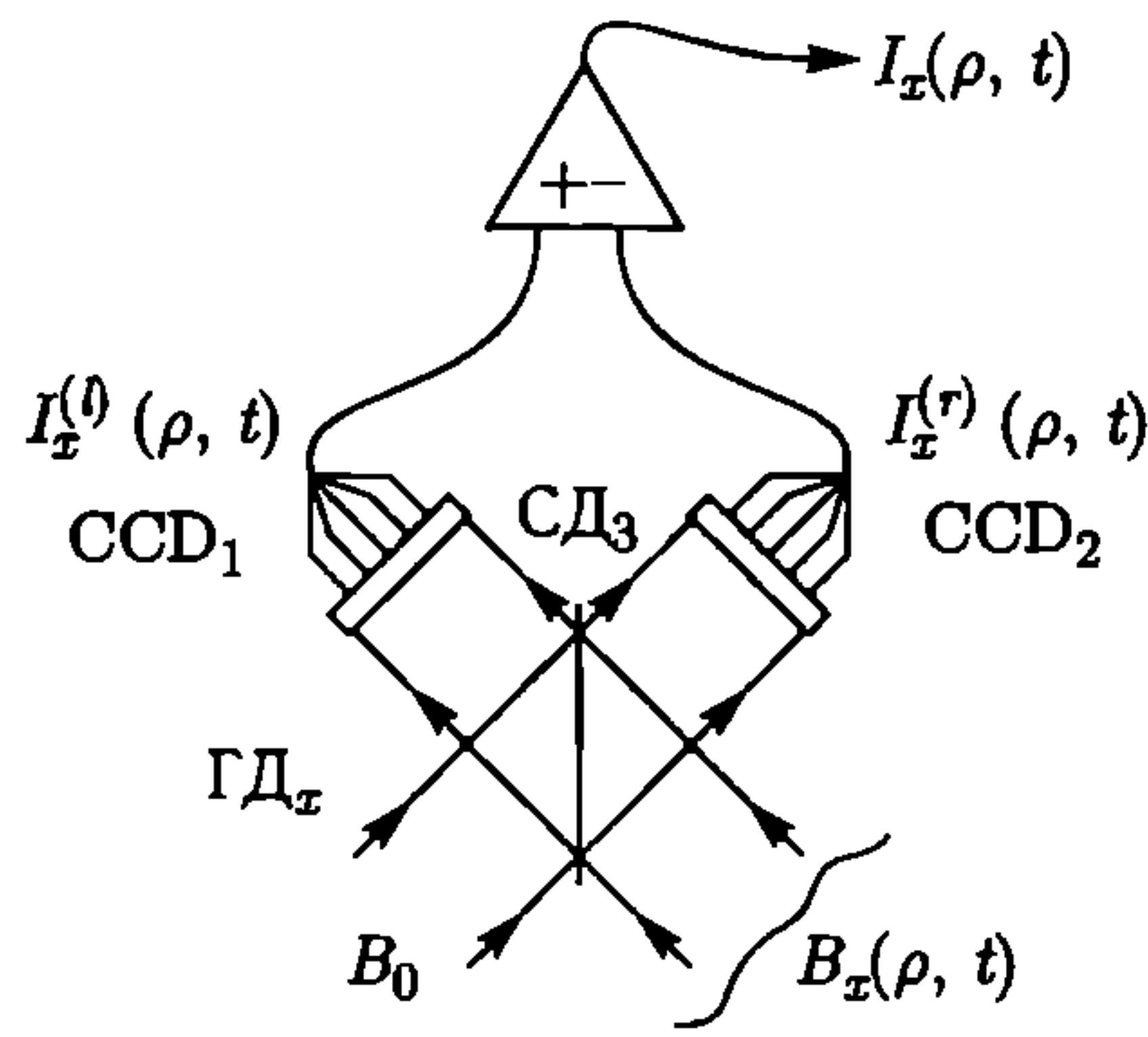


Рис. 11.13. Схема балансного гомодинного детектирования с пространственным разрешением

где $\hat{I}_x^{(l)}(\rho, t)$ и $\hat{I}_x^{(r)}(\rho, t)$ — поверхностные плотности фототоков, измеряемые левой и правой CCD-матрицами. Плоская опорная волна LO_x является классической и сильной, с комплексной амплитудой $B_x^{(H)}$, такой что $|B_x^{(H)}| \gg |B_x(\rho, t)|$, где $B_x(\rho, t)$ — входное поле фотодетектора. В этом пределе квантовый оператор разности поверхностных плотностей фототока вводится аналогично исследованному ранее пространственно одномодовому случаю (см. [26, 27], а в более общем контексте [28]). В выражении для разностной поверхностной мощности биений между объектной и опорной волнами напряженность классического поля заменяется квантовым оператором поля $\hat{B}_x(\rho, t)$:

$$\hat{I}_x(\rho, t) = B_x^{(H)*} \hat{B}_x(\rho, t) + \text{h. c.} \quad (11.90)$$

Для простоты предполагается, что квантовая эффективность CCD-матрицы равна единице и дополнительный квантовый шум, обусловленный потерями света на детекторе пренебрежимо мал. Светоделитель СД₃ описывается матрицей, аналогичной (11.6).

Покажем, что оператор (11.90) соответствует теории фотодетектирования Глаубера [37] и, в частности, корректно описывает дробовый шум фотодетектирования в пространстве и времени. В стандартной теории фотодетектирования корреляционная функция второго порядка для плотности фототока связана с корреляционной функцией четвертого порядка для полевых амплитуд. В нашем случае разностного фотодетектирования эта связь имеет вид:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \left\{ \hat{I}_x(\rho, t), \hat{I}_x(\rho', t') \right\}_+ \right\rangle &= \left\langle \hat{\Phi}_x^{(l)}(\rho, t) + \hat{\Phi}_x^{(r)}(\rho, t) \right\rangle \delta(\rho - \rho') \delta(t - t') + \\ &+ \left\langle T_N \left\{ \left(\hat{\Phi}_x^{(l)}(\rho, t) - \hat{\Phi}_x^{(r)}(\rho, t) \right) \left(\hat{\Phi}_x^{(l)}(\rho', t') - \hat{\Phi}_x^{(r)}(\rho', t') \right) \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (11.91)$$

Здесь величины

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_x^{(l)}(\rho, t) &= \frac{1}{2} \left(B_x^{(H)} + \hat{B}_x(\rho, t) \right)^\dagger \left(B_x^{(H)} + \hat{B}_x(\rho, t) \right), \\ \hat{\Phi}_x^{(r)}(\rho, t) &= \frac{1}{2} \left(-B_x^{(H)} + \hat{B}_x(\rho, t) \right)^\dagger \left(-B_x^{(H)} + \hat{B}_x(\rho, t) \right), \end{aligned} \quad (11.92)$$

определяют поверхностные плотности потока фотонов на левой и правой CCD-матрицах, а $\{ , \}_+$ означает антикоммутатор. T_N — это упорядочивание полевых операторов в (11.91), которое означает: 1) нормальное упорядочивание; 2) упорядочивание по времени положительно-частотных операторов (уничтожения) так, чтобы временной аргумент увеличивался справа налево, и обратное упорядочивание по времени отрицательно-частотных полевых операторов (рождения).

В пределе сильной опорной волны в (11.91) можно использовать приближение:

$$\hat{\Phi}_x^{(l)}(\rho, t) - \hat{\Phi}_x^{(r)}(\rho, t) \approx B_x^{(H)*} \hat{B}_x(\rho, t) + \text{h. c.} \quad (11.93)$$

Рассмотрим теперь ту же симметризованную корреляционную функцию второго порядка для выходных фототоков (см. левую часть (11.91)), непосредственно подставляя в нее введенный выше оператор поверхностной плотности фототока (11.90). Приводя операторы поля к T_N -порядку с помощью коммутационного соотношения, аналогичного (11.1), приходим к соотношению:

$$\left\langle \frac{1}{2} \left\{ \hat{I}_x(\rho, t), \hat{I}_x(\rho', t') \right\}_+ \right\rangle = |B_x^{(H)*}|^2 \delta(\rho - \rho') \delta(t - t') + \left\langle T_N \left\{ (B_x^{(H)*} \hat{B}_x(\rho, t) + \text{h. c.}) (B_x^{(H)*} \hat{B}_x(\rho', t') + \text{h. c.}) \right\} \right\rangle. \quad (11.94)$$

Это выражение согласуется с корреляционной функцией Глаубера (11.91), аппроксимированной с использованием (11.93). Дельта-образное слагаемое описывает дробовый шум фотодетектирования в пространстве и времени. В подразделах 11.3.3 и 11.4.2 мы применяем оператор разности поверхностных плотностей фототока (11.90) для анализа схем телепортации и плотного кодирования.

Список литературы

1. Физика квантовой информации / Под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлин-гера; Пер. с англ. под ред. С. П. Кулика и Т. А. Шмаонова. — М.: Постмаркет, 2002.
2. Quantum Information with Continuous Variables / Ed. by S. Braunstein, Pati A. — Dordrecht: Kluwer, 2003.
3. Bennett C. H., Brassard G., Crepeau C., Jozsa R., Peres A., Wootters W. K. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1895.
4. Vaidman L. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 1473.
5. Braunstein S. L., Kimble H. J. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 869.
6. Ralph T. C., Lam P. K. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 5668.
7. Bouwmeester D. et al. // Nature (London). 1997. V. 390. P. 575; Boschi D. et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 1121.
8. Furusawa A., Sorensen J. L., Braunstein S. L., Fuchs C. A., Kimble H. J., Polzik E. S. // Science. 1998. V. 282. P. 706.
9. Bowen W. P., Treps N., Buchler B. C., Schnabel R., Ralph T. C., Bachor H.-A., Symul T., Lam P. K. // Phys. Rev. A. 2003. V. 67. P. 032302.

10. *Braunstein S. L.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 4084;
Braunstein S. L. // Nature (London). 1998. V. 394. P. 47;
Lloyd S., Slotine J.-J. E. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 4088.
11. *Braunstein S. L., Kimble H. J.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 042302.
12. *Ralph T. S.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 61. P. 010303(R).
13. *van Loock P., Braunstein S. L., Kimble H. J.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 022309.
14. *Sokolov I. V., Kolobov M. I., Gatti A., Lugiato L. A.* // Opt. Comm. 2001. V. 193. P. 175.
15. *Gatti A., Sokolov I. V., Kolobov M. I., Lugiato L. A.* // Eur. Phys. J. D. 2004. V. 30. P. 123.
16. *Bennett C. H., Wiesner S. J.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2881.
17. *Mattle K., Weinfurter H., Kwiat P. G., Zeilinger A.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 4656.
18. *Li X. Y. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 047904.
19. *Golubeva T. Yu., Golubev Yu. M., Sokolov I. V., Kolobov M. I.* To appear in «Special Issue of J. Mod. Opt.». 2005.
20. *Slusher R. E., Hollberg L. W., Yurke B., Mertz J. C., Valley J. F.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2409.
21. *Bachor H.-A.* A Guide to Experiments in Quantum Optics. — Wiley-WCH, 1998.
22. *Колобов М. И., Соколов И. В.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 1945;
Kolobov M. I., Sokolov I. V. // Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 101.
23. *Kolobov M. I.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. 1539.
24. *Kolobov M. I.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 1986.
25. *Brambilla E., Gatti A., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 023802.
26. *Yurke B.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 311.
27. *Ou S. Z., Kimble H. J.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 3126.
28. *Braunstein S. L.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 474.
29. *Kolobov M. I., Sokolov I. V.* // Europhys. Lett. 1991. V. 15. P. 271.
30. *Gatti A., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 1675.
31. *Braunstein S. L.* Optics and Photonics News. Jan. 1999. P. 10.
32. *Holevo A. S.* Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.
33. *Georgiades N. Ph., Polzik E. S., Edamatsu K., Kimble H. J., Parkins A. S.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3426.
34. *Julsgaard B., Sherson J., Fiurasek J., Cirac J. I., Polzik E. S.* // Nature. 2004. V. 432. P. 482.
35. *Sokolov I. V.* // J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt. 2000. V. 2. P. 179.
36. *Sokolov I. V., Kolobov M. I., Lugiato L. A.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. P. 2420.
37. *Glauber R. J.* // Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 2529;
Glauber R. J. // Quantum Optics and Electronics (Les Houches Summer School of Theoretical Physics, University of Grenoble) / Ed. by C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji. — New York: Gordon and Breach, 1965. — P. 53.

Литература, добавленная при переводе

38. *Магденко Л. В., Соколов И. В., Колобов М. И.* Квантовая телепортация изображений с изменением частоты // Опт. и спектр. 2007. Т. 103. С. 67.

39. *Magdenko L. V., Sokolov I. V., Kolobov M. I.* Quantum telecloning of optical images: Multiuser parallel quantum channel // *Phys. Rev. A.* 2007. V. 75. P. 2324.
40. *Vasilyev D. V., Sokolov I. V., Polzik E. S.* Quantum memory for images: A quantum hologram // *Phys. Rev. A.* 2008. V. 77. P. 020302(R).
41. *Васильев Д. В., Соколов И. В., Ползик Е. С.* Квантовая память для изображений с использованием обратной связи // *Опт. спектр.* 2009. Т. 106. С. 962.
42. *Vasilyev D. V., Sokolov I. V., Polzik E. S.* A quantum volume hologram. quant-ph/0906.1528v1.

ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ СВЕТА

Стефан М. Барнет, Роберта Замбрини

12.1. Введение

Изучение механических эффектов света, таких как угловой момент, имеет длинную историю. Однако сделанное недавно наблюдение, что моды Лагерра–Гаусса, известные из лазерной физики, обладают вполне определенным значением орбитального углового момента [1], вызвало резкий рост интереса к этой области. Говоря конкретнее, мода u_{pl}^{LG} (см. (12.21)), распространяясь в направлении z с азимутальной зависимостью $\exp(i\ell\phi)$, обладает z -компонентой орбитального углового момента $\ell\hbar$ на фотон. Эта идея была в значительной мере подсказана яркой аналогией между уравнением параксиальной оптики (параболическим уравнением) и уравнением Шредингера, а также видом оператора, отвечающего z -компоненте орбитального углового момента $L_z = -i\hbar\partial/\partial\phi$ [2]. Убедительная иллюстрация этой идеи следует из анализа вектора Пойнтинга и связанной с ним плотности углового момента [1, 3], как кратко описано в разд. 12.2.

Физическую природу углового момента легко понять из рис. 12.1. Электрическое и магнитное поля в каждой точке лежат в плоскости, касательной к спиральному фазовому фронту. Это значит, что локальная плотность импульса $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ нормальна по отношению к фазовому фронту. Следовательно, плотность импульса сама развивается по спиральной траектории вдоль пучка, и имеет место угловой момент, связанный с этим вращением импульса [3]. Траектория импульса проиллюстрирована на рис. 12.2 рогами самца большого куду. Угловой момент возникает как азимутальная компонента плотности импульса. Азимутальная координата вдоль оси z является неопределенной, и для пучков с ненулевым орбитальным угловым моментом, поля там должны стремиться к нулю. Это напоминает центр урагана (см. рис. 12.2) — центральную точку бури, в которой нет ветра. При $\ell = 1$ фазовые фронты имеют форму простого винта, но в общем случае

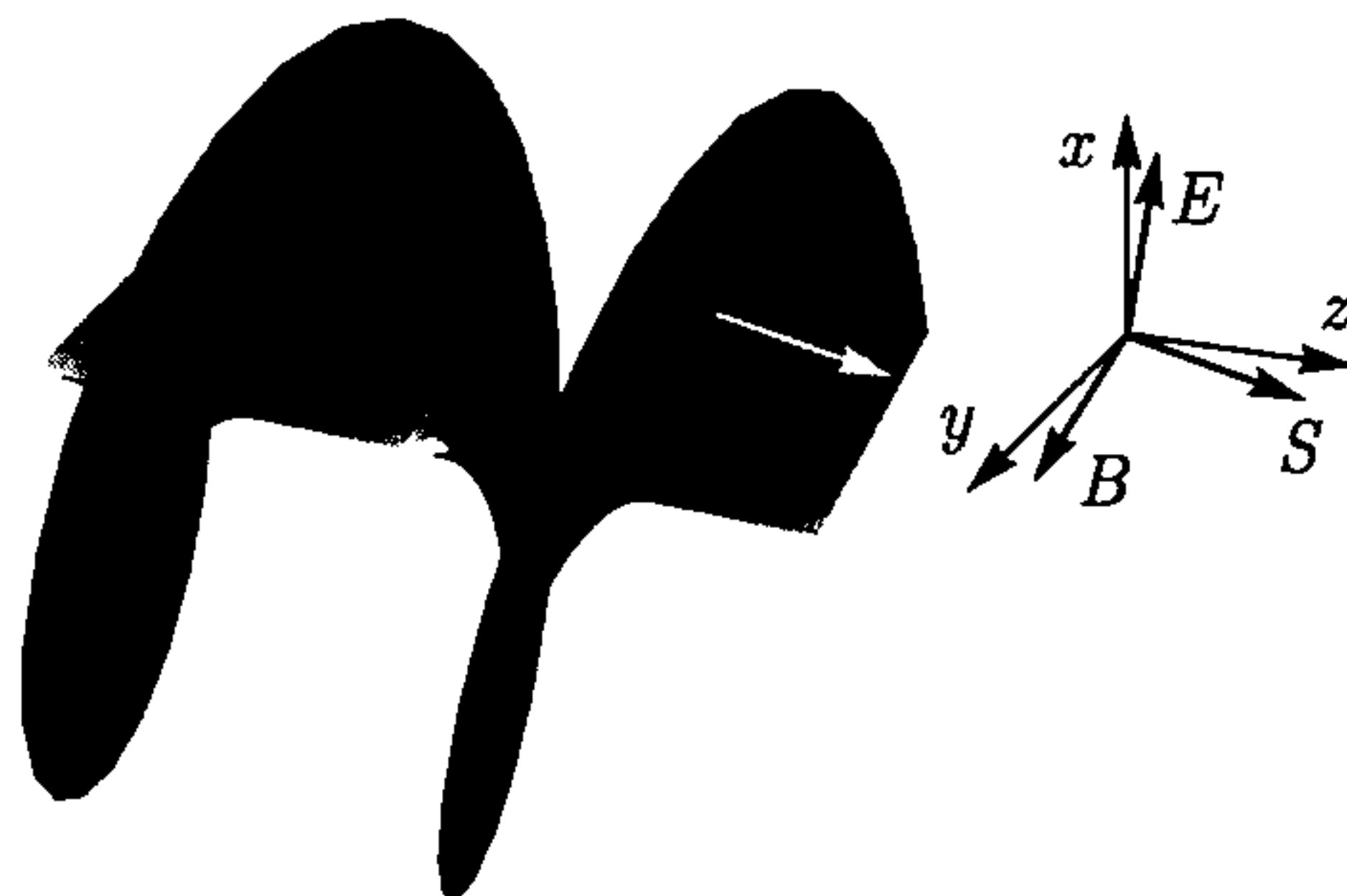


Рис. 12.1. Спиральный фазовый фронт для моды $\ell = 1$. Векторы электрического и магнитного полей лежат в плоскости этого фазового фронта, так что плотность импульса, пропорциональная вектору Пойнтинга, везде ортогональна плоскости фазового фронта

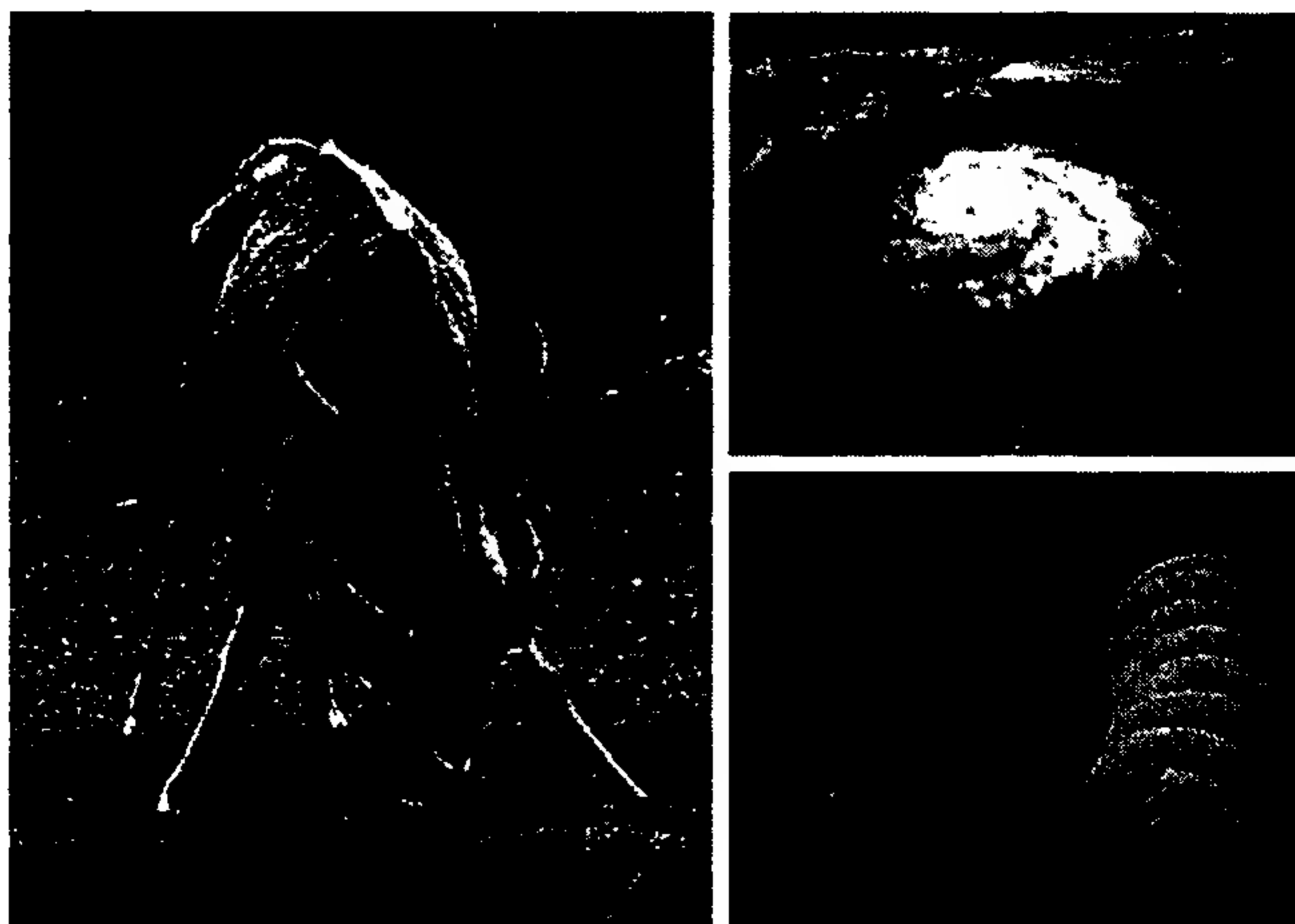


Рис. 12.2. Слева: плотность импульса развивается по спиральной траектории очень похожей на рога самца большого куду (иллюстрация из <http://www.sa-vepues.com/wildlife>). Справа вверху: изображение урагана, на котором виден его центр, полученное со спутника (иллюстрация из <http://rsd.gsfc.nasa.gov/rsd/images>). Справа внизу: форма фазовых фронтов при $\ell = 3$ и $\ell = 2$, имеет вид пасты фузилли (fusilli pasta)

имеют место ℓ переплетенных закрученных фазовых фронтов. При $\ell = 2$ фазовые фронты формируют двойную спираль, подобную той, что присутствует в молекулах ДНК, а при $\ell = 3$ они приобретают форму знаменитой пасты фузилли (fusilli pasta) (см. рис. 12.2). Любой пучок, имеющий азимутальную зависимость $\exp(i\ell\phi)$ будет обладать связанным с ней орбитальным угловым моментом $\ell\hbar$ на фотон.

Орбитальный угловой момент света быстро становится самостоятельной областью исследования, охватывающей широкий круг физических явлений, и здесь мы имеем возможность коснуться лишь некоторых из них, делая акцент на квантовых и нелинейных оптических явлениях. Читатели, интересующиеся более широким введением в эту область, могут обратиться к работе [4] и к недавно опубликованной книге [5], содержащей многие ключевые статьи по теме.

12.2. Угловой момент в электромагнетизме

Механические свойства света, такие как энергия, импульс, угловой момент, возникают из фундаментальных свойств электрических и магнитных полей. С каждой из этих величин можно связать локальную плотность и выразить локальные законы сохранения в терминах этой плотности и соответствующего потока («тока») [6]. Плотность энергии для поля в свободном пространстве:

$$W = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2). \quad (12.1)$$

Такое определение, совместно с определением вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (12.2)$$

удовлетворяет уравнению непрерывности, соответствующему локальному сохранению энергии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (12.3)$$

Вектор Пойнтинга (деленный на квадрат скорости света) также играет роль плотности импульса для поля:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (12.4)$$

который также локально сохраняется. Соответствующая плотность потока импульса выражается как

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2) - \epsilon_0 E_i E_j - \mu_0 B_i B_j, \quad (12.5)$$

а закон сохранения импульса выражается в виде:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} = 0, \quad (12.6)$$

где применено правило суммирования для трех пространственных координат.

Выражение для плотности углового момента записывается из выражения для плотности импульса, по аналогии с механикой, как векторное произведение плотности импульса на радиус-вектор:

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (12.7)$$

Угловой момент также локально сохраняется, так что можно ввести плотность потока углового момента:

$$M_{li} = \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} \quad (12.8)$$

(где ϵ_{ijk} — символ перестановки или знакопеременный символ), и связанный с этой величиной закон сохранения имеет вид:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial M_{li}}{\partial x_l} = 0. \quad (12.9)$$

Отметим, что размерность плотности потока углового момента равна угловому моменту на единицу площади за единицу времени. Это значит, что эту величину можно понимать как поток углового момента через поверхность.

Все пучки света обладают угловым моментом. Это можно увидеть из определения плотности углового момента (12.7). Все, что для этого требуется, это чтобы полный момент имел компоненту, перпендикулярную по направлению к оси вращения. Наиболее интересная ситуация возникает, когда рассматривается z -компонента углового момента пучка, который сам распространяется в направлении оси z (так что его полный момент направлен в ту же сторону). Очевидно, что это может произойти только если плотности импульса в разных частях пучка не параллельны оси z , и если оставшиеся локальные x - и y -компоненты плотности импульса складываются так, что

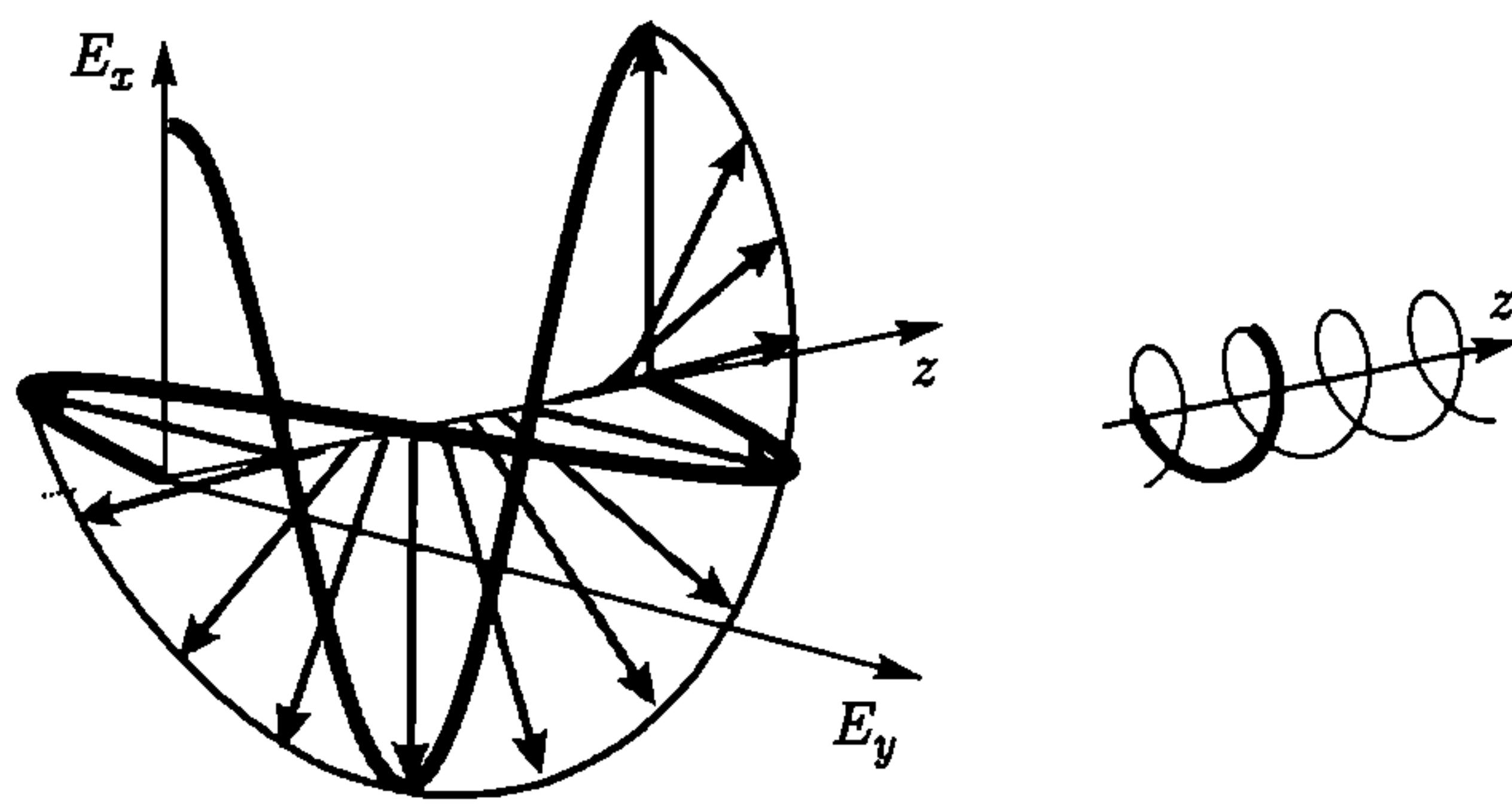


Рис. 12.3. Вектор электрического поля пучка с круговой поляризацией. Его вращение и вращение связанного с ним магнитного поля приводят к возникновению спинowego углового момента

создают ненулевую z -компоненту углового момента. Имеется две принципиально разных ситуации, при которых это происходит. Одна, связанная со спинowym угловым моментом, реализуется вследствие вращения электрического поля для света с круговой поляризацией (см. рис. 12.3). Другая, связанная с орбитальным угловым моментом, возникает благодаря наличию спиральных волновых фронтов, как изображено на рис. 12.1. Здесь мы будем интересоваться только угловым моментом света относительно оси его распространения и, в частности, орбитальной компонентой.

12.2.1. Спиновой и орбитальный угловые моменты. В механике часто удобно разделить угловой момент тела на спиновую и орбитальную компоненты. Для планет первая дает начало дням и ночам, а вторая ответственна за годовой цикл. Соответствующее разделение для электромагнитного поля далеко от прямой аналогии. Обычным подходом является введение векторного потенциала $\mathbf{A}$ и выполнение интегрирования по частям, что дает [7–9]:

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} d^3r, \quad (12.10)$$

$$\mathbf{J}_o = \epsilon_0 \int E_l (\mathbf{r} \times \nabla) A_l d^3r, \quad (12.11)$$

— полный спиновой и орбитальный угловые моменты. Спиновая часть соответствует разности между полным числом фотонов с правой и левой круговыми поляризациями [8, 9], но оказывается, что такое разделение физически не наблюдаемо [7]. Более важным является наблюдение, что ни $\mathbf{J}_s$, ни $\mathbf{J}_o$ не являются в действительности угловыми моментами [10, 11]. Существуют также эстетические основы, для того чтобы ставить вопрос о способе записи $\mathbf{J}_s$ и $\mathbf{J}_o$. Уравнения Максвелла для поля в свободном пространстве и локальные механические свойства, описанные выше, не меняются при преобразовании:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \cos \theta \mathbf{E} + \cos \theta c \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &\rightarrow \cos \theta \mathbf{B} - \cos \theta \frac{1}{c} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (12.12)$$

при любой величине угла θ . Однако, это не справедливо для плотностей, связанных с $\mathbf{J}_s$ и $\mathbf{J}_o$.

Ситуация несколько упрощается, если вместо плотности углового момента рассматривать поток углового момента [12]. Мы видим, что для монохроматического пучка света разделение на спиновую и орбитальную компоненты физически оправдано и удобно. Необходимо отметить, однако, что для плотности и потока спина существуют различные формы [13], и необходимо увидеть, является ли это отличие существенным.

Выражение для углового момента сильно упрощается, однако, в приближении параксиальной оптики, и большая часть работ сделана в этом приближении. Поэтому, чтобы понять поведение углового момента светового пучка, разумно изучить его в рамках параксиального режима.

12.2.2. Угловой момент в параксиальной оптике. Для большинства практических приложений достаточно рассматривать пучок света, распространяющийся вдоль оси z , для которого поперечный профиль пучка слабо зависит от координаты ¹⁾ z . Рассмотрим монохроматическое поле с угловой частотой $\omega = kc$. Если амплитуда поля имеет пространственное распределение $u(x, y, z)e^{ikz}$, то в параксиальном приближении пренебрегают $\partial^2 u / \partial^2 z$ по сравнению с $k \partial u / \partial z$ и $\partial u / \partial z$ по сравнению с ku в скалярном волновом уравнении. Результирующее уравнение для волны в параксиальном приближении обнаруживает схожесть с уравнением Шредингера:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u. \quad (12.13)$$

Для того чтобы проследить связь с полями, необходимо обратиться к методу их построения с помощью u . Наиболее простая процедура состоит в использовании лоренцевской калибровки и записи векторного потенциала в виде [14]:

$$\mathbf{A} = (\alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}}) u e^{ikz}. \quad (12.14)$$

Вместо более обычной кулоновской калибровки, здесь используется лоренцевская, так что нам не нужно предпринимать дополнительные усилия, чтобы $\mathbf{A}$ имело поперечное распределение. Здесь α и β — пара комплексных чисел, таких что $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей x и y . В параксиальном приближении положительно-частотные компоненты электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{A} - \nabla \left(\frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \\ &= \left[i\omega \alpha u \hat{\mathbf{x}} + i\omega \beta u \hat{\mathbf{y}} - c \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{ikz}, \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$\mathbf{B} = \left[-i\beta k u \hat{\mathbf{x}} + i\alpha k u \hat{\mathbf{y}} + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{ikz}. \quad (12.16)$$

¹⁾ См. также публикации [108–110].

Непосредственно отсюда можно вычислить усредненную по времени плотность импульса [1, 3]:

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\epsilon_0}{2}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{\epsilon_0}{2} [i\omega(u\nabla u^* - u^*\nabla u) + 2\omega k|u|^2\hat{\mathbf{z}} + \omega\sigma\nabla|u|^2 \times \hat{\mathbf{z}}], \quad (12.17)$$

где $\sigma = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$. Ситуацию значительно упрощает введение цилиндрических координат (ρ, ϕ, z) . Второе слагаемое соответствует линейному импульсу в направлении пучка и согласуется с предположением, что z -компонента импульса эквивалентна $\hbar k$ на фотон. (Следуя параксиальному приближению мы должны пренебречь z -компонентой первого слагаемого.) ϕ -компоненту можно связать с вращением света относительно направления его распространения, она ответственна за угловой момент. В уравнении (12.17) присутствуют два члена, которые могут приводить к появлению ϕ -компоненты плотности импульса: первый член $(u\nabla u^* - u^*\nabla u)_\phi$ и последний член $(\nabla|u|^2 \times \hat{\mathbf{z}})_\phi$. Первый из них возникает естественным образом, когда амплитуда записывается в виде:

$$u = v(\rho, z) e^{i\ell\phi}, \quad (12.18)$$

и приводит к тому, что плотность импульса пропорциональна ℓ . Второй член возникает, когда $\alpha\beta^*$ имеет ненулевую мнимую часть и связан, очевидно, с круговой или эллиптической поляризацией пучка. Оставшаяся ρ -компонента связана с дифракцией света.

Обращаясь к пучку с амплитудой, записанной в форме (12.18), находим, что плотность углового момента имеет простой вид [1]:

$$j_z = \rho\bar{p}_\phi = \epsilon_0\omega\ell|u|^2 - \frac{\epsilon_0}{2}\omega\sigma\rho\frac{\partial|u|^2}{\partial\rho}. \quad (12.19)$$

Поток углового момента в параксиальном приближении равен cj_z [12], и, следовательно, отношение полного потока углового момента к полному потоку энергии (определяемому вектором Пойнтинга) равно:

$$\frac{\int \int \rho d\rho d\phi c j_z}{\int \int \rho d\rho d\phi c^2 \bar{p}_z} = \frac{\ell + \sigma}{\omega}. \quad (12.20)$$

Этот простой результат имеет замечательную интерпретацию, которая появляется, если умножить и разделить это выражение на $\hbar$, что дает $(\hbar\ell + \hbar\sigma)/\hbar\omega$. Мы связали энергию $\hbar\omega$ с каждым фотоном, и полученный результат предполагает, что нам также следует связать с каждым фотоном орбитальный угловой момент $\hbar\ell$ и спиновый угловой момент $\hbar\sigma$. Это в самом деле так, и анализ, основанный на потоке углового момента, показывает, что это также верно для непараксиальных пучков [12].

12.2.3. Механические эффекты. Важно понять, что спиновый и орбитальный угловые моменты, переносимые световым пучком, являются чисто механическими угловыми моментами. Это значит, что свет может вызывать

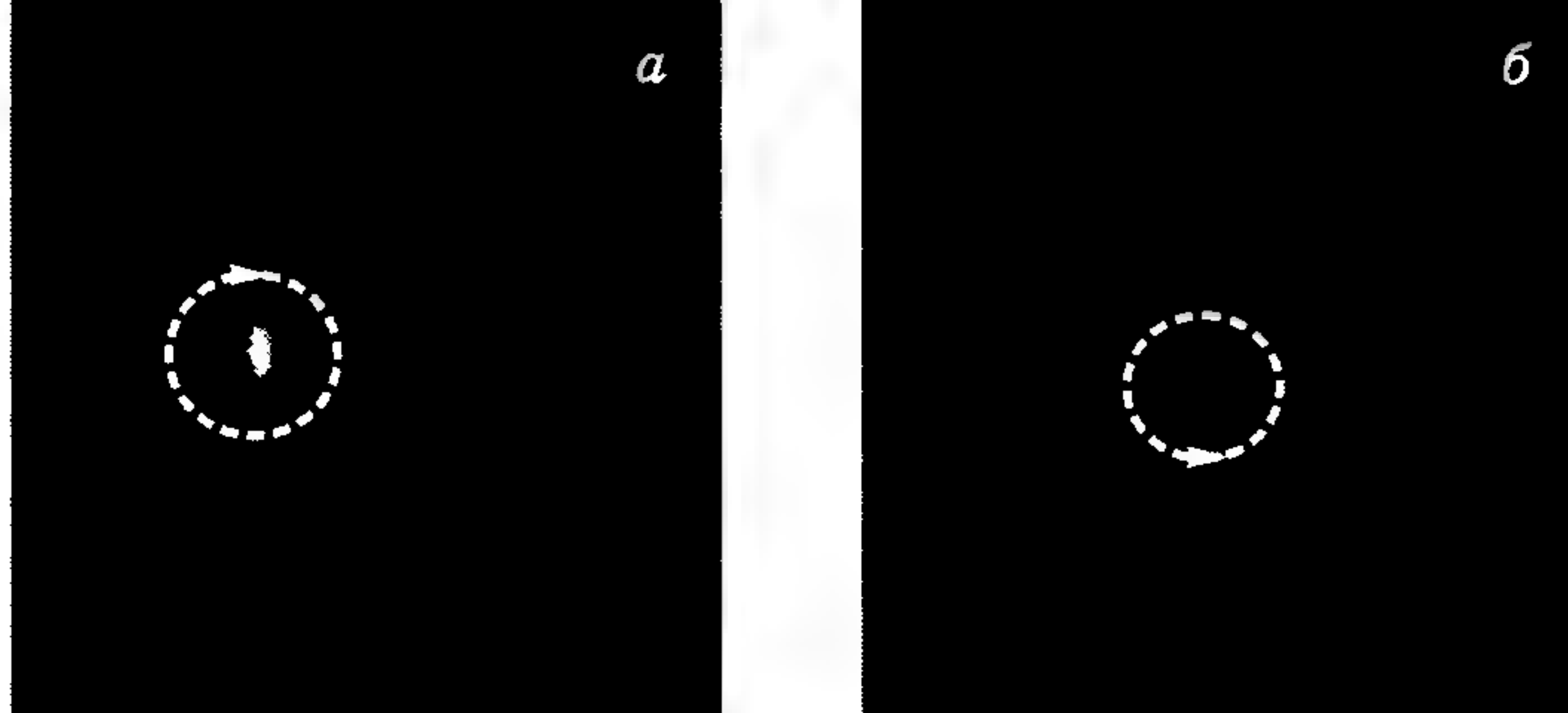


Рис. 12.4. а) Двулучепреломляющая частица, вращающаяся вокруг своей оси при освещении пучком света с круговой поляризацией. б) Поглощающая частица, движущаяся по орбите вокруг оси линейно поляризованного пучка света, обладающего орбитальным угловым моментом $\ell = 8$. Детали этого эксперимента можно найти в [19]

вращающий момент материального тела, что было подтверждено рядом точных экспериментов [15–19].

Влияние светового пучка, обладающего угловым моментом, на частицу показано на рис. 12.4. Пучок со спиновым угловым моментом, но без орбитального углового момента $\sigma = \pm 1$, $\ell = 0$ вызывает вращение частицы относительно ее центра масс. Пучок с орбитальным угловым моментом, но без спинового углового момента вызывает движение частицы по орбите вокруг центра пучка. Поляризационно-индуцированное вращение частицы, захваченной в радиальный максимум интенсивности, на первый взгляд, кажется не соответствующим полученной нами формуле (12.19), из которой следует, что оптический спиновый угловой момент должен быть в этом случае равен нулю (поскольку $\partial|u|^2/\partial\rho = 0$). Разрешение этого парадокса заключается в том, что вращающий момент следует вычислять в единицах изменения полного потока оптического углового момента за проход через среду. Такая процедура дает результаты полностью согласующиеся с экспериментами [20].

12.3. Пучки света, обладающие орбитальным угловым моментом

12.3.1. Фазовые сингулярности и пространственные свойства. Мы показали, что волна с амплитудой, имеющей азимутальную зависимость $\exp(i\ell\phi)$, несет $\ell\hbar$ единиц орбитального углового момента на каждый фотон. Наличие этого фазового множителя говорит о том, что орбитальный угловой момент является фундаментальным свойством формы волны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. В частности, при движении вокруг оси z по замкнутой траектории, фаза изменяется на $2\pi\ell$. На оси z , т. е. при $\rho = 0$, амплитуда (12.18) имеет неопределенную фазу или фазовую сингулярность. Из этого следует, что поле там должно быть равно нулю, и мы увидим, что эта особенность является общей для полей, обладающих орбитальным угловым моментом.

Заметим, что фазовые сингулярности и связанные с ними линии темноты — это топологические особенности поля. Они часто возникают в раз-

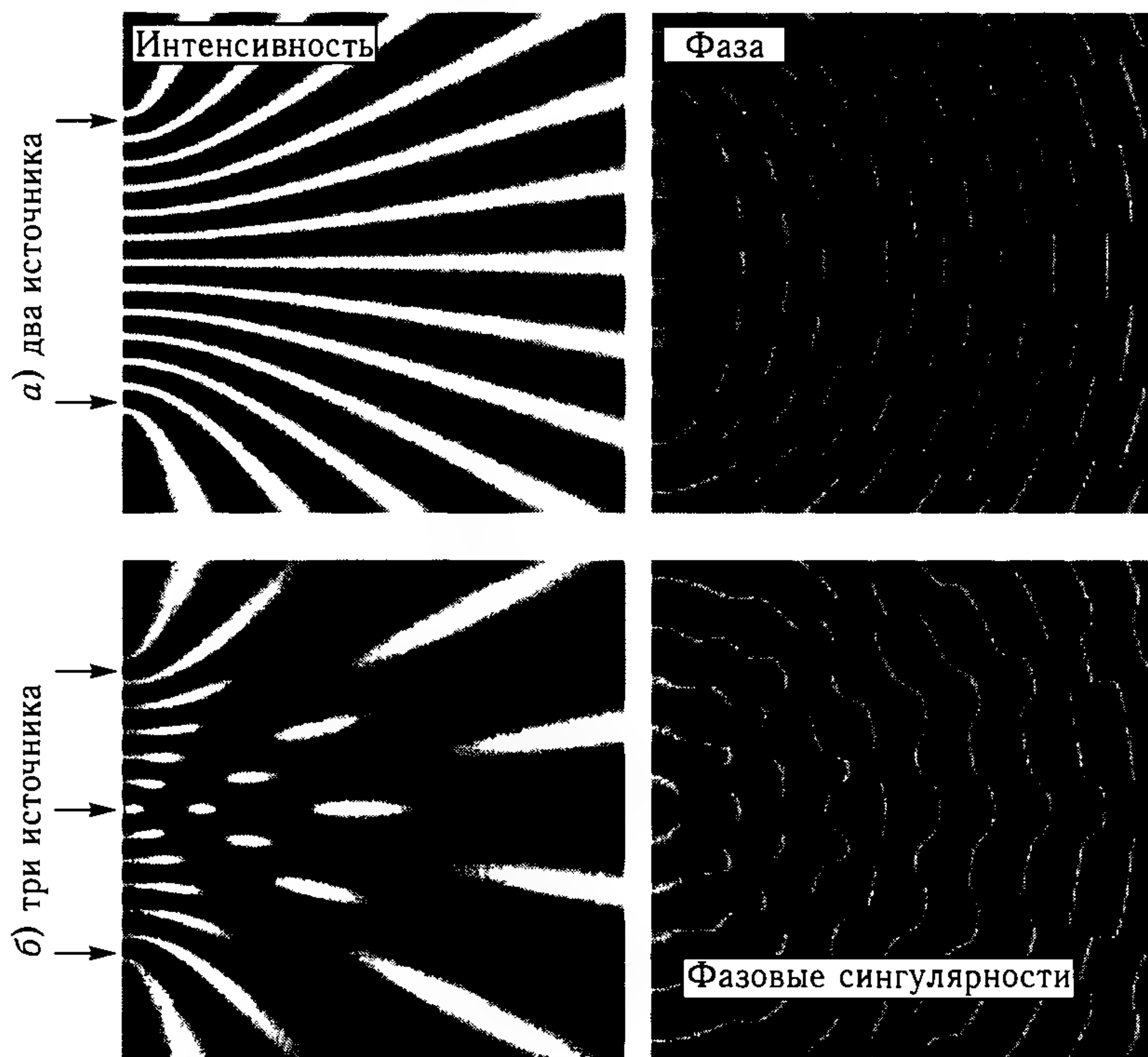


Рис. 12.5. Распределение интенсивности и фазы в эксперименте со схемой Юнга на двух щелях и в ее менее известном трехщелевом аналоге. Трехщелевая система демонстрирует фазовые сингулярности вдоль линий перпендикулярных плоскости рисунка. Заимствовано из [23]

личных волнах и широко изучены ¹⁾ [21, 22]. На нижней части рис. 12.5 мы построили интенсивность и фазу для эксперимента интерференции на трех щелях. Видно, что фазовый портрет содержит точки, две из которых отмечены, в которых фаза является неопределенной. Сопоставление распределению интенсивности показывает, что эти точки соответствуют темным участкам. Более известная картина двухщелевой интерференции демонстрирует менее распространенное явление плоскостей темноты, на которых фаза не определена.

Здесь мы интересуемся полями, обладающими орбитальным угловым моментом, и поэтому ограничим рассмотрение фазовыми сингулярностями, лежащими на оси z с азимутальной зависимостью $\exp(i\ell\phi)$. Такие поля имеют нулевую интенсивность вдоль оси z .

12.3.2. Пучки Лагерра–Гаусса и Бесселя ²⁾. Параксиальное волновое уравнение (12.13) имеет простые решения с требуемой зависимостью $\exp(i\ell\phi)$. Наиболее важные и наиболее широко используемые из них — это

¹⁾ Фазовые сингулярности, возникающие в случайных световых пучках, рассматриваются в книгах [111, 112].

²⁾ Для подробного ознакомления с теорией световых пучков, возбуждаемых в лазерных резонаторах, рекомендуем читателю обратиться к книге [113].

моды Лагерра–Гаусса, имеющие вид [24]:

$$u_{p\ell}^{\text{LG}} = \frac{C_{p\ell}^{\text{LG}}}{w(z)} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(\frac{-\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp(i\ell\phi) \times \\ \times \exp \left[\frac{ik\rho^2 z}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp \left[-i(2p + |\ell| + 1) \text{tg}^{-1}(z/z_R) \right], \quad (12.21)$$

где z_R — рэлеевский радиус; $w(z) = [2(z^2 + z_R^2)/kz_R]^{1/2}$ — радиус пучка; $L_p^{|\ell|}$ — присоединенный полином Лагерра, который получается из более известных полиномов Лагерра дифференцированием:

$$L_p^{|\ell|} = (-1)^{|\ell|} \frac{d^{|\ell|}}{dx^{|\ell|}} L_{p+|\ell|}(x). \quad (12.22)$$

Постоянная

$$C_{p\ell}^{\text{LG}} = \left(\frac{2p!}{\pi(p + |\ell|)!} \right)^{1/2} \quad (12.23)$$

выбирается так, чтобы моды были нормированы в поперечной плоскости $\iint dx dy |u|^2 = 1$. Фокальная плоскость моды Лагерра–Гаусса находится при $z = 0$ и в этой плоскости мода имеет наименьшую ширину. Радиус Рэлея z_R является характеристическим масштабом длины, связанным с дифракцией. На рис. 12.6, а–в (см. цветную вклейку) изображены интенсивность, действительная часть и фаза моды Лагерра–Гаусса с $\ell = 3$ и $p = 2$ в своей фокальной плоскости. Интенсивность имеет темное пятно в центре, характеризующее наличие ненулевого орбитального углового момента, и $p + 1$ ярких колец. Фаза увеличивается на $2\pi\ell = 6\pi$ при обходе по замкнутой окружности вокруг центральной сингулярности фазы. Показатель $(2p + |\ell| + 1) \text{tg}^{-1}(z/z_R)$ отвечает фазе Гюи, описывающей набег фазы, добавляемый к kz при распространении вдоль пучка. Ее значение зависит только от порядка моды $N = 2p + |\ell|$. Относительно просто оперировать с суперпозицией мод одного порядка, однако комбинирование мод разных порядков может приводить к сложной эволюции.

Второй важный класс решений — это пучки Бесселя:

$$u_{\kappa\ell}^B = J_{|\ell|}(\kappa\rho) \exp(i\ell\phi) \exp \left(\frac{-i\kappa^2 z}{2k} \right). \quad (12.24)$$

В отличие от пучков Лагерра–Гаусса, они не являются хорошо локализованными при малых значениях ρ и не могут быть нормированы. Они представляют интерес, поскольку не дифрагируют, и потому что они также являются решениями полного не параксиального уравнения с заменой $-\kappa^2/2k$ на $\sqrt{k^2 - \kappa^2} - k$. Следует отметить, что в практической реализации бесселевские пучки всегда имеют конечную поперечную протяженность и, следовательно, не дифрагируют только на конечных длинах распространения [25].

12.3.3. Генерация и преобразование. Мы еще не объяснили, как генерировать пучки света, обладающие орбитальным угловым моментом. На сегодня существуют три различных используемых метода, и мы кратко опишем каждый из них.

Преобразователь мод на цилиндрических линзах. Начнем с перечисления способов, которыми в условиях лаборатории обычно манипулируют с поляризацией или спиновым угловым моментом. Двулучепреломляющие волновые пластины имеют различные коэффициенты преломления для двух ортогональных линейных поляризаций и, следовательно, свет в двух поляризациях приобретает различные фазовые набегии при распространении через волновую пластину. С этим связано преобразование поляризации, зависящее от толщины и ориентации волновой пластины. Наиболее часто используются $\lambda/4$ и $\lambda/2$ волновые пластины, вызывающие относительный сдвиг фазы между двумя линейными поляризациями соответственно на $\pi/2$ или на π . Они широко используются для преобразования линейной поляризации в круговую и для поворота линейной поляризации, а с помощью комбинации таких пластинок можно получить любое требуемое изменение поляризации.

Преобразователь мод на цилиндрических линзах для орбитального углового момента работает в точности аналогично волновой пластине для поляризации [26–28]. Чтобы увидеть это, прежде всего введем моды Эрмита–Гаусса [24]:

$$u_{nm}^H = \frac{C_{nm}^{HG}}{1 + z^2/z_R^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{w^2(z)}\right) \exp\left(\frac{-ik(x^2 + y^2)z}{2(z^2 + z_R^2)}\right) \times \\ \times \exp(i(2p + |\ell| + 1) \operatorname{tg}^{-1}(z/z_R)) H_n\left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{y\sqrt{2}}{w(z)}\right), \quad (12.25)$$

где H_n — полином Эрмита n -го порядка; константа C_{nm}^{HG} выбирается из условия нормировки. Моды Эрмита–Гаусса аналогичны линейным поляризациям вдоль направлений x и y , их можно сгенерировать нарушая вращательную симметрию резонатора лазера и подавляя тем самым основную моду TEM_{00} . Эти моды можно превратить в интересующие нас моды Лагерра–Гаусса или в повернутые моды Эрмита–Гаусса с помощью цилиндрических линз, которые фокусируют пучок вдоль только одного поперечного направления. Пара таких линз с фокусным расстоянием f , помещенные на расстоянии $f/\sqrt{2}$ друг от друга, действуют как $\pi/2$ -преобразователь. Такой преобразователь аналогичен волновой пластине $\lambda/4$ и превращает соответствующим образом ориентированную моду Эрмита–Гаусса в связанную с ней моду Лагерра–Гаусса с $\ell = \pm|m - n|$ и $p = \min(m, n)$, так что порядок моды остается неизменным ($N = m + n = 2p + |\ell|$). Если линзы разнесены на расстояние $2f$, то они действуют как π -преобразователь, позволяющий повернуть моду Эрмита–Гаусса. Комбинируя $\pi/2$ - и π -преобразователи можно свободно манипулировать модой и ее орбитальным угловым моментом.

Спиральная фазовая пластина. Существенная особенность мод, обладающих орбитальным угловым моментом $\ell\hbar$, состоит в том, что они имеют

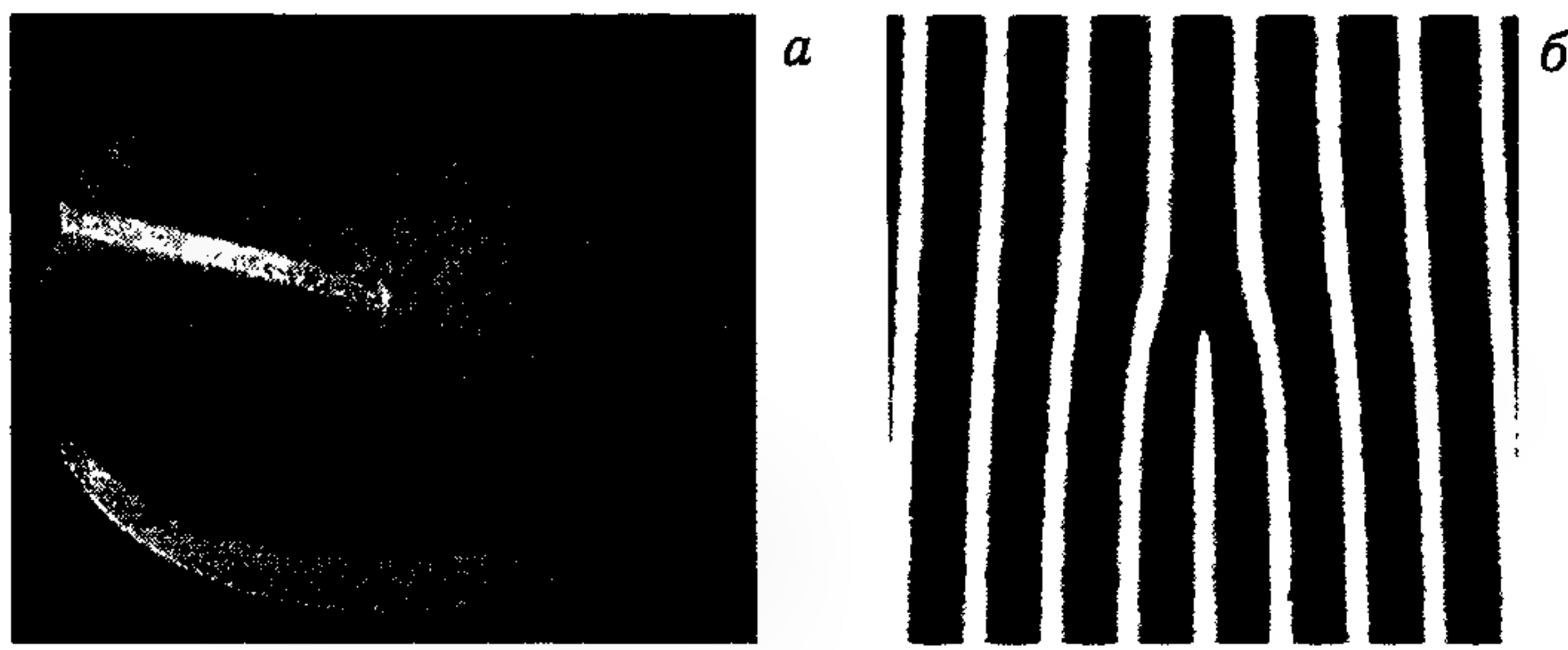


Рис. 12.7. а) Спиральная фазовая пластина. б) Голограмма, предназначенная для генерации света с орбитальным угловым моментом

азимутальную зависимость фазы $\exp(i\ell\phi)$. Простейший (по крайней мере, концептуально простейший) метод получения такой зависимости связан с использованием прозрачного материала, толщина которого растет линейно по ϕ , подобно спиральной лестнице (см. рис. 12.7). Если высота ступени соответствует разности фаз $2\pi\ell$, то устройство отпечатает на входной волне азимутальный фазовый профиль $\exp(i\ell\phi)$ [30, 31]. Если на вход подается гауссовый пучок, обладающий нулевым орбитальным моментом, то на выходе получим пучок, с орбитальным угловым моментом, равным $\ell\hbar$ единиц на фотон. Естественно, исходный радиальный профиль пучка по большей части остается неизменным, так что генерируется суперпозиция большого числа мод Лагерра–Гаусса с различными p , но одинаковой величиной ℓ . Однако преобладающий вклад в суперпозицию вносят моды с $p = 0$. Генерация пучков, обладающих орбитальным угловым моментом была продемонстрирована экспериментально в микроволновом [31] и в оптическом [30, 32] спектральных диапазонах. В последнем для возможности работать с малыми длинами волн необходима очень высокая точность при изготовлении пластин.

Голограмма. Голографический метод генерации света с орбитальным угловым моментом тесно связан с методом спиральной фазовой пластины. Суть идеи заключается в том, чтобы использовать фазовую голограмму, чтобы обеспечить фазовый сдвиг $\exp(i\ell\phi)$ входного пучка света, в точности также, как использовалась спиральная фазовая пластина. Однако неизбежно останутся компоненты исходного пучка, не претерпевшие дифракции и не обладающие угловым моментом. Чтобы отделить требуемый пучок света, фазовая дифракционная решетка совмещается с искомой фазовой картиной. Результирующая голограмма содержит ℓ разветвлений в структуре решетки, соответствующих разнице между числом линий выше и ниже ветвления [33, 34]. На рис. 12.7, б показана голограмма, предназначенная для создания пучка света с $\ell = 1$. Как и после прохождения спиральной фазовой пластины, пучок, претерпевший дифракцию, представляет собой суперпозицию мод Лагерра–Гаусса с различными значениями p , однако можно сделать так, чтобы мода с $p = 0$ была доминирующей.

12.3.4. Другие пространственные профили поля. Мы убедились, что пучки света с азимутальной фазовой зависимостью $\exp(i\ell\phi)$ и соответствующей фазовой сингулярностью или вихрем вдоль оси z обладают орбитальным

угловым моментом $\ell\hbar$ на фотон. Однако, ошибочно было бы полагать, что угловой момент является свойством самого ядра вихря. В ядре вихря нет света, поэтому осевые плотности и потоки энергии, импульса и углового момента равны нулю. Конечно, угловой момент является свойством пучка в целом. Возможно сформировать такую суперпозицию мод Лагерра–Гаусса, что полный угловой момент пучка будет отличаться от топологического заряда (или значения ℓ), связанного с вихрем. Ярким примером этого служат эксперименты, демонстрирующие инверсию оптического вихря при распространении в свободном пространстве [35]. Естественно, угловой момент сохраняется в этой ситуации. Еще одним пример — это астигматические моды (см. рис. 12.8). В поперечной плоскости они характеризуются эллиптическим профилем интенсивности и эллиптическими контурами равной фазы с углом между главными осями двух эллипсов. Такие моды демонстрировали большую величину орбитального углового момента, но полное отсутствие вихря [36, 37].

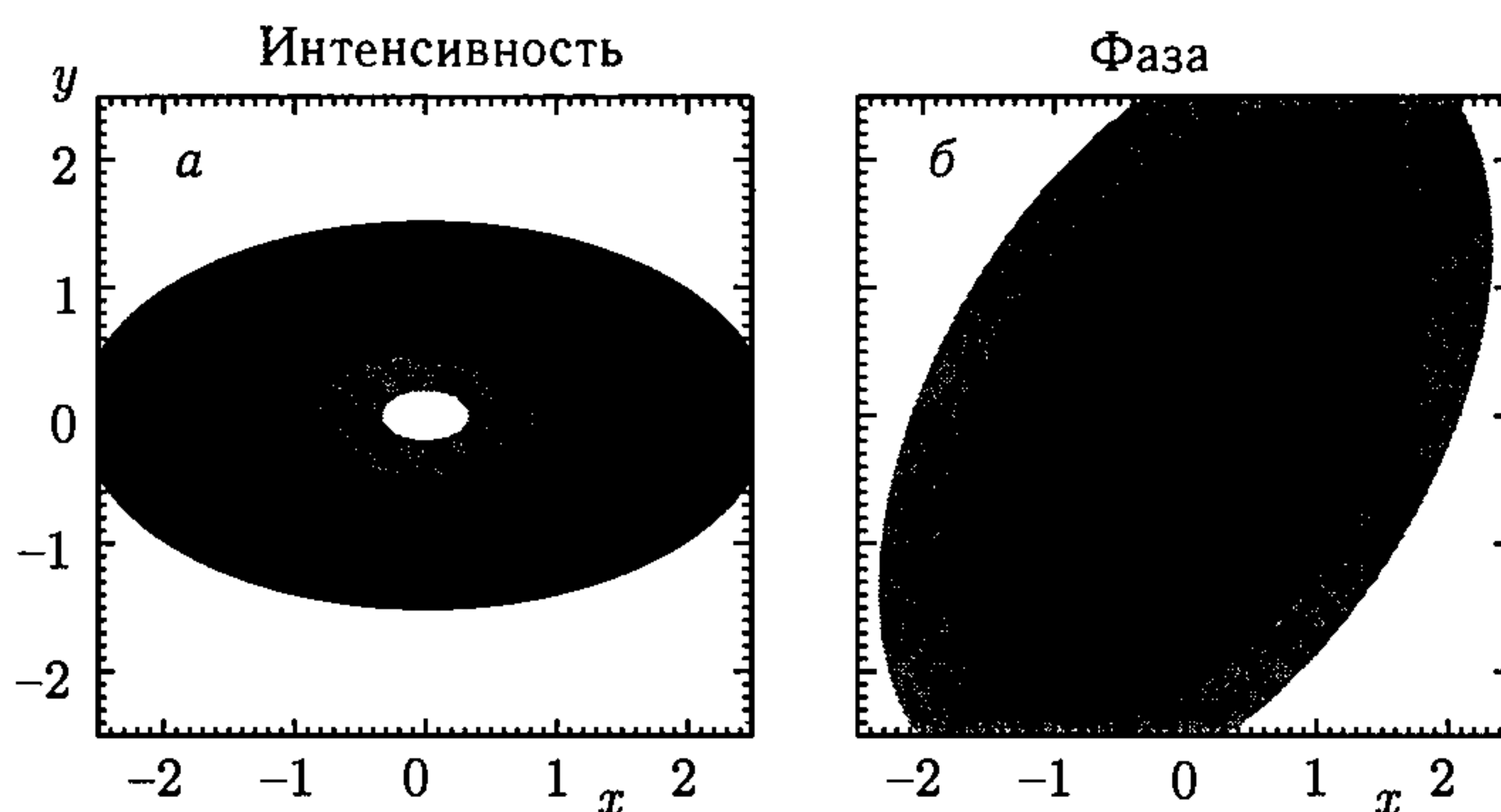


Рис. 12.8. Контурь равной интенсивности (а) и фазы (б) в поперечной плоскости типичной астигматической моды

Такую запутанную ситуацию можно прояснить, обратившись к квантовой теории и рассматривая одиночный фотон. Мы убедились, что каждый фотон в пучке Лагерра–Гаусса несет орбитальный угловой момент $\ell\hbar$. Мы также можем разложить любую моду по полному набору мод Лагерра–Гаусса. Это значит, что каждый фотон астигматической моды можно рассматривать как суперпозицию состояний с различными угловыми моментами. Большой орбитальный угловой момент, наблюдаемый для астигматических мод высокого порядка является следовательно средним угловым моментом $\langle\ell\rangle\hbar$, умноженным на число фотонов.

12.3.5. Дробный орбитальный угловой момент. Мы показали, что суперпозицию мод Лагерра–Гаусса можно характеризовать определенным средним значением орбитального углового момента, который может принимать любые требуемые целые или нецелые значения. Однако дробным орбитальным моментом мы характеризуем пучки света, приготовленные специальным образом, так чтобы азимутальная фазовая зависимость имела вид $\exp(i\ell\phi)$, где ℓ — не целое число. Первое известное нам исследование таких мод [98]

показало, что параметрический генератор света, работающий в вырожденном режиме и накачиваемый пучком Лагерра–Гаусса с $\ell = 1$, должен производить поле с полуцелым орбитальным угловым моментом и азимутальной зависимостью $\exp(i\phi/2)$. Такое поле неизбежно проявляет радиальный разрыв при определенном угле, т.е. чтобы поле оставалось однозначным, появляется радиальная линия нулевой интенсивности. Эту линию можно рассматривать как разрыв или границу домена между одинаково устойчивыми состояниями, в которых генерируемое поле субгармоники отличается знаком, т.е. на фазу π .

Дробный орбитальный угловой момент был создан с помощью спиральной фазовой пластины с фазовым шагом не равным произведению целого числа на 2π и с помощью аналогичных голограмм. В последних имеет место радиальный разрыв между полосами. Форма моды определяется значением ℓ и угловой координатой разрыва [32, 38, 39]. Конечно, это отличает ситуацию от мод с целым орбитальным угловым моментом, не имеющих разрывов.

Состояния с дробным угловым моментом не являются собственными модами параксиального волнового уравнения и поэтому не сохраняют свою форму при распространении. Этот процесс можно рассматривать как интерференцию между фазами Гюи, связанными с модами разных порядков. Распространение приводит к появлению богатой структуры вихрей, исследованной аналитически и наблюдавшейся экспериментально [38, 39].

12.4. Угловой момент в квантовой оптике

12.4.1. Состояния со спиновым и орбитальным угловыми моментами. Оптические методы, описанные в предыдущем разделе, наряду с известными волновыми пластинами, зависящими от поляризации, и поляризационными светоделителями позволяют в высокой степени контролировать спиновую и орбитальную компоненты оптического углового момента. Этот контроль распространяется и на квантовый режим, в котором были выполнены эксперименты с оптическим угловым моментом единичных фотонов [40–43, 96]. Для одиночного фотона, по крайней мере, в рамках параксиального приближения, возможно записать вектор состояния для углового момента в виде $|\ell\rangle \otimes |\sigma\rangle$ как собственный вектор полного углового момента:

$$\hat{J}_z |\ell\rangle \otimes |\sigma\rangle = (\ell + \sigma)\hbar |\ell\rangle \otimes |\sigma\rangle. \quad (12.26)$$

Здесь нетрудно выделить спиновый ($\sigma\hbar$) и орбитальный ($\ell\hbar$) вклады в полный угловой момент.

Поляризация описывается двумя ортонормированными векторами состояния с $\sigma = \pm 1$ или любой суперпозицией этих векторов. Это широко используется как физическая реализация *кубитов* — квантовых битов информации [47] и лежит в основе многих протоколов квантового распределения ключа [48]. Использование орбитального углового момента открывает еще более широкие перспективы и, в принципе, не ограниченное пространство состояний, каждое из которых связано с различными целыми значениями ℓ .

В этом направлении уже существует некоторый прогресс, включающий демонстрацию перепутывания между парами фотонов с определенным полным угловым моментом, но неизвестными значениями угловых моментов каждого из фотонов в отдельности (см. подразд. 12.6.3) [40]. Были продемонстрированы также системы передачи информации в свободном пространстве, в которых информация кодировалась различными значениями ℓ (см. подразд. 12.5.3) [49].

Орбитальный угловой момент тесно связан с фазовым профилем электромагнитного поля в плоскости, перпендикулярной оси распространения. По этой причине изучение орбитального углового момента естественным образом смыкается с изучением поперечных эффектов. В квантовой теории поперечных эффектов удобно ввести непрерывные операторы уничтожения и рождения фотонов $\hat{A}_\sigma(\mathbf{x})$ и $\hat{A}_\sigma^\dagger(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ — координатный вектор в плоскости, перпендикулярной оси распространения (направленной вдоль оси z), а σ обозначает поляризацию [50]. Квантовые эффекты включаются путем выполнения коммутационного соотношения:

$$[\hat{A}_\sigma(\mathbf{x}), \hat{A}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (12.27)$$

Моды Лагерра–Гаусса формируют в плоскости (x, y) полный ортонормированный набор, поэтому их можно использовать, чтобы ввести полный набор операторов уничтожения фотонов в этих модах:

$$\hat{a}_{p\ell\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{p\ell}^{\text{LG}}(\mathbf{x}) \hat{A}_\sigma(\mathbf{x}) dx dy. \quad (12.28)$$

Из этого определения нетрудно показать, что эти операторы и соответствующие им операторы рождения фотонов удовлетворяют необходимым коммутационным соотношениям для набора независимых бозонных мод:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{p\ell\sigma}, \hat{a}_{p'\ell'\sigma'}^\dagger] &= \delta_{pp'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{\sigma\sigma'}, \\ [\hat{a}_{p\ell\sigma}, \hat{a}_{p'\ell'\sigma'}] &= 0 = [\hat{a}_{p\ell\sigma}^\dagger, \hat{a}_{p'\ell'\sigma'}^\dagger]. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Таким образом, в рамках квантовой оптики можно описать поперечные эффекты, используя как подход на основе непрерывных мод, так и, где это необходимо, операторы мод с определенным орбитальным угловым моментом.

12.4.2. Измерение орбитального углового момента. В квантовой оптике для анализа и использования орбитального углового момента важно иметь эффективный метод его измерения. На рис. 12.9 проиллюстрированы некоторые методы, успешно применявшиеся для этой цели. Возможно наиболее простой концептуально метод изображен на рис. 12.9, *а*. Здесь используется интерферометр Маха–Цендера, в одно из плеч которого помещена призма Дове. Благодаря полному внутреннему отражению, эта призма действует как отражатель пучка относительно вертикальной оси. Результирующая интерференционная картина содержит $2|\ell|$ полос, что позволяет определить ℓ простым

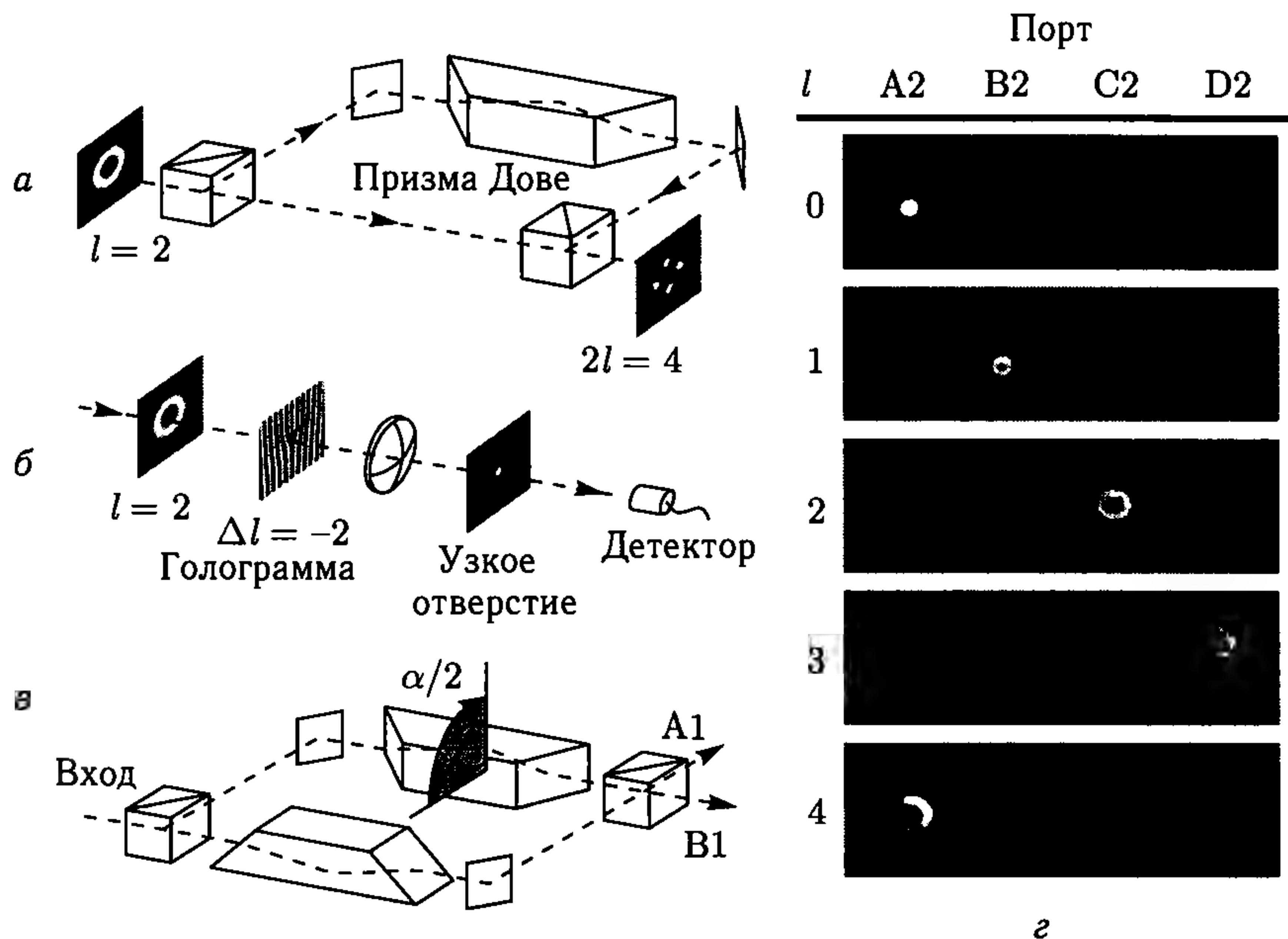


Рис. 12.9. Различные схемы измерения орбитального углового момента (а–в) и экспериментальное наблюдение ℓ , равного 4 по модулю, с помощью трех интерферометров (г). Заимствовано из [41]

подсчетом полос [27, 44]. Однако этот метод не применим на однофотонном уровне, поскольку на детекторе будет наблюдаться только одно пятно, а не требуемая картина из $2|\ell|$ полос.

В случае одного фотона можно использовать голограмму или спиральную фазовую пластину, чтобы изменить значение ℓ на выбранную величину $\ell \rightarrow \ell - \Delta\ell$. Тогда и только тогда, когда вызванное изменение приводит к $\ell = 0$, исходный пучок превращается в пучок с интенсивностью на оси. Следовательно, фокусировка света на малое отверстие, порождает свет только если исходный пучок имел $\ell = \Delta\ell$ (см. рис. 12.9, б) [45]. Поэтому детектирование фотона отвечает тому, что значение ℓ совпадает со значением $\Delta\ell$ фотона. Действительно, отсутствие фотона не позволяет сделать вывод, что $\ell \neq \Delta\ell$, поскольку большая часть мод с $\ell = 0$ сфокусирована вне малого отверстия. Более сложная, созданная с помощью компьютера, голограмма использовалась для детектирования состояний с несколькими разными ℓ , однако эффективность этого процесса не может превышать обратное число различных детектируемых значений ℓ [46].

Другой метод, показанный на рис. 12.9, в, по крайней мере теоретически, позволяет со 100% эффективностью узнать набор значений ℓ . В интерферометр, показанный на рис. 12.9, а, помещена вторая призма Дове. Их суммарное действие приводит к фазовому сдвигу между полями в двух плечах интерферометра, который зависит от ℓ и равен $\ell\alpha$, где α — удвоенный угол между осями ориентации двух призм. Если, например, $\alpha = \pi$, то поля, приходящие на выходной светоделитель будут находиться в фазе для четных значений ℓ , но

не в фазе для нечетных значений, что, следовательно, позволяет определить четное ℓ или нет даже для одиночного фотона, следя за направлением, в котором он выходит из интерферометра [41]. Помещая дополнительно такие же интерферометры на выходе, можно кроме того разделить различные значения ℓ . На рис. 12.9, г представлены результаты двухэтапной сортировки по ℓ с помощью в общей сложности трех интерферометров, что позволяет измерять ℓ , равное 4 по модулю. Практическое усовершенствование этой схемы описано в [51]. Спиновый угловой момент нетрудно преобразовывать и измерять, используя поляризационно-чувствительные элементы, такие как волновые пластины и поляризационные светоделители. Они могут быть включены в схему интерферометра, осуществляющего сортировку по орбитальному угловому моменту, что дает возможность измерять полный угловой момент $\ell + \sigma$ [52].

12.5. Угол и угловой момент

12.5.1. Соотношение неопределенности для угла и углового момента. Моды, отвечающие точно определенному орбитальному угловому моменту, обладают зависимостью от азимутальной координаты в виде $\exp(i\ell\phi)$ и, следовательно, интенсивность моды имеет цилиндрическую симметрию. Это аналогично поведению, имеющему место в квантовой механике, когда собственные состояния $\hat{L}_z$ ассоциируются с цилиндрически симметричными распределениями вероятностей. Следовательно, любая попытка локализовать угловую координату неизбежно приведет к уширению значений углового момента. Эта ситуация является отражением сопряжения между угловой координатой ϕ и соответствующим угловым моментом L_z .

Дополнительность ϕ и L_z можно выразить с помощью соотношения неопределенности. Однако при этом необходимо учитывать, что все физические характеристики являются периодическими функциями угловой координаты. Поэтому нужно ограничить значения наблюдаемого угла диапазоном 2π . Таким образом, угловой оператор $\hat{\phi}_\theta$ будет иметь собственные значения ϕ , лежащие в интервале от θ до $\theta + 2\pi$ с общим диапазоном выбора $-\pi \leq \phi < \pi$. Эта зависимость от выбора углового диапазона обозначается нижним индексом θ у углового оператора. Корректная запись свойств $\hat{\phi}_\theta$ требует некоторой аккуратности, включая использование специальной процедуры перехода к пределу [53], и аналогична взятию производной фазового оператора для моды поля [54, 55]. В результате получаем, что для состояний с конечными неопределенностями углового момента можно записать [53]:

$$\Delta\phi_\theta \Delta L_z \geq \frac{\hbar}{2} |1 - 2\pi P(\theta)|, \quad (12.30)$$

где $\Delta L_z = \hbar\Delta\ell$, $P(\theta)$ — плотность угловой вероятности на границе выбранного углового диапазона. Можно видеть, что для собственных состояний углового момента $\Delta L_z = 0$, что делает правую часть неравенства тоже равной 0 и, следовательно, $P(\theta) = 1/2\pi$. Это проявление вращательной симметрии

собственных состояний углового момента. Однако для состояний с хорошо локализованными углами можно получить $P(\theta) \approx 0$, так что $\Delta\phi_\theta \Delta L_z \geq \hbar/2$.

12.5.2. Умные состояния и состояния с минимальным произведением неопределенностей. Соотношение неопределенности (12.30) ограничивает точность, с которой можно одновременно фиксировать угловую координату и угловой момент. Поэтому важно определить вид состояний, минимизирующих произведение неопределенностей. Нижняя граница, определяемая правой частью выражения (12.30), зависит от плотности угловой вероятности $P(\theta)$ и, следовательно, сама нижняя граница зависит от состояния. В связи с этим имеется по крайней мере два различных способа, которые приводят к минимуму произведения неопределенностей. Это так называемые умные состояния [56] и состояния с минимальным произведением неопределенностей [57]. Получим вид этих состояний, используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа [59, 60].

Умные состояния. Состояния, которые насыщают соотношение неопределенности, т.е. реализуют знак равенства в этом соотношении, называют умными состояниями [58]. Такие состояния удовлетворяют простому уравнению для собственных значений, принимающему для углового момента и угла вид:

$$\left[\hat{L}_z - \langle \hat{L}_z \rangle - i\hbar\lambda(\hat{\phi}_\theta - \langle \hat{\phi}_\theta \rangle) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (12.31)$$

В угловых переменных, можно решить это уравнение и найти угловую функцию $\Psi(\phi)$:

$$\left[i\frac{d}{d\phi} + \bar{\ell} + i\lambda(\phi - \bar{\phi}_\theta) \right] \Psi(\phi) = 0, \quad (12.32)$$

где $\bar{\ell} = \langle \hat{L}_z \rangle / \hbar$ и $\bar{\phi}_\theta = \langle \hat{\phi}_\theta \rangle$. В процессе поиска решения, для того чтобы производная $d\Psi(\phi)/d\phi$ имела хорошее поведение, необходимо потребовать

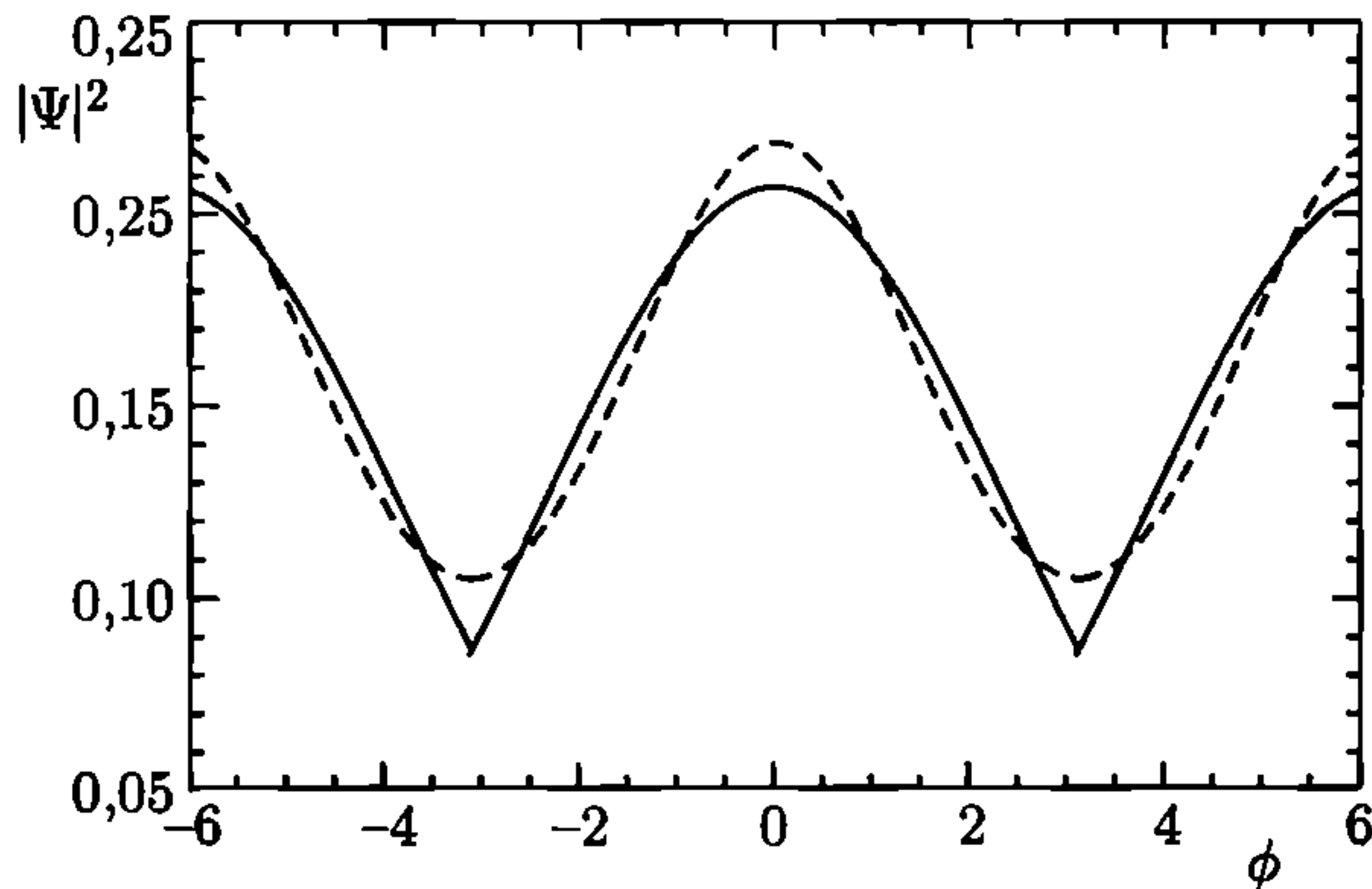


Рис. 12.10. Умные состояния и состояния с минимальным произведением неопределенностей для случая неопределенности угла $\Delta\phi = 1,6$

непрерывность функции $\Psi(\phi)$. Выбирая $\theta = -\pi$, так что $-\pi \leq \phi < \pi$, получим решение

$$\Psi(\phi) = \frac{(\lambda/\pi)^{1/4}}{\sqrt{\operatorname{erf}(\pi\sqrt{\lambda})}} e^{i\bar{\ell}\phi} e^{-\lambda\phi^2/2}, \quad (12.33)$$

нормированное на интервале от $-\pi$ до π [56]. Вид волновой функции (12.33) изображен на рис. 12.10 сплошной кривой. Ожидаемое значение угла для такого состояния равно нулю, а требование непрерывности волновой функции приводит к тому, что $\bar{\ell}$ должно быть целым. Неопределенности угла и углового момента для этого состояния имеют вид:

$$\Delta\phi = (2\lambda)^{-1/2} \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{\pi\lambda} e^{-\pi^2\lambda}}{\operatorname{erf}(\pi\sqrt{\lambda})}}, \quad (12.34)$$

$$\Delta\ell = \lambda\Delta\phi,$$

где мы использовали обозначение $\Delta\phi = \Delta\phi_{(-\pi)}$. Отсюда нетрудно получить соотношение

$$\Delta\phi \Delta\ell = \frac{1}{2} |1 - 2\pi|\Psi(\pi)|^2|, \quad (12.35)$$

подтверждающее, что (12.33) действительно является умным состоянием.

Состояния с минимальным произведением неопределенностей. Для любого данного значения $\Delta\phi$ минимальное значение произведения неопределенностей $\Delta\phi \Delta\ell$ может не совпадать с тем, что дается соответствующим умным состоянием. Это так, поскольку состояния, минимизирующие произведение неопределенностей угла и углового момента, могут иметь значение $|1 - 2\pi P(\theta)|/2$, заметно меньшее, чем найденное нами для соответствующего умного состояния. Состояния, которые минимизируют произведение неопределенностей $\Delta\phi \Delta\ell$ при данном $\Delta\phi$ или $\Delta\ell$ называются состояниями с минимальным произведением неопределенностей (или состояниями натянутыми на минимальное произведение неопределенностей) [57]. Процедура минимизации позволяет записать для состояний $|f\rangle$ уравнение для собственных значений:

$$\left(\frac{\hat{L}_z^2}{\hbar^2} + \lambda\phi^2 \right) |f\rangle = \mu |f\rangle, \quad (12.36)$$

где λ и μ — вещественные постоянные. Это уравнение можно решить, опять используя угловое представление, и получить угловую волновую функцию $f(\phi)$. При этом необходимо обеспечить непрерывность как самой волновой функции, так и ее первой производной, чтобы вторая производная, возникающая как квадрат углового момента $\hat{L}_z^2 \rightarrow -\hbar^2 \partial^2 / \partial \phi^2$, имела хорошее поведение. Результирующую волновую функцию можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$f(\phi) = \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}\phi^2}{2}\right) M\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\mu}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{2}, \sqrt{\lambda}\phi^2\right), \quad (12.37)$$

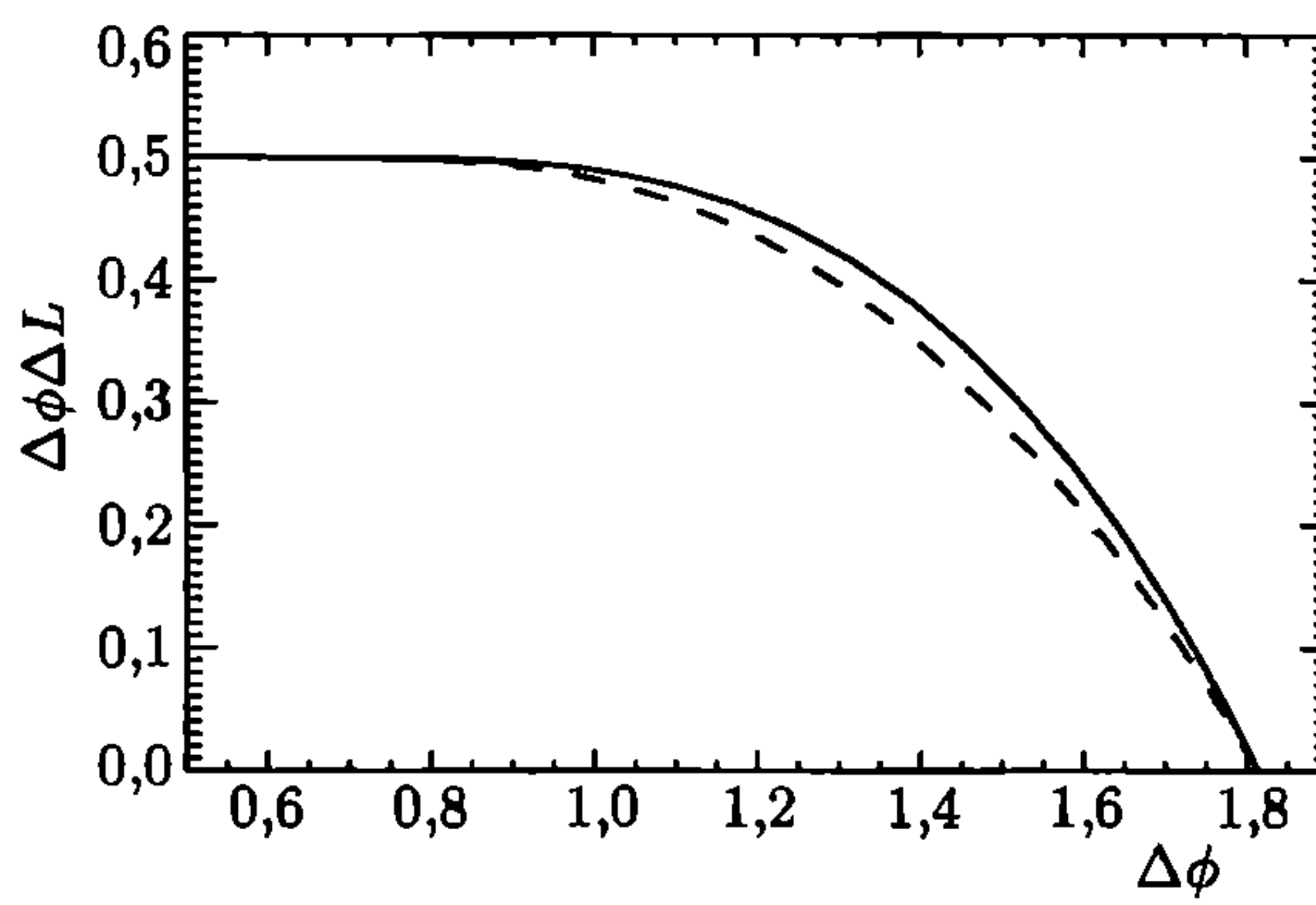


Рис. 12.11. Произведение неопределенностей для умных состояний (сплошная линия) и для состояний с минимальным произведением неопределенностей (штриховая линия) в зависимости от неопределенности угла

где соотношение между μ и λ такое, что обеспечивает требуемую непрерывность $f(\phi)$. Вид этой волновой функции показан на рис. 12.10 штриховой кривой. Если неопределенность угла не слишком велика, это состояние можно хорошо аппроксимировать последовательностью перекрывающихся гауссовских функций:

$$f(\phi) \approx \kappa \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\sqrt{\lambda} (\phi + 2n\pi)^2}{2} \right], \quad (12.38)$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$, и κ — нормировочная константа. На рис. 12.11 приведено сравнение произведений неопределенностей для умных состояний и состояний с минимальным произведением неопределенностей.

Экспериментальные проверки. Вид соотношения неопределенностей (12.30) и соответствующие умные состояния (12.33) были подтверждены экспериментальными проверками [56]. Схема эксперимента представлена на рис. 12.12. Умное состояние приготавливалось посредством апертуры, вызывающей требуемую гауссову угловую зависимость входной гауссовой моды с $\ell = 0$. Угловой момент результирующей моды анализировался, используя метод голограммы и малого отверстия, описанный в разд. 12.4. Интенсивности, измеренные для различных значений ℓ и значения $\Delta\phi$, навязываемые апертурой, использовались затем для вычисления экспериментальной величины произведения неопределенностей $\Delta\phi \Delta\ell$.

На рис. 12.3 представлены полученные для произведения неопределенностей результаты в зависимости от величины $\Delta\phi$, которые сравниваются с теоретической кривой, полученной для умных состояний из соотношения неопределенностей. Видно, что для большей части значений $\Delta\phi$ результаты хорошо согласуются с теорией. Несколько худшее соответствие, наблюдаемое при малых значениях $\Delta\phi$, обусловлено трудностью достаточно точного измерения больших угловых моментов, входящих в $\Delta\ell$. При больших значениях $\Delta\phi$ состояние оказывается очень близким к собственному состоянию углового

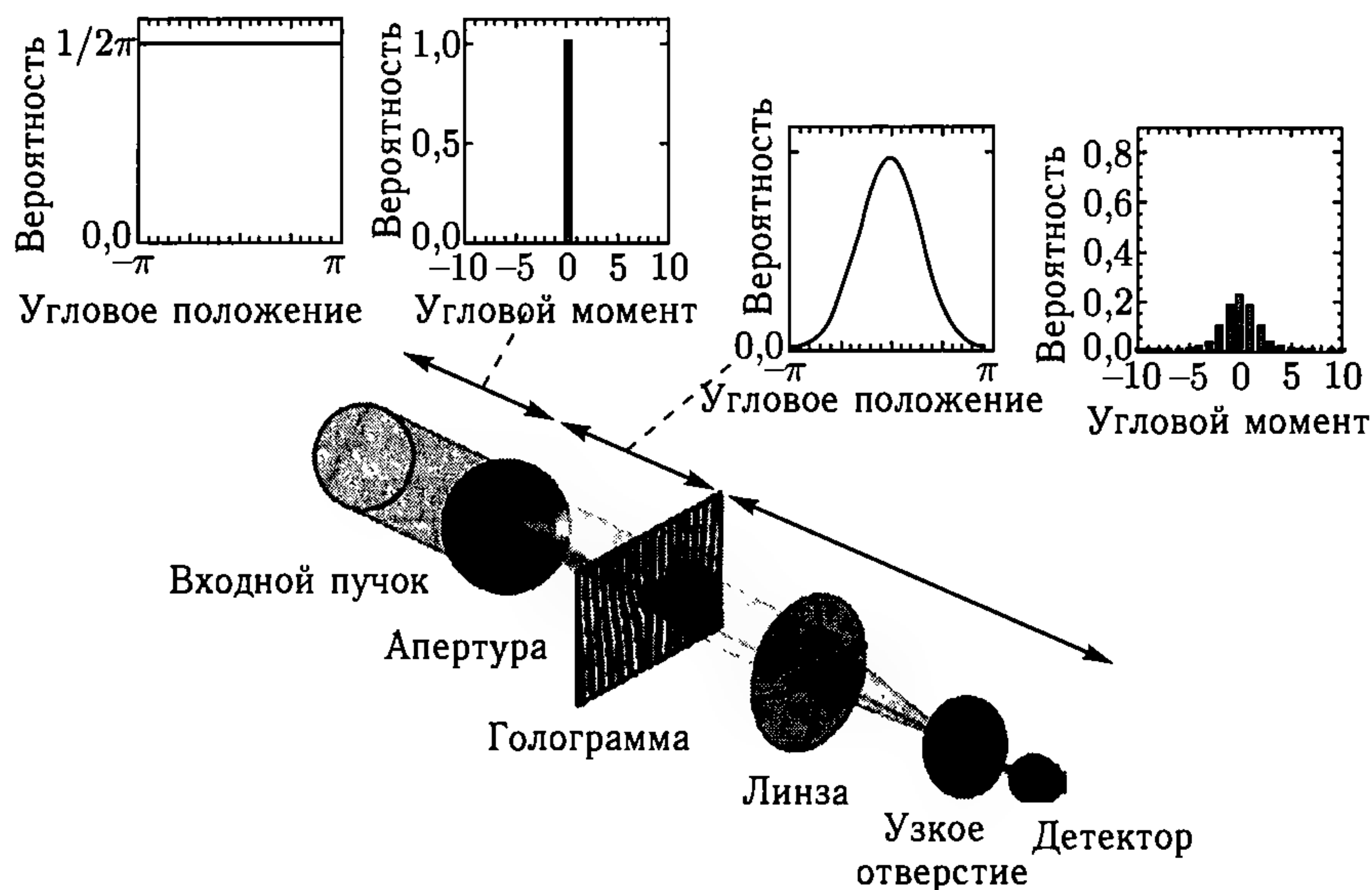


Рис. 12.12. Схема эксперимента для наблюдения неопределенностей угловой координаты и углового момента. Пучок света проходит через апертуру, ограничивающую угловую координату, что приводит к уширению соответствующих состояний углового момента света. Пространственный модулятор света используется как для получения света с ограниченной апертурой, так и для создания голограммы для анализа углового момента. Вероятность каждой из компонент углового момента получается путем разделения результирующего света, прошедшего через малое отверстие. Заимствовано из [56]

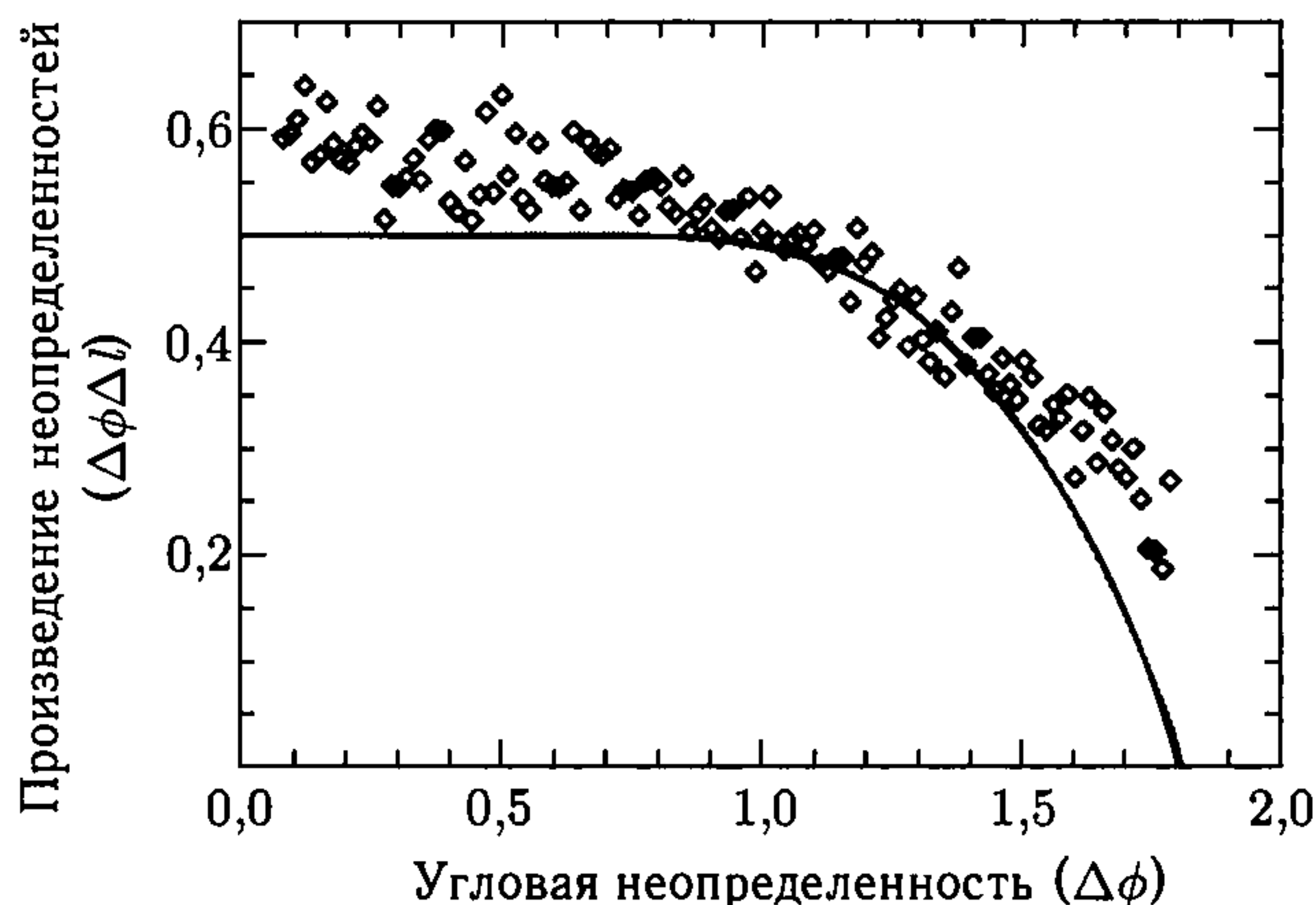


Рис. 12.13. Сравнение экспериментальных значений для произведений неопределенностей $\Delta\phi\Delta\ell$ с теоретической кривой, изображенной сплошной линией. Заимствовано из [56]

момента и наблюдение неопределенности углового момента затрудняется из-за экспериментального шума.

12.5.3. Передача информации. Орбитальный угловой момент света можно использовать для переноса информации, где различные значения ℓ соответствуют различным возможным «буквам» сигнала. Передача информации с помощью различных состояний орбитального углового момента не

может быть осуществлена на основе волоконной связи, поскольку волоконные кабели пропускают лишь весьма ограниченный диапазон пространственных мод, а также перемешивают относительные фазы между ними. Однако такая передача информации вполне возможна в свободном пространстве. Недавние эксперименты продемонстрировали выполнимость передачи информации с помощью орбитального углового момента в свободном пространстве [49]. Устройство связи состоит из передающего и принимающего телескопов. В передающем телескопе с помощью пространственного модулятора света, работающего как голограмма, создается свет с выбранным значением ℓ . Значение ℓ анализируется принимающим телескопом посредством второй голограммы.

Соотношение неопределенностей между углом и угловым моментом обеспечивает меру безопасности от подслушивания. Она основана на том, что обычно подслушивающий имеет доступ лишь к малой части пучка, и, согласно соотношению неопределенностей, этот свет будет иметь уширенный по ℓ спектр [49, 62]. Теоретические и экспериментальные эффекты, связанные с вырезанием части пучка, представлены на рис. 12.14.

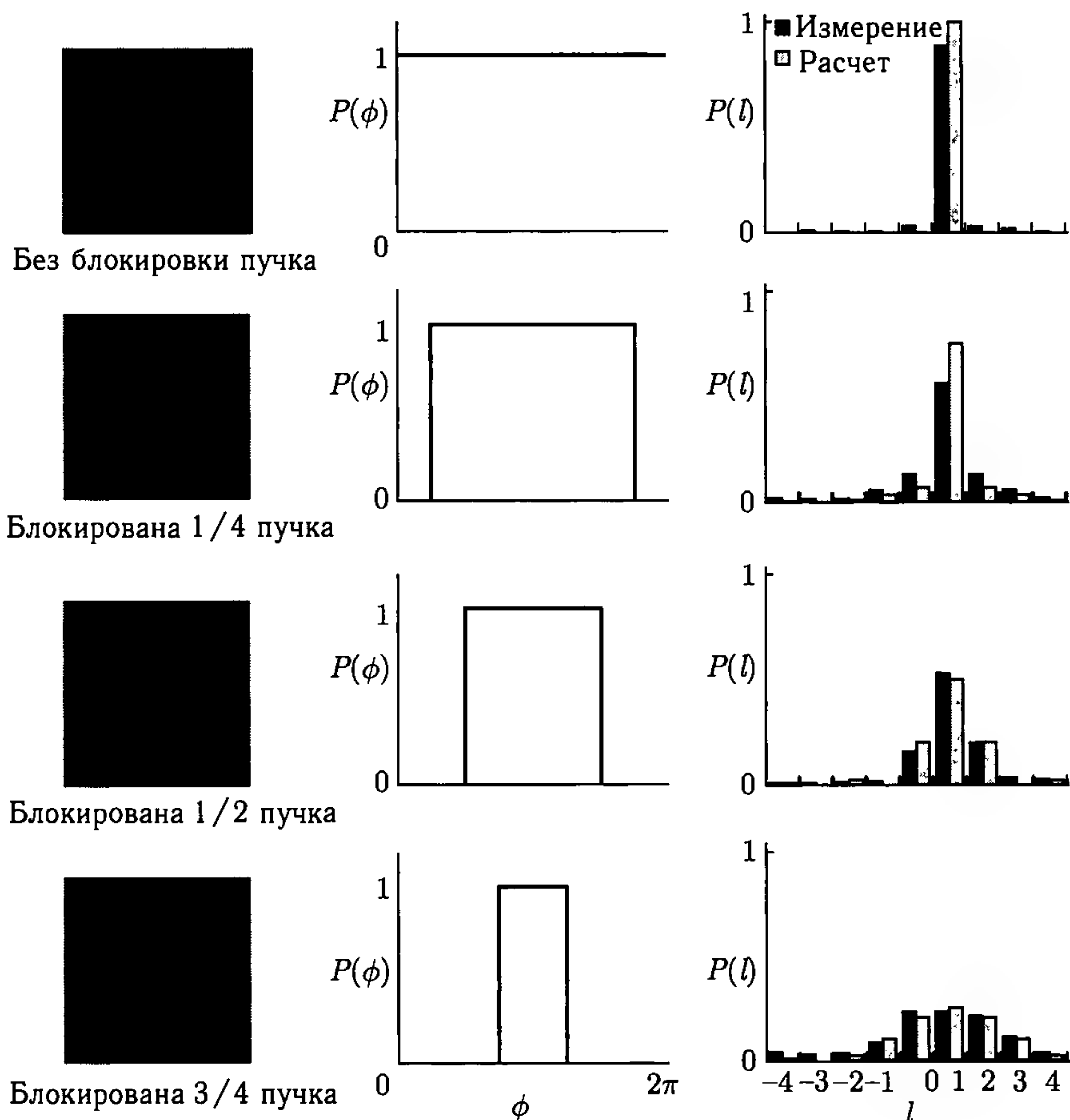


Рис. 12.14. Влияние блокировки пучка с определенным значением углового момента на распределение углового момента. Заимствовано из [49]

Орбитальный угловой момент — это очень полезное квантовое свойство света. Использование этой степени свободы для квантовой передачи информации позволит сконструировать так называемые состояния кунитов [61].

12.5.4. Измерения вращений. Недавно были проведены эксперименты, демонстрирующие измерение смещения с высоким разрешением, основанное на использовании специфической пространственной моды — новой «перевернутой» моды [63]¹⁾. Действительно, достигаемая точность зависит не только от числа фотонов в квантовом состоянии пучка, что в большинстве случаев справедливо при интерферометрии [64, 65], но также и от поперечного пространственного распределения. Выбор пространственной моды также важен для увеличения точности измерения вращения пучка света относительно своей оптической оси. Предельное разрешение при измерениях вращения не зависит от числа используемых фотонов, а в значительной степени определяется полным числом квантов с орбитальным угловым моментом, содержащихся в световом пучке [66].

Рассмотрим пучок света, распространяющийся в направлении z через *вращатель изображения*, такой как вращающаяся призма Дове, или две стационарные призмы Дове с определенной относительной ориентацией. Выходной пучок будет азимутально повернут на угол $\delta\phi$ вокруг оси z . Естественный способ измерения малых углов $\delta\phi$ — это наблюдение азимутального смещения пятна света, падающего на край вращателя. Тогда достижимая экспериментально точность ограничена конечными размерами используемых оптических элементов. Для устройства с радиальной апертурой R , азимутальное разрешение равно [66]:

$$\delta\phi \propto \frac{1}{\sqrt{\ell_M}} f(N), \quad (12.39)$$

где $\ell_M = \left(\frac{R}{w_0} - 1\right)^2$ — максимальное значение углового момента, проходящее через устройство. Функция $f(N)$ имеет вид $N^{-1/2}$, $N^{-3/4}$, N^{-1} для когерентного состояния, состояния с сильным сжатием и фоковского состояния, соответственно, где N — среднее число фотонов [67].

Разрешение измерения поворота можно повысить, выбирая соответствующую пространственную моду. Если входной пучок находится в собственном состоянии углового момента, то постоянный фазовый сдвиг может быть добавлен только в результате действия вращателя. Это подсказывает возможность использования интерферометра с вращателем, помещенным в одном из плеч, с входными пучками, находящимися в собственных состояниях углового момента. Разность интенсивностей двух пучков на выходе зависит как от фазового сдвига, который в данном случае составляет $\ell\delta\phi$, так и от квантового состояния входных пучков, так что наименьший фазовый сдвиг, который можно детектировать, равен [66]:

$$\delta\phi \propto \frac{1}{\ell} f(N). \quad (12.40)$$

¹⁾ См. также главу 4 этой книги.

Для состояний Фока ($f(N) = 1/N$) минимальное детектируемое вращение определяется полным числом квантов с орбитальным угловым моментом $N\ell$. Следовательно, можно увеличить чувствительность измерений поворотов не только с помощью неклассических состояний света (варьируя зависимость от N), но также используя легко достижимые собственные моды орбитального углового момента (выбирая геометрическую функцию ℓ_M). Более того, использование таких мод для повышения углового разрешения является довольно грубым (устойчивым к потерям) инструментом, поскольку неважно как много фотонов теряется, так как каждый из оставшихся фотонов по-прежнему содержит $\ell\hbar$ единиц углового момента.

12.6. Орбитальный угловой момент в квантовой нелинейной оптике

Вихревые пучки с орбитальным угловым моментом рано стали объектом исследования нелинейной классической оптики, однако в основном изучались как своеобразный пример *сингулярностей*, а именно, как фазовые сингулярности или винтовые дислокации¹⁾ [68, 69]. Даже после обнаружения в 1992 г. [1] определенной величины орбитального углового момента, приходящейся на каждый фотон пучка Лагерра–Гаусса, большая часть статей в области сингулярной оптики не проявила определенного интереса к этому механическому свойству света [70]. Возможно, это не так уж неожиданно, поскольку в общем случае связь между вихрями и орбитальным угловым моментом не так проста, как в случае мод Лагерра–Гаусса (ЛГ). В этом разделе мы рассмотрим орбитальный угловой момент в нелинейной оптике. Для знакомства с исследованиями в области сингулярной оптики и вихревых солитонов рекомендуем обратиться к [71, 94, 72].

В подразд. 12.3.3 мы суммировали некоторые методы генерации пучков с орбитальным угловым моментом, основанные на использовании преобразователей мод, спиральных фазовых пластин и голограмм. Это устройства с линейным откликом на входной пучок. Пучки с орбитальным угловым моментом можно также генерировать в нелинейных устройствах в спонтанных процессах. В частности, можно привести пример лазеров, в которых в резонатор помещены оптические элементы с круговой симметрией, что приводит к генерации мод ЛГ высокого порядка [73, 74].

Активно развивается область исследований углового момента в нелинейной оптике, посвященная эффектам, наблюдаемым в оптических устройствах, накачиваемых пучками ЛГ или Бесселя. В качестве таких устройств исследуются квадратичные кристаллы [40, 75], нелинейные резонаторы [81], лазеры [83, 84] или холодные атомы [85]. Важный вопрос, возникающий при смешении волн в нелинейных устройствах — это сохранение их механических свойств (см. подразд. 12.6.1). Несколько экспериментов подтвердили сохранение орбитального углового момента фотонов при преобразовании частоты вверх и вниз, а также при четырехволновом смешении. Эти процессы об-

¹⁾ См. также [23].

суждаются в подразд. 12.6.2 и 12.6.3. Другой интересный вопрос касается устойчивости пучков с орбитальным угловым моментом при распространении в нелинейной среде; этому вопросу за последнее десятилетие посвящено несколько теоретических исследований. Пример устойчивого кольцевого солитона наблюдали недавно в двумерных оптически индуцированных фотонных решетках [86, 87]. С другой стороны, неустойчивость вихревых солитонов при распространении позволяет наблюдать яркие динамические проявления орбитального углового момента света, что обсуждается в подразд. 12.6.4. В заключение этого раздела рассмотрены некоторые эксперименты по спонтанному формированию пространственных структур, обладающих дробным угловым моментом на фотон.

12.6.1. Фазовый синхронизм. Процесс волнового смешения в нелинейных материалах эффективно реализуется, только если фазы волн согласованы таким образом, чтобы приводить к конструктивной интерференции. Рассматривая трехволновое смешение, наблюдаемое в квадратичных кристаллах, приходим к условиям согласования частот и фаз: $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ и $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Анализируя нелинейное взаимодействие на квантовом уровне видим, что суммы частот и волновых векторов рождающихся фотонов равны по величине частотам и волновым векторам уничтожаемых фотонов. Эти условия можно интерпретировать как отражение закона сохранения энергии и импульса соответственно. Взаимодействие между светом и средой, рассмотренное здесь, действительно предполагает, что ни энергия ни импульс не передаются среде в процессе взаимодействия.

Недавние эксперименты показали, что орбитальный угловой момент также является величиной, сохраняющейся в нелинейных процессах [40, 75], как показано в следующих разделах. В случае смешения трех волн это выражается как $\ell_0 = \ell_1 + \ell_2$, где $\ell_{0,1,2}$ — угловые моменты фотонов накачки, сигнального и холостого. В [77] показано, что сохранение орбитального углового момента также следует из условий фазового синхронизма. Более сложные ситуации возникают в непараксиальной оптике [78–80] или для не коллинеарных взаимодействий [76].

Интересно, что спиновый угловой момент обычно не сохраняется в процессе волнового смешения. Например, при фазовом синхронизме первого типа волны на низких частотах обычно поляризованы ортогонально высокочастотной волне. Фактически, для того чтобы синхронизовать фазы при трехволновом смешении, необходимо использовать двулучепреломляющие материалы. Как показано в подразд. 12.2.3, взаимодействие в этом случае анизотропно, спиновый угловой момент света, вовлеченного в процесс, не сохраняется, и заметная часть углового момента передается среде.

12.6.2. Генерация второй гармоники пучков Лагерра–Гаусса. Генерация второй гармоники является результатом смешения трех волн в квадратичной среде, когда частота волны накачки $\omega = \omega_1 = \omega_2$ удваивается $\omega_0 = 2\omega$. Было показано, что если накачка содержит $\ell\hbar$ единиц орбитального углового момента на фотон, то вторая гармоника имеет $2\ell\hbar$ единиц [88]. Простое объяснение этого явления основано на предположении, что амплитуда генерируемой волны пропорциональна квадрату амплитуды волны накачки. Для

моды Лагерра–Гаусса $L_{0,\ell}$ вторая гармоника будет иметь моду $L_{0,2\ell}$ с перетяжкой пучка уменьшенной в $\sqrt{2}$ раз. В [88] также получена согласующаяся картина, в предположении, что векторы Пойнтинга взаимодействующих волн коллинеарны. Поскольку вектор Пойнтинга пучка накачки $u_{0\ell}^{\text{LG}}$ закручивается по спирали со скоростью ℓ/kr [89], то генерируемый пучок, имеющий удвоенное k , должен также иметь удвоенное значение ℓ , для того чтобы скорость вращения для обеих волн была одинаковой.

Экспериментальная демонстрация сохранения углового момента получена при наблюдении пространственных структур в пучках основной и второй гармоник. В [88] это достигалось путем использования цилиндрических преобразователей мод, превращающих моды Эрмита–Гаусса в моды Лагерра–Гаусса с $n - m = \ell$ и $m = p = 0$ (см. подразд. 12.3.3). Интерферометрический метод также частично использовался для получения фундаментального соотношения между орбитальным моментом и азимутальным фазовым распределением пучка. В [75] пучок света интерферировал со своим зеркальным отражением, полученным с помощью призмы Дове, давая характерные разветвляющиеся

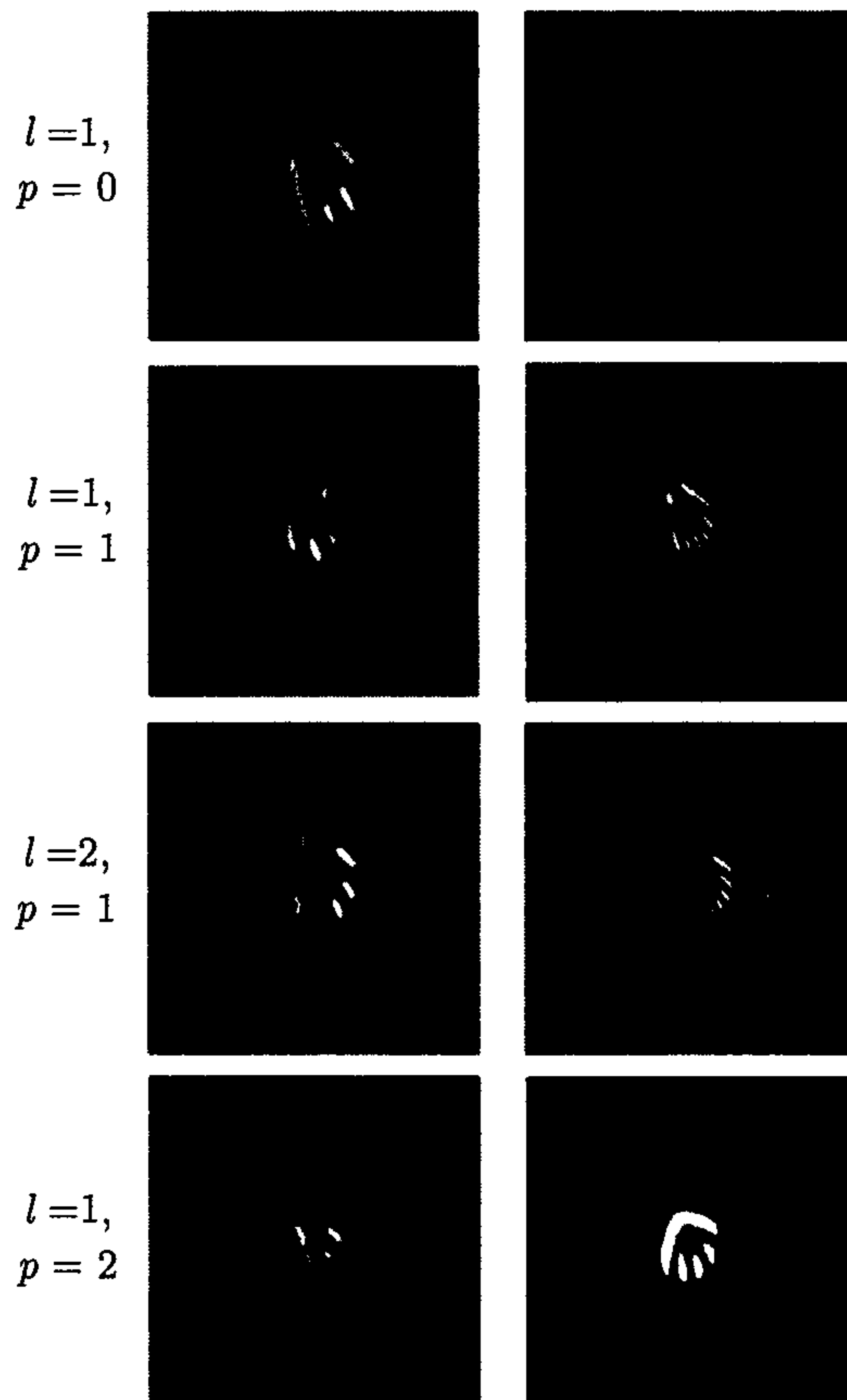


Рис. 12.15. Разветвляющиеся интерферограммы для различных мод $u_{p\ell}^{\text{LG}}$ основного излучения (слева) и соответствующие им вторые гармоники (справа). Исследованы случаи $p = 0$ и $p \neq 0$. Заимствовано из [75]

диаграммы, изображенные на рис. 12.15. Значение ℓ равно половине числа светлых полос при ветвлении. В экспериментально полученных изображениях основной и второй гармоник легко увидеть удвоение ℓ .

Сохранение орбитального углового момента при генерации второй гармоники также было продемонстрировано для мод Лагерра–Гаусса с $p \neq 0$. Для пучка накачки с многокольцевой модовой структурой $p \neq 0$ вторая гармоника будет суперпозицией мод с различными индексами p , в отличие от одномодового состояния, как в случае $p = 0$. Эти моды имеют различные фазы Гюи и интерферируют, давая пространственные распределения, меняющиеся при распространении, но имеют фиксированный азимутальный индекс 2ℓ . Экспериментальные данные, приведенные на рис. 12.15, демонстрируют сохранение орбитального углового момента для $p = 1, 2$. Аналогичные результаты можно получить, рассматривая вместо пучков Лагерра–Гаусса пучки Бесселя [92].

Генерация второй гармоники — это частный (вырожденный) случай процессов с суммированием частоты, при которых две волны с частотами ω_1 и ω_2 инжектируются в квадратичный кристалл и складываются в третью волну $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. В этом более общем случае также было продемонстрировано сохранение орбитального углового момента [90]. Это позволяет получить арифметические сумму и разность топологических зарядов, и, аналогично, орбитальных угловых моментов, для отдельных мод $u_{0\ell}^{\text{LG}}$.

Мы сосредоточили здесь внимание на сохранении угловых моментов для нелинейных взаимодействий вихревых пучков при условии устойчивого распространения. Более точный анализ показывает, что кольцевые пучки в нелинейных оптических материалах могут быть азимутально неустойчивы [93]. Эта проблема широко изучалась аналитически и численно (см. обзор [94]). В подразд. 12.6.4 будут рассмотрены недавние эксперименты в этой области в контексте нелинейностей высокого порядка.

12.6.3. Преобразование частоты вниз и перепутывание. В предыдущем разделе обсуждалось сохранение орбитального углового момента в нелинейных процессах с суммированием частоты, когда пространственное распределение двух входных волн навязывает форму суммарной волны через условие фазового синхронизма. В случае параметрического рассеяния волна накачки с частотой ω_0 преобразуется в две волны с частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$), называемые сигнальной и холостой. Фазовый синхронизм навязывает в этом случае только комплементарность фаз рассеянных пучков, но не их индивидуальные значения. Действительно, или сигнальная или холостая волна являются в общем случае суперпозицией собственных состояний орбитального углового момента, которые по отдельности, как известно, являются некогерентными. Однако измерение в схеме совпадений позволяет видеть, что орбитальные угловые моменты каждой пары параметрически рассеянных фотонов составляют в сумме значение орбитального углового момента фотона накачки [40].

Отсутствие определенного фазового профиля и углового момента у сигнального и холостого пучков по-отдельности не позволяет непосредственно следить за сохранением этих величин, измеряя пространственный профиль пучков [95]. Действительно, сохранение в этих спонтанных процессах наблю-

дается только при измерении кросс-корреляций между различными пространственными модами сигнального и холостого пучков [40, 96]. С другой стороны, определенные пространственные моды можно получить в параметрически преобразованных полях в процессе индуцированного параметрического преобразования частоты вниз [97], или путем строгого поперечного отбора при спонтанном параметрическом преобразовании частоты вниз полей, полученных с помощью пучков Бесселя [82], или же в параметрических генераторах света (ПГС) [81]. В работе [97] кроме пучка накачки в кристалл инжектировалась также холостая волна, индуцируя излучение определенной моды. Детектирование трех взаимодействующих полей с помощью ССD-камеры подтвердило, что угловой момент холостой волны равен $\ell_2 = \ell_0 - \ell_1$. Сохранение также можно наблюдать в параметрических генераторах света, работающих в надпороговом режиме, но только при выполнении определенных условий резонанса и вырождения мод, которые определяются двулучепреломлением кристалла [81].

В [98] исследовалась устойчивость границ доменов в вырожденном ПГС, накачиваемом в непрерывном режиме модами ЛГ. Было показано, что для мод накачки $u_{0\ell}^{LG}$ с четным значением ℓ сигнальная волна устойчива и имеет фазовый профиль $e^{i\ell\phi/2}$. При нечетных ℓ сигнальная волна находилась бы в дискретном состоянии с дробным угловым моментом. Такая плохо определенная фаза индуцирует одну или более доменную границу с интенсивностью в радиальном направлении, стремящейся к нулю. На рис. 12.6 показаны сигналы с несколькими границами доменов при одном и том же значении индекса ℓ волны накачки. Такие световые распределения с одной или несколькими темными линиями являются оптическими ротаторами (или образно — оптическими дождевальными установками), поскольку они действительно вращаются во времени. Особенность этих состояний заключается в том, что эти моды обладают дробным орбитальным моментом, определяемым нецелым азимутальным индексом $\ell/2$ при нечетных ℓ (см. подразд. 12.3.5). Отметим, что некоторые авторы используют это же определение пучков, обладающих дробным угловым моментом, относя его к среднему угловому моменту на фотон. Эта величина является в общем случае не целой для любой суперпозиции нескольких мод $u_{0\ell_i}^{LG}$ с нечетным значением $\sum \ell_i$, без какой-либо дискретности фазы. Прекрасные примеры структур с дробным средним угловым моментом — это самозахваченные «молнии» в нелинейном уравнении Шредингера [99].

Определение сохраняющихся величин при одновременной генерации фотонов предполагает возможность генерации перепутывания орбитального углового момента в гильбертовом пространстве более высокой размерности по отношению к спиновому случаю. Это перепутывание уже было продемонстрировано [40], и обсуждалось в [77]. Двухфотонное состояние, генерируемое в параксиальном режиме в тонком кристалле, можно записать в виде:

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell_1=-\infty}^{+\infty} C_{\ell_1} |\ell_1\rangle |\ell_0 - \ell_1\rangle, \quad (12.41)$$

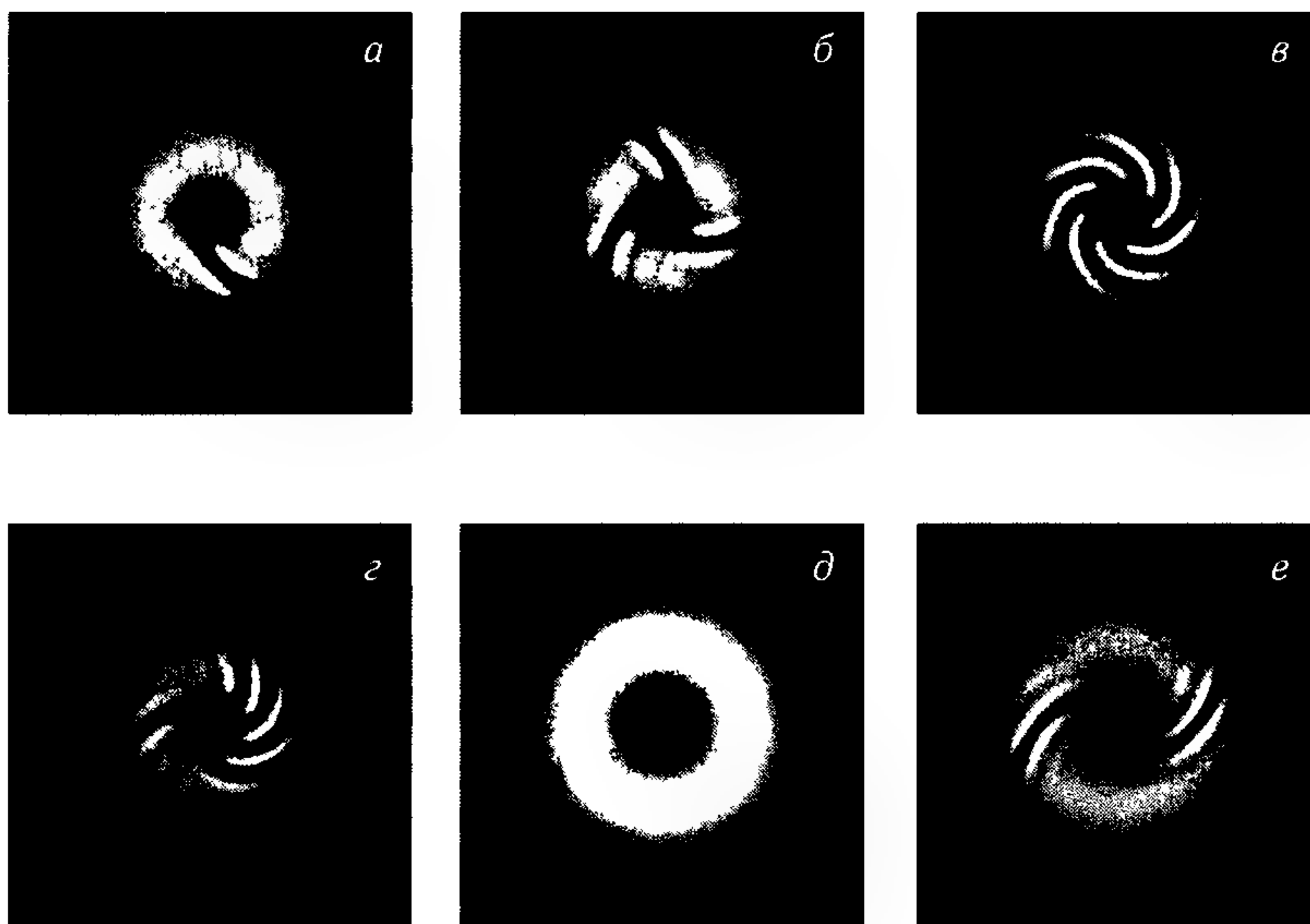


Рис. 12.16. Рассчитанные численно оптические ротаторы в интенсивности сигнальной волны ПГС, накачиваемого модой $u_{0\ell}^{LG}$ с азимутальным индексом $\ell = 1$ (a–c) и $\ell = 2$ (d, e) для различных интенсивностей накачки. Заимствовано из [98]

где $|\ell\rangle$ означает собственные состояния углового момента. Угловое распределение совпадающих отсчетов имеет более сложную структуру. Для гауссовой накачки ($\ell = 0$) можно ожидать, что оно будет представлять собой области, локализованные на противоположных сторонах конуса параметрического рассеяния. Недавно было высказано предположение, что эта одновременная корреляция между орбитальными угловыми моментами и азимутальными координатами может явиться основой для демонстрации известного ЭПР-парадокса [91]. Однако для накачки в виде мод Лагерра–Гаусса изображение, получаемое на холостой волне, при совпадении с детектируемым сигнальным фотоном в малой области представляет собой преобразование Фурье поля накачки внутри нелинейного кристалла [43]. Недавно было показано, что фотоны являются также перепутанными в случае дробного углового момента [32].

12.6.4. Нелинейности высокого порядка. В подразд. 12.6.2 и 12.6.3 обсуждались эксперименты, направленные на изучение сохранения орбитального углового момента в процессах трехволнового смешения. Нелинейности более высоких порядков позволяют увеличить число взаимосвязанных пучков. Эксперименты в неколлинеарных конфигурациях на холодных атомах цезия [85] и в лигированном окрашенном стекле [100] недавно подтвердили сохранение углового момента для кубично-нелинейных процессов четырехволнового смешения в модах ЛГ. Однако вопрос, привлекающий внимание нескольких групп, это возможность наблюдения устойчивого распространения в нелинейных средах пучков с угловым моментом [102].

Новый класс самозахваченных пучков, характеризующийся вращением фазы поля и большей устойчивостью к коллапсу всего пучка, был предложен

в 1985 г. [103]. Эти пучки на самом деле являются пространственными оптическими солитонами с ненулевым угловым моментом, и получили название *вихревых солитонов*. После их первого экспериментального наблюдения в 1992 г. [104], исследовались различные способы получения вихревых солитонов, включая, конкурирующие нелинейности, создание многомодовых векторных солитонов (в которых вихрь стабилизируется потенциалом другой моды), нелокальное взаимодействие и фотонные кристаллы. Интенсивные численные и теоретические исследования, однако, показали, что кольцевые пучки испытывают сильную азимутальную неустойчивость как в насыщающихся керровских средах, так и в материалах с конкурирующими квадратичной или кубичной нелинейностями [107]. Вследствие азимутальной неустойчивости, нарушающей симметрию, пучки с фазовым профилем $\exp(i\ell\phi)$ обычно распадаются на $2|\ell|$ (для самофокусирующих керровских сред) или $2|\ell| + 1$ (для квадратичных сред) основных оптических солитонов [107].

Неустойчивость этих пучков дает возможность наблюдения красивого динамического эффекта сохранения углового момента в керровских [105] и в квадратичных [106] средах. В частности, распространяющийся кольцевой пучок распадается на несколько филаментов, которые разлетаются тангенциально к неустойчивому кольцу, сохраняя полный орбитальный угловой момент, как показано на рис. 12.17 (i). Результаты недавних экспериментов с насыщающейся нелинейностью [101] приведены на рис. 12.17 (ii). Когда лазерный импульс в моде ЛГ с орбитальным угловым моментом $\ell = 3$ проходит через плотные пары натрия, он распадается на шесть филаментов, как и предсказывалось в [107].

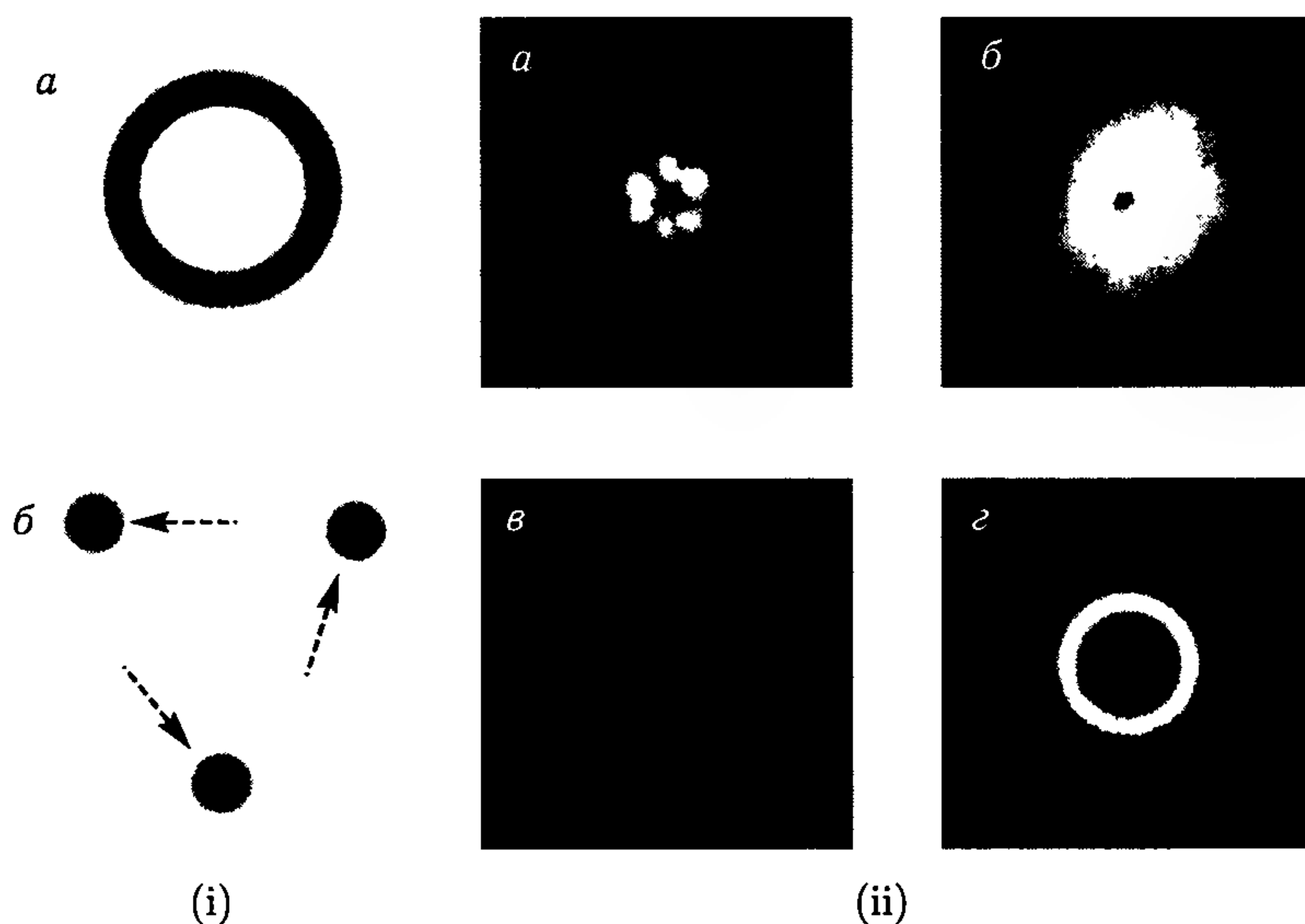


Рис. 12.17. (i) Графическое изображение эволюции кольцевой моды с $\ell = 3$ (a), распадающейся на три солитона, разлетающихся тангенциально исходному кольцу (б). (ii) Экспериментально наблюдаемый выходной пучок с $\ell = 3$, распадающийся на шесть филаментов в резонансе (a), и при отстройке от резонанса (б). На рис. в и г приведены аналогичные результаты численного решения нелинейного уравнения распространения для паров натрия. Заимствовано из [101]

12.7. Заключение

Орбитальный угловой момент света фундаментально связан с фазовыми свойствами поля в плоскости, перпендикулярной направлению его распространения. Это отличает его от более известного спинового углового момента, связанного с поляризацией или векторным характером электромагнитного поля. Очевидно, что орбитальный угловой момент, являясь фундаментальным пространственным свойством поля, тесно связан с изображениями и пространственными корреляциями, представляющими главный предмет изучения этой книги.

Необходимо подчеркнуть, что оптический угловой момент является чисто механическим свойством, что было убедительно продемонстрировано в экспериментах, описанных в подразд. 12.2.3. Также ясно, что нелинейные неустойчивости, обсуждавшиеся в подразд. 12.6.4, наиболее легко объяснимы в терминах сохранения механического углового момента.

Угловой момент сопряжен с азимутальной угловой координатой, что следует из соотношения неопределенностей, аналогом теоремы Фурье о ширине спектра. В разд. 12.5 показано, что это соотношение неопределенностей приводит к определенным умным состояниям и состояниям с минимальным произведением неопределенностей, которые были продемонстрированы экспериментально.

Изучение орбитального момента с точки зрения квантовой физики находится на начальном этапе развития. Однако уже сейчас ясно, что можно получить перепутывание света по этому параметру, и что угловым моментом можно управлять и измерять его на уровне одиночных фотонов. Реализация этого плана содержит большой потенциал с точки зрения квантовой передачи и обработки информации, основанной на использовании углового момента.

Благодарности. Мы признательны друзьям и коллегам, с которыми мы сотрудничали, исследуя орбитальный угловой момент. В частности, мы благодарны Лез Аллен, Джоанне Кортэл, Соне Франке-Арнольд, Грахаму Гибсон, Йоргу Гетте, Джонатану Личу, Родни Лудону, Миллес Паджетт, Дэвиду Пегг, Кену Шелдону, Лоре Томсон и Эрику Йао. Эта работа поддержана Британским советом по прикладным и физическим научным исследованиям.

Список литературы

1. Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J. C., Woerdman J. P. // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 8185.
2. Marcuse D. Light Transmission Optics. — New York: Van Nostrand, 1972.
3. Allen L., Padgett M. // J. Opt. Commun. 2000. V. 184. P. 67.
4. Allen L., Padgett M. J., Babiker M. // Progress in Optics. 1999. V. XXXIX. P. 291.
5. Allen L., Barnett S. M., Padgett M. J. Optical Angular Momentum. — Bristol: Institute of Physics Publishing, 2003.
6. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. — New York: Wiley, 1999.
7. Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics. — New York: Wiley, 1997.

8. *Van Enk S. J., Nienhuis G.* // Opt. Commun. 1992. V. 94. P. 147.
9. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика / Пер. с англ. под ред. В. В. Самарцева. — М.: Физматлит, 2000.
10. *Van Enk S. J., Nienhuis G.* // Europhys. Lett. 1994. V. 25. P. 497.
11. *Van Enk S. J., Nienhuis G.* // J. Mod. Opt. 1994. V. 41. P. 963.
12. *Barnett S. M.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. S7.
13. *Alexeyev C. N., Fridman Y. A., Alexeyev A. N.* // Ukr. Phys. J. 2001. V. 46. P. 43.
14. *Haus H. A.* Waves and Fields in Optoelectronics. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984.
15. *Beth R. A.* // Phys. Rev. 1936. V. 50. P. 115.
16. *He N., Friese M. E. J., Hechenberg N. R., Rubinstein-Dunlop H.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 826.
17. *Friese M. E. J., Enger J., Rubinstein-Dunlop H., Heckenberg N. R.* // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 1593.
18. *Simpson N. B., Dholakia K., Allen L., Padgett M. J.* // Opt. Lett. V. 22. P. 52.
19. *O'Neil A. T., MacVicar I., Allen L., Padgett M. J.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 053601.
20. *Zambrini R., Barnett S. M.* // J. Mod. Opt. 2005. V. 52. P. 1045.
21. *Nye J. F.* // Natural Focusing and Fine Structure of Light. — Bristol: Institute of Physics Publishing, 1999.
22. *Soskin M. S., Vasnetsov M. V.* Progress in Optics. V. 42 / Ed. by E. Wolf. — Amsterdam: Elsevier, 2001.
23. *Leach J.* PhD Thesis. — Glasgow: University of Glasgow, 2005.
24. *Siegman A. E.* Lasers. — Mill Valley: University Science Books, 1986.
25. *Durnin J., Miceli J. J., Eberly J. H.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1499.
26. *Allen L., van der Veen H. E. L. O., Woerdman J. P.* // Opt. Commun. 1993. V. 96. P. 123.
27. *Padgett M. J., Arlt J., Simpson N., Allen L.* // Am. J. Phys. 1996. V. 64. P. 77.
28. *Padgett M. J., Allen L.* // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. S17.
29. *Allen L., Courtial J., Padgett M. J.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 7497.
30. *Beijersbergen M. W., Coerwinkel R. P. C., Kristensen M., Woerdman J. P.* // Opt. Commun. 1994. V. 112. P. 321.
31. *Turnbull G. A., Robertson D. A., Smith G. M., Allen L., Padgett M. J.* // Opt. Commun. 1996. V. 127. P. 183.
32. *Oemrawsingh S. S. R., Aiello A., Eliel E. R., Nienhuis G., Woerdman J. P.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 217901.
33. *Баженов В. Ю., Васнецов М. В., Соскин М. С.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 1037.
34. *Heckenberg N. R., McDuff R., Smith C. P., Rubinsztein-Dunlop H., Wege-ner M. J.* // Opt. Quantum Electron. 1992. V. 24. P. S951.
35. *Molina-Terriza G., Recolons J., Torres J. P., Torner L., Wright E. M.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 023902.
36. *Courtial J., Dholakia K., Allen L., Padgett M. J.* // Opt. Commun. 1997. V. 144. P. 210.
37. *Visser J., Nienhuis G.* // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 013809.
38. *Berry M. V.* // J. Opt. A. 2004. V. 6. P. 259.
39. *Leach J., Yao E., Padgett M. J.* // New J. Phys. 2004. V. 6. P. 71.

40. *Mair A., Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A.* // Nature. 2001. V. 412. P. 313.
41. *Leach J., Padgett M. J., Barnett S. M., Franke-Arnold S., Courtial J.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 65. P. 033823.
42. *Langford N. K., Dalton R. B., Harvey M. D., O'Brien J. L., Pryde G. J., Gilchrist A., Bartlett S. D., White A. G.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 053601.
43. *Altman A. R., Köprülü K. G., Corndorf E., Kumar P., Barbosa G. A.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 123601.
44. *Harris M., Hill C. A., Tapster P. R., Vaughan J. M.* // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 3119.
45. *Weihs G., Zeilinger A.* // Nature. 2001. V. 412. P. 313.
46. *Kotlyar V. V., Soifer V. A., Khonina S. N.* // J. Mod. Opt. 1997. V. 44. P. 1409.
47. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация / Пер. с англ. под ред. М. Н. Вялого и П. М. Островского. — М.: Мир, 2006.
48. *Phoenix S. J. D., Townsend P. D.* // Contemp. Phys. 1995. V. 36. P. 165.
49. *Gibson G., Courtial J., Padgett M. J., Vasnetsov M., Pas'ko V., Barnett S. M., Franke-Arnold S.* // Opt. Express. 2004. V. 12. P. 5448.
50. *Gatti A., Wiedemann H., Lugiato L. A., Marzoli I., Oppo G. L., Barnett S. M.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 877.
51. *Wei H., Xue X., Leach J., Padgett M. J., Barnett S. M., Franke-Arnold S., Yao E., Courtial J.* // Opt. Commun. 2003. V. 223. P. 117.
52. *Leach J., Courtial J., Skeldon K., Barnett S. M., Franke-Arnold S., Padgett M. J.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 013601.
53. *Barnett S. M., Pegg D. T.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 3427.
54. *Pegg D. T., Barnett S. M.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. P. 1665.
55. *Barnett S. M., Pegg D. T.* // J. Mod. Opt. 1989. V. 36. P. 7.
56. *Franke-Arnold S., Barnett S. M., Yao E., Leach J., Courtial J., Padgett M.* // New J. Phys. 2004. V. 6. P. 103.
57. *Pegg D. T., Barnett S. M., Zambrini R., Franke-Arnold S., Padgett M.* // New J. Phys. 2005. V. 7. P. 62.
58. *Aragone C., Chalbaud E., Salam S.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1974. V. 7. P. L149.
59. *Jackiw R.* // J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 339.
60. *Summy G. S., Pegg D. T.* // Opt. Commun. 1990. V. 77. P. 75.
61. *Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 013601.
62. *Vasnetsov M. V., Pas'ko V. A., Soskin M. S.* // New J. Phys. 2005. V. 7. P. 46.
63. *Treps N., Andersen U., Buchler B., Lam P. K., Maître A., Bachor H.-A., Fabre C.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 203601.
64. *Caves C. M.* // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 1693.
65. *Holland M. J., Burnett K.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1355.
66. *Barnett S. M., Zambrini R.* Resolution in rotation measurements. Accepted for publication in «J. Mod. Opt.» (Special Issue on «Quantum Imaging»).
67. *Barnett S. M., Fabre C., Maître A.* // Eur. Phys. J. D. 2003. V. 22. P. 513.
68. *Ginzburg V. L., Pitaeuskii L. P.* // Sov. Phys. JETP. 1958. V. 34. P. 858.
69. *Nye J. F., Berry M. V.* // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. 336. P. 165.
70. *Allen L.* // J. Opt. B. Quantum Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. S1.
71. *Kivshar Y. S., Luther-Davies B.* // Phys. Rep. 1998. V. 298. P. 81.

72. *Berry M., Dennis M., Soskin M.* (Guest Editors) // *J. Opt. A.* 2004. V. 6. P. S155.
73. *Vaughan J. M., Willetts D. V.* // *Opt. Commun.* 1979. V. 30. P. 263.
74. *Coullet P., Gil L., Rocca F.* // *Opt. Commun.* 1989. V. 73. P. 403.
75. *Courtial J., Dholakia K., Allen L., Padgett M. J.* // *Phys. Rev. A.* 1997. V. 56. P. 4193.
76. *Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L.* // *Opt. Commun.* 2003. V. 228. P. 155.
77. *Franke-Arnold S., Barnett S. M., Padgett M. J., Allen L.* // *Phys. Rev. A.* 2002. V. 65. P. 033823.
78. *Arnaut H. H., Barbosa G. A.* // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. P. 286.
79. *Eliel E. R., Dutra S. M., Nienhuis G., Woerdman J. P.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 5208.
80. *Arnaut H. H., Barbosa G. A.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 5209.
81. *Martinelli M., Huguenin J. A. O., Nussenzveig P., Khoury A. Z.* // *Phys. Rev. A.* 2004. V. 70. P. 013812.
82. *Pyragaite V., Piskarskas A., Regelskis K., Smilgevicius V., Stabinis A., Mikalauskas S.* // *Opt. Commun.* 2004. V. 240. P. 191.
83. *Pereira S. F., Willemsen M. B., van Exter M. P., Woerdman J. P.* // *Appl. Phys. Lett.* 1998. V. 73. P. 2239.
84. *Chen Y. F., Lan Y. P.* // *Phys. Rev. A.* 2001. V. 63. P. 063807.
85. *Barreiro S., Tabosa J. W. R.* // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. P. 133001.
86. *Neshev D. N., Alexander T. J., Ostrovskaya E. A., Kivshar Y. S., Martin H., Makasyuk I., Chen Z.* // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. P. 123903.
87. *Fleischer J. W., Bartal G., Cohen O., Manela O., Segev M., Hudock J., Christodoulides D. N.* // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. P. 123904.
88. *Dholakia K., Simpson N. B., Padgett M. J., Allen L.* // *Phys. Rev. A.* 1996. V. 54. P. R3742.
89. *Padgett M. J., Allen L.* // *Opt. Commun.* 1995. V. 121. P. 36.
90. *Berzanskis A., Matijosius A., Piskarskas A., Smilgevicius V., Stabinis A.* // *Opt. Commun.* 1997. V. 140. P. 273.
91. *Götte J., Franke-Arnold S., Barnett S. M.* Angular EPR paradox. Submitted to «*J. Mod. Opt.*». 2005.
92. *McGloin D., Dholakia K.* // *Cont. Phys.* 2005. V. 46. P. 15.
93. *Torner L., Petrov D. V.* // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1997. V. 14. P. 2017.
94. *Buryak A. V., Di Trapani P., Skryabin D. V., Trillo S.* // *Phys. Rep.* 2002. V. 370. P. 63.
95. *Arlt J., Dholakia K., Allen L., Padgett M. J.* // *Phys. Rev. A.* 1999. V. 59. P. 3950.
96. *Walborn S. P., de Oliveira A. N., Thebaldi R. S., Monken C. H.* // *Phys. Rev. A.* 2004. V. 69. P. 023811.
97. *Caetano D. P., Almeida M. P., Souto Ribeiro P. H., Huguenin J. A. O., Coutinho dos Santos B., Khoury A. Z.* // *Phys. Rev. A.* 2002. V. 66. P. 041801(R).
98. *Oppo G.-L., Scroggie A. J., Firth W. J.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. P. 066209.
99. *Soljacic M., Segev M.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 420.
100. *Pyragaite V., Regelskis K., Smilgevicius V., Stabinis A.* // *Opt. Commun.* 2001. V. 198. P. 459.
101. *Bigelow M. S., Zerom P., Boyd R. W.* // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. P. 083902.
102. *Кившарь Ю. С., Агравал Г. П.* Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам: Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2005.

103. *Kruglov V. I., Vlasov R. A.* // Phys. Lett. A. 1985. V. 111. P. 401.
104. *Swartzlander G. A., Law C. T.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2503.
105. *Tikhonenko V., Christou J., Luther-Davies B.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2698.
106. *Petrov D. V., Torner L., Martorell J., Vilaseca R., Torres J. P., Cojocaru C.* // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 1444.
107. *Firth W. J., Skryabin D. V.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 2450.

Литература, добавленная при переводе

108. *Короленко П. В.* Оптика когерентного излучения. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1998.
109. *Янгирова В. В., Калинович А. А., Сухоруков А. П.* Генерация винтовых фазовых дислокаций при взаимодействии несоосных непланарных гауссовых пучков // Изв. РАН. Сер. физ. 2004. Т. 68. С. 1791.
110. *Sukhorikov A. P., Kalinovich A. A.* Superposition of noncoaxial vortices in parametric wave mixing // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 036608.
111. *Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
112. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах. — М.: Физматлит, 2009.
113. *Быков В. П., Силичев О. О.* Лазерные резонаторы. — М.: Физматлит, 2003.
114. *Ben-Aryeh Y.* Quasi-Hermitian Hamiltonians, minimum-uncertainty (MU) angular momentum states and interferometers // J. Mod. Optics. 2008. V. 55. P. 261.
115. *Rivas Á., Luis A.* Characterization of quantum angular-momentum fluctuations via principal components // Phys. Rev. A. 2008. V. 77. P. 022105.
116. *Feng S., Kumar P.* Spatial symmetry and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 163602.
117. *Jeng C.-C., Shih M.-F., Motzek K., Kivshar Y.* Partially incoherent optical vortices in self-focusing nonlinear media // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 043904.

Предметный указатель

- Антигруппировка фотонов
 - — во времени 53
 - — в пространстве 36, 47
- Антикорреляции 229, 233
- Априорная информация 84, 91, 132

- Бесшумовое усиление изображения 158, 184
- Бистабильность 187
- Ближняя зона 28
 - — дуализм с дальней зоной 29

- Вакуумно-индуцированное дрожание 217
- Вектор Пойнтинга 292, 296
- Верность (точность)
 - голографической телепортации 268
 - полная 269
 - редуцированная 271
- Вращающаяся структура 72
- Вырожденные оптические резонаторы 65
- Вытянутые сфероидальные функции 135, 139

- Гауссовские случайные переменные 266
- Гауссовское распределение шума 267
- Гейзенберговский предел 285
- Генерация второй гармоники (ГВГ) 183, 227
 - — — пучков Лагерра–Гаусса 314
 - — — типа I 192
 - — — типа II 185
- Гетероклинические связи 239
- Голография
 - и голографическая телепортация 272
 - традиционная нестационарная 259
- Гомодин 93
- Гомодинное детектирование 93, 106, 230, 243
 - — балансное 262
- Гомоклинические орбиты 239

- Дальняя зона 28
- Детектирование
 - многопиксельное 259
 - ниже уровня дробового шума 87
- Доменные стенки 238
- Дробовый шум 52
 - — пространственно-временная зависимость 262

- Изображения-близнецы 33
- Интерферограмма 315
- Интерферометр Маха–Цендера 88, 93, 276, 304

- Квазивероятностный функционал 242
- Квазивероятность 242
- Квантовая голографическая телепортация 254
- Квантовая лазерная указка 89
- Квантовая литография 98
- Квантовая обработка изображений 197
- Квантовая телепортация 253
- Квантовое изображение 74
- Квантовое плотное кодирование 254, 273
 - — — изображений 275
- Квантовые корреляции
 - — пространственные 65
 - — резонаторных солитонов 246
- Квантовые структуры 245
 - флуктуации
 - — пуассоновские 172
 - — суперпуассоновские 172
- Керровская среда 222
- Когерентности
 - время 257
 - объем 257
 - площадь 257
- Коммутационные соотношения
 - — в свободном пространстве 255
- Контрастность 117
- Корпускулярно-волновой аспект 103
- Корреляции
 - в ближней зоне 41
 - в дальней зоне 41
- Корреляционная матрица 267
- Коэффициент усиления
 - — фазово-чувствительного 166, 204
 - — фазово-нечувствительного 176

Коэффициент шума 169, 174
— — в квантовой обработке изображе-
ния 204
— — в сверхразрешении 149
Кубит 254, 303
Кунит 312

Ланжевенковские источники шума 44
Локальные квантовые флуктуации 227

Массивы солитонов 246

Метод

— корреляционный, Хэнбери Бра-
уна–Твисса 114
— перепутанных изображений 96
— сверхразрешения 91
— функции Грина 218

Многомодовая квантовая оптика 65, 84

Многомодовые сжатые состояния 87

Многомодовый неклассический свет 84

Многопиксельное измерение

— — наблюдаемые 271

Модовый синтез квантовых изображе-
ний 91

Модуляционная неустойчивость 245

Моды Эрмита–Гаусса 67

Неравенство Коши–Шварца 116

Обработка оптических изображений
183

Обращенная по времени картина 106

Одномодовое сжатое состояние 87

Оператор

— рождения фотонов 255
— уничтожения фотонов 255
— Стокса 58

Оптические структуры 70, 72, 73

Оптический параметрический усили-
тель 21

— — — бегущей волны 26, 255

— — — изображения однопроходный
160

Оптический ротатор 317

Оптическое считывание данных 91

Орбитальный угловой момент 292

Отношение сигнал-шум

— — при усилении изображения 166
— — в плотном кодировании 281
— — при сверхразрешении 148

Параксиальное приближение 92

Параметрический генератор света 21,
317

— — — вырожденный (ВПГС) 237

Параметрическое преобразование

— — типа II 36

— — частоты вниз 21, 237

Перевернутая мода 89, 312

Перепутывание

— в непрерывных переменных 22, 254

— взаимосвязь со сжатием 25

— для наблюдения фантомных изобра-
жений 109

— и преобразование частоты вниз 316

— импульсов 43

— по положению 44

— поляризационное 36, 58

— пространственно многомодовое 256

— пространственное 30, 42, 74

Повышение контрастности 189

Полуклассический подход 219

Поперечная длина когерентности 100

Поток информации 273

Предельное расстояние рэлеевского
разрешения 142

Представление

— Вигнера 44, 74, 219, 242

— Гейзенберга 42, 158, 275

— Шредингера 42

Преобразование с повышением частоты
187

— — — бесшумовое 210

Принцип неопределенности Гейзенбер-
га 242

Произведение пространственных полос
пропускания 134

Пропускная способность информацион-
ного канала 274, 280

Пространственная фильтрация 230

Пространственно-временные масштабы
256

Пространственно многомодовые состоя-
ния 254

Пространственное усреднение 105

Пространственные корреляции

— — ниже уровня дробового шума 47

Пространственный солитон

— — векторный 222

— — квантовые свойства 218

— — скалярный 222

Пространственный хаос 241

- Пучок
 - Бесселя 298
 - Лагерра–Гаусса 298
 - пуассоновский 175
- Радиус Рэлея 299
- Разветвление 301
- Разностные измерения 86
- Разрешение фантомных изображений 114
- Распознавание контура 189
- Регистрация матричным детектором 85
- Резонатор
 - конфокальный 69
 - полуконфокальный 69
 - самоотображающий 69
- Резонаторные солитоны 237
 - — в ближней зоне 246
 - — в дальней зоне 246
- Самопреобразующееся поле 69
- Сверхразрешение
 - в классической оптике 131
 - квантовая теория 133
 - степень 150
- Сжатие
 - амплитудное 227
 - в ближней зоне 31
 - в непрерывных переменных 254
 - локальное 21, 26, 65, 75
 - многомодовое 21, 155
 - пространственно многомодовое 26
- Сжатия
 - параметр 163
 - преобразование 163
 - пространственно-временные масштабы 256
 - функция 168
 - эллипсы 256
- Солитон
 - временной 217
 - пространственный 217
- Соотношение
 - Мэнли–Роу 195
 - вход–выход 25, 36, 195
 - неопределенности 306
- Состояние Фока 42
- Состояния
 - с минимальным произведением неопределенностей 307
 - умные 307
- Спектр сжатия 203
- Спин 294
- Спиральная фазовая пластина 300, 303
- Спонтанное параметрическое
 - — преобразование типа I 26
 - — рассеяние 161
- Статистика
 - пуассоновская 51
 - субпуассоновская 249
- Стохастическая электродинамика 242
- Структура ближней зоны 72
- Субпуассоновский свет 230
- Телепортация, схема 261
 - и голография 272
 - оптических изображений 258
- Точность телепортации (см. Верность)
- Угловой момент
 - — в квантовой оптике 303
 - — в параксиальной оптике 295
 - — дробный орбитальный 302
- Уравнение
 - нелинейное 317
 - Шредингера 222, 295
 - Фоккера–Планка 242
- Уравнения
 - Гейзенберга 193
 - Ланжевена 242
- Усиление изображения
 - — бесшумовое 33, 75, 158
 - — параметрическое 75, 159
- Усилитель
 - фазово-нечувствительный 24, 158
 - фазово-чувствительный 22, 158, 184
- Фаза Гюи 67, 299
- Фазово-нечувствительная конфигурация 199
- Фазово-чувствительная конфигурация 201
- Фазовые сингулярности 297
- Фазовый синхронизм 314
 - — вырожденный 161
 - — невырожденный 161
- Фантомная дифракционная картина 99, 101
- Фантомные изображения 96
 - — в квазитепловых пучках 111
- Фиксированные точки 239
- Фильтрация шума 190

Фотонные кристаллы 319

Функция

— Вигнера 242

— Грина 266

— импульсного отклика 99, 132, 161

— рассеяния точки 132

— реконструкции рассеяния точки 148

Цилиндрическая линза 300

Числовая апертура 92

Шеннона

— взаимная информация 273

— число 135, 156

**Эйнштейна–Подольского–Розена
(ЭПР)**

— состояние 259

— измерение 259

— корреляции 237

— парадокс 25

— пучки 256

Эффект сноса 44

Якобиан 240

Q-представление 243